Řetězové zlomky

1. část. Racionální čísla

In: Pavel Vít (author): Řetězové zlomky. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 5–66.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404019

I. ČÁST

RACIONÁLNÍ ČÍSLA

1. ZÁKLADNÍ POJMY

Řetězovým zlomkem budeme nazývat výraz tvaru

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

nebo

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}}}$$

Hodnotu takového výrazu můžeme snadno vypočítat „odzadu“. V prvním případě dostáváme

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{5}}=3+\frac{5}{13}=\frac{44}{13}$$

a ve druhém

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{16}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{16}{37}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{37}{53}}=\frac{53}{90}.$$

Vidíme, že jsme v obou případech dostali kladná racionální čísla. To je pochopitelné, neboť jsme k výsledku dospěli racionálními operacemi — sčítáním a dělením — s přirozenými čísly.

Budeme se tedy zabývat řetězovými zlomky tvaru

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}, \tag{1}$$

kde $q_2, q_3, \ldots, q_n \in \mathrm{N}$. Pro q_1 budeme připouštět $q_1 \in \mathrm{N}_0$ (může být tedy i $q_1=0$, jako v našem druhém příkladu). Řetězový zlomek (1) s $q_2, q_3, \ldots, q_n \in \mathrm{N}$ budeme nazývat *pravidelným*. O q_1 se v definici pravidelného řetězového zlomku obvykle předpokládá $q_1 \in \mathrm{Z}$; může tedy být i $q_1<0$, jak to zavedeme v 8. kapitole. Prozatím však budeme uvažovat jen $q_1 \in \mathrm{N}_0$.

Číslům $q_1, q_2, \ldots, q_n$ říkáme *neúplné podíly* (tento název souvisí s Euklidovým algoritmem, jak bude vyloženo ve 2. kapitole) nebo *prvky* řetězového zlomku (1). Úpravami (1) dostáváme (při $q_1 \in N_0$) kladné racionální číslo $\frac{p}{q}$. Později uvidíme, že $\frac{p}{q}$ je dokonce zlomek v základním tvaru, tj. čísla p, q jsou nesoudělná.

Hodnotu řetězového zlomku (1) můžeme — a také napříště budeme — počítat „zepředu". Dostáváme postupně zlomky

$$q_1 = \frac{q_1}{1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

$$q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1 q_2 + 1}{q_2} = \frac{P_2}{Q_2},$$

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}} = \frac{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3}{q_2 q_3 + 1} = \frac{P_3}{Q_3}, \tag{2}$$

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4}}} =$$

$$= \frac{q_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + 1}{q_2 q_3 q_4 + q_2 + q_4} = \frac{P_4}{Q_4},$$

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots + \cfrac{1}{q_n}}} = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}.$$

Vidíme, že všechny zlomky $\frac{P_i}{Q_i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ mají tvar

$$\frac{P(q_1, q_2, \ldots, q_n)}{Q(q_2, q_3, \ldots, q_n)},$$

kde P, Q jsou celistvé funkce přirozených argumentů, tedy přirozená čísla, a $\frac{p}{q} = \frac{P_n}{Q_n}$ je kladné racionální číslo.

Zlomkům $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}$ říkáme *sblížené zlomky* řetězového zlomku (1). Jak uvidíme později, jsou to vesměs zlomky v základním tvaru $\left(\text{o zlomku } \frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q} \text{ jsme to už řekli prve}\right)$. Rozumí se, že je nebudeme počítat podle vzorců (2), které jsou s rostoucím indexem stále delší; pro jejich výpočet odvodíme ve 3. kapitole jednoduché rekurentní vzorce.

Sblížený zlomek $\frac{P_i}{Q_i}$ nazýváme *i-tým sblíženým zlomkem* řetězového zlomku (1) nebo také sblíženým zlomkem *i-tého řádu.* Místo n-tý sblížený zlomek budeme také říkat *poslední sblížený zlomek* $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}$ řetězového zlomku (1).

Sblížené zlomky mají mnoho zajímavých vlastností; těm je věnována 4. kapitola.

Příklad 1. Zkusme vypočítat sblížené zlomky prvních dvou řetězových zlomků z úvodu této kapitoly bez dosazování do vzorců (2) (stejně bychom s nimi nevystačili). Nezapomeňme, že ve druhém příkladě je $q_1 = 0$.

Řešení. V prvním případě je $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1} = 3$, $\frac{P_2}{Q_2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$,

$$\frac{P_3}{Q_3} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = \frac{10}{3}, \quad \frac{P_4}{Q_4} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + 1}} = \frac{17}{5},$$

$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{44}{13} = \frac{p}{q}$ je poslední sblížený zlomek.

Ve druhém případě je první sblížený zlomek $\frac{P_1}{Q_1} = 0$, výpočtem dostaneme posloupnost šesti sblížených zlomků $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{10}{17}, \frac{53}{90}$.

Uvedeme si typograficky výhodnější způsoby zápisu řetězových zlomků. Řetězový zlomek (1) se v různých publikacích zapisuje např. takto:

$$q_1 + \frac{1}{q_2 +} \cdots \frac{1}{q_n}$$

nebo také:

$$q_1 + \frac{1|}{|q_2} + \ldots + \frac{1|}{|q_n}.$$

Oba tyto zápisy mají sice tu přednost, že připomínají, že jde o dělení, ale typograficky příliš výhodné nejsou. Nejsou ani zvlášť instruktivní po matematické stránce, neboť to, co nás zajímá, jsou čísla $q_1, q_2, \ldots, q_n$; vypíšeme tedy prostě posloupnost těchto čísel, a to, že jde o řetězový zlomek, vyznačíme tím, že tuto posloupnost dáme do závorek. Místo (1) budeme tedy psát

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n). \tag{3}$$

Od zápisu (3) snadno přejdeme, kdykoli to potřebujeme, k zápisu (1).

Řetězové zlomky, kterými začíná tato kapitola, tedy píšeme (3, 2, 1, 1, 2), popř. (0, 1, 1, 2, 3, 5).

Sblížené zlomky řetězového zlomku (3) zapíšeme stejným způsobem: $\frac{P_1}{Q_1} = (q_1) = q_1$, $\frac{P_2}{Q_2} = (q_1, q_2)$, $\frac{P_3}{Q_3} = (q_1, q_2, q_3) \ldots$, obecně

$$\frac{P_i}{Q_i} = (q_1, q_2, \ldots, q_i), \qquad 1 \leqq i \leqq n. \tag{4}$$

Poznámka. V literatuře se často nalezne zápis řetězového zlomku

$$[q_0, q_1, \ldots, q_n].$$

Až dosud jsme hledali vyjádření řetězového zlomku racionálním číslem. Řešme nyní obrácenou úlohu: ke kladnému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$ nalézt řetězový zlomek (3) tak, aby platilo

$$\frac{p}{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

tj. nalézt čísla $q_1 \in \mathrm{N}_0, q_2, \ldots, q_n \in \mathrm{N}$. Protože $\frac{p}{q} > 0$, stačí uvažovat p, $q \in \mathrm{N}$. Dále nás nebude zajímat případ $q|p$, neboť pak je $\frac{p}{q} \in \mathrm{Z}$; také nás nebude příliš zajímat případ $p = 1$, který ihned vede k vyjádření

$$\frac{1}{q} = (0, q).$$

K výpočtu čísel $q_1, q_2, \ldots, q_n$ potřebujeme vědět něco o celé části reálného čísla α. (Mohli bychom se prozatím omezit na celou část kladného racionálního čísla; ale v 8. kapitole budeme potřebovat celou část záporného racionálního čísla a v 9. kapitole celou část iracionálního čísla, a vzhledem k tomu, že celá část je ve všech těchto případech definována stejně, zavedeme už nyní tento pojem pro jakékoli reálné číslo.)

V algebře se dokazuje, že ke každému reálnému číslu α existuje právě jedno $k \in \mathrm{Z}$ takové, že

$$k \leqq \alpha < k + 1\,.$$

Toto celé číslo k se obvykle označuje $[\alpha]$, v cizí literatuře také $\mathrm{E}\alpha$ nebo $\mathrm{E}(\alpha)$, a nazývá se *celá část čísla* α. Pro číslo α pak platí $\alpha = [\alpha] + \beta$, kde $0 \leqq \beta < 1$. Číslo β se nazývá *lomená část čísla* α a obvykle se označuje $\{\alpha\}$. Celkem tedy

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}\,.$$

Pokud není $\alpha \in \mathrm{Z}$, je $0 < \{\alpha\} < 1$, a tedy $\dfrac{1}{\{\alpha\}} > 1$.

Příklady.

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} & \alpha = 5 : [\alpha] = 5, \{\alpha\} = 0; \\
\text{(b)} & \alpha = -2 : [\alpha] = -2, \{\alpha\} = 0; \\
\text{(c)} & \alpha = \dfrac{5}{2} : [\alpha] = 2, \{\alpha\} = \dfrac{1}{2}; \\
\text{(d)} & \alpha = -\dfrac{7}{5} : [\alpha] = -2, \{\alpha\} = \dfrac{3}{5};
\end{array}$$

rozklady iracionálních čísel na celou a lomenou část se budeme zabývat v 9. kapitole. Nás teď budou zajímat rozklady typu (c).

Buď dáno kladné racionální číslo a, $a \notin \mathrm{N}$. Položme $q_1 = [a]$, $a_1 = 1/\{a\}$. Zřejmě pak platí

$$a = q_1 + \frac{1}{a_1},$$

kde $a_1 > 1$, $a_1 \in \mathrm{Q}$. Odtud plyne

$$a_1 = \frac{1}{a - q_1}.$$

Pro a_1 celý postup opakujeme. Definujeme tedy číslo

$$q_2 = [a_1] = \left[\frac{1}{a - q_1}\right]$$

a číslo

$$a_2 = \frac{1}{\{a_1\}}.$$

Pak platí

$$a_1 = q_2 + \frac{1}{a_2},$$

kde $a_2 > 1$, $a_2 \in \mathrm{Q}$. Z posledního vztahu dostáváme

$$a_2 = \frac{1}{a_1 - q_2}$$

a opět definujeme podobným způsobem čísla q_3, a_3, q_4, a_4, $\dots$.

Postup se zastaví, jakmile je některé a_{n-1} celé číslo; pak je $q_n = [a_{n-1}]$ poslední prvek řetězového zlomku racionálního čísla a.

Postup má dvě nevýhody:

1. Je zbytečně pracný; Euklidův algoritmus dává mnohem jednodušší způsob výpočtu čísel q_1, $q_2, \dots, q_n$. (Ale při počítání prvků řetězového zlomku iracionálního čísla ho nebudeme používat, neboť pro iracionální čísla žádnou obdobu Euklidova algoritmu nemáme.)
2. Horší je skutečnost, že postup, tak jak jsme jej popsali, nedává žádnou záruku, že vůbec skončí. Řekli jsme, že se zastaví při některém celém a_{n-1}, ale odkud víme, že v posloupnosti čísel a, a_1, $a_2, \dots$, skutečně existuje celé číslo? Opět teprve Euklidův algoritmus nám umožní tvrdit,

že čísel q_1, q_2, ..., q_n je konečný počet (jednoznačně určený číslem $a=\frac{p}{q}$).

Budeme nyní tento postup ilustrovat na příkladu.

Příklad 2. Vyjádřeme racionální číslo $a=\frac{43}{30}$ řetězovým zlomkem.

Řešení.

$$q_1=\left[\frac{43}{30}\right]=1,$$

$$\frac{43}{30}=1+\frac{1}{a_1}, \qquad a_1=\frac{1}{\frac{43}{30}-1}=\frac{30}{13},$$

$$q_2=\left[\frac{30}{13}\right]=2,$$

$$\frac{30}{13}=2+\frac{1}{a_2}, \qquad a_2=\frac{1}{\frac{30}{13}-2}=\frac{13}{4},$$

$$q_3=\left[\frac{13}{4}\right]=3,$$

$$\frac{13}{4}=3+\frac{1}{a_3}, \qquad a_3=\frac{1}{\frac{13}{4}-3}=4,$$

$$q_4=[4]=4.$$

Tím je výpočet ukončen a dostáváme

$$\frac{43}{30}=(1, 2, 3, 4).$$

Doporučujeme čtenáři vypočítat ještě hodnoty sblížených zlomků $\frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_4}{Q_4}$. Vyjde posloupnost $1, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{43}{30}$.

Řekli jsme už, i když jsme to zatím nedokázali, že sblížené zlomky jsou vesměs zlomky v základním tvaru, což platí i pro poslední z nich $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{p}{q}$. Co se tedy stane, jestliže vypočítáme poslední sblížený zlomek nějakého (kladného) racionálního čísla $\frac{p}{q}$, kde p, q, *nebudou* nesoudělná čísla? Tomu věnujeme poslední příklad této kapitoly.

Příklad 3. Hledejme řetězový zlomek a pak sblížené zlomky racionálního čísla $\frac{363}{300}$ (což zřejmě není zlomek v základním tvaru).

Vyjde $\frac{363}{300}=(1, 4, 1, 3, 5)$. Sblížené zlomky jsou po řadě $1, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{23}{19}, \frac{121}{100}$. Poslední sblížený zlomek $\frac{121}{100}$ je skutečně výchozí zlomek $\frac{363}{300}$, ale ve zkráceném tvaru; je to skutečně zlomek v základním tvaru.

Co se tedy stane, jestliže budeme rovnou hledat řetězový zlomek racionálního čísla $\frac{121}{100}$? Odpověď zní, že nic. Opět vyjde (nechť se čtenář přesvědčí) $\frac{121}{100}=(1, 4, 1, 3, 5)$.

To ovšem není příliš překvapující, neboť zlomky $\frac{363}{300}$ a $\frac{121}{100}$ vyjadřují totéž racionální číslo. Vede nás to jen k podezření, že vyjádření racionálního čísla řetězovým zlomkem je jednoznačné. Toto podezření je oprávněné právě tehdy, jestliže pro poslední prvek řetězového zlomku q_n platí $q_n > 1$. V příští kapitole uvidíme, že tato podmínka plyne z rovností Euklidova algoritmu. Ponechme prozatím otázku jednoznačnosti do příští kapitoly — vzhledem k souvislosti s Euklidovým algoritmem — a položme si nyní ještě otázku, co tedy s řetězovým zlomkem, jehož poslední prvek je 1.

Ve 3. kapitole dokážeme vztah

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n, 1)=(q_1, q_2, \ldots, q_n+1). \tag{5}$$

Tento vzorec ukazuje, že jednoznačnost je porušena, je-li poslední prvek řetězového zlomku roven jedné. Nemusí nás to však mrzet: ve 2. kapitole se naučíme počítat prvky řetězového zlomku z Euklidova algoritmu, a při tomto výpočtu, jak uvidíme, nikdy nedostáváme jako poslední prvek jedničku.

Tato dvojznačnost je dokonce výhodná: V některých teoretických úvahách je totiž třeba vyjádřit racionální číslo řetězovým zlomkem, přičemž je předepsáno, že počet prvků má být sudý (popř. lichý). Této podmínce lze podle (5) vždy vyhovět, neboť na levé straně (5) je $(n+1)$ prvků, na pravé straně n prvků; a jak víme, z čísel n, $n+1$ je vždy jedno sudé a druhé liché. Této úvahy využijeme v jednom případě i my, a to v 7. kapitole.

Cvičení

1. Vypočítejte sblížené zlomky řetězového zlomku (a) $(2, 3, 1, 4, 2)$; (b) $(3, 4, 7, 1, 2)$; (c) $(0, 3, 8, 2)$; (d) $(10, 10, 10, 10)$.

2. Vyjádřete jako řetězový zlomek (a) $\frac{61}{11}$; (b) $\frac{137}{37}$; (c) $\frac{99}{170}$.

3. Ověřte si vztah (5) na číselných příkladech.

2. EUKLIDŮV ALGORITMUS

V učebnicích algebry se dokazuje tzv. *algoritmus dělení v* Z. Spočívá v tomto:

Ke každé uspořádané dvojici celých čísel (p, q), kde $q \neq 0$, existuje právě jedna taková uspořádaná dvojice celých čísel (q_1, r_1), že platí

$$p = qq_1 + r_1, \qquad 0 \leqq r_1 < |q|.$$

Číslu q_1 říkáme *neúplný podíl* (pro $r_1 = 0$ je to *„úplný" podíl*), číslu r_1 *zbytek*.

Není-li $r_1 = 0$, můžeme algoritmus dělení použít na uspořádanou dvojici celých čísel (q, r_1): existuje právě jedna uspořádaná dvojice celých čísel (q_2, r_2) tak, že platí

$$q = r_1 q_2 + r_2, \qquad 0 \leqq r_2 < r_1.$$

Pro $r_2 \neq 0$ můžeme celý proces opakovat atd., až nakonec bude některé $r_n = 0$. K tomu musí nutně dojít, neboť pro nezáporná čísla $r_1, r_2, \ldots$ zřejmě platí

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n = 0. \tag{1}$$

Poslední vztah (s $r_n = 0$) je tedy

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n.$$

Tato řada rovností se nazývá *Euklidův algoritmus.* V algebře ho používáme k určení největšího společného dělitele dvou celých čísel p, q: tímto největším společným dělitelem je poslední nenulový zbytek r_{n-1}.

Jsou-li čísla p, q přirozená, nesoudělná, pak v Euklidově algoritmu je

$$r_{n-1} = 1, \qquad 0 < r_1 < q.$$

Vypíšeme nyní všechny rovnosti Euklidova algoritmu pro přirozená nesoudělná p, q a vedle nich zapíšeme další vztahy, které získáme z jednotlivých rovností dělením:

$$p = qq_1 + r_1 \rightarrow \frac{p}{q} = q_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}},$$

$$q = r_1 q_2 + r_2 \rightarrow \frac{q}{r_1} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \tag{2}$$

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3 \rightarrow \frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}},$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n \rightarrow \frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n .$$

Jestliže v (2) dosadíme $\frac{q}{r_1}$ ze druhé rovnosti do první, $\frac{r_1}{r_2}$ ze třetí rovnosti do druhé atd., dostáváme

$$\frac{p}{q} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}},$$

tedy vyjádření kladného racionálního čísla $\frac{p}{q}$ ve tvaru řetězového zlomku.

Přitom platí: 1. Toto vyjádření je jediné možné, neboť neúplné podíly $q_1, q_2, \ldots, q_n$ jsou rovnostmi Euklidova algoritmu určeny jednoznačně v souhlasu s algoritmem dělení v Z.

2. Musí být $q_n > 1$, neboť pro $q_n = 1$ dává poslední rovnost vztah $r_{n-2} = r_{n-1}$, ale podle (1) musí být

$$r_{n-2} > r_{n-1}.$$

Odtud ihned plyne věta o jednoznačnosti.

Věta 1. *Jestliže dva pravidelné řetězové zlomky*

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad (q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

jsou vyjádřením téhož racionálního čísla a přitom platí $q_n > 1$, $q_m > 1$, *pak je* $n = m$ *a oba řetězové zlomky jsou identické.*

Vidíme ihned, že z rovností Euklidova algoritmu nemůžeme dostat $q_n = 1$.

Euklidův algoritmus poskytuje pohodlný a velice účinný způsob, jak vypočítat čísla $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Praktický výpočet bývá různě modifikován. Uvedeme postup, který je pravděpodobně nejstručnější (i když ve své obecné podobě tak nevypadá). Ukážeme nejprve tuto obecnou podobu, a to pro větší srozumitelnost v několika krocích:

(1)
$$\begin{array}{l} p : q = q_1 \\ \underline{-qq_1} \\ r_1 \end{array}$$

(2) Před číslo r_1 napíšeme symbol q a dělíme, takže máme celkem

$$\begin{array}{l} p : q = q_1 \\ \underline{-qq_1} \\ q : r_1 = q_2 \\ \underline{-r_1 q_2} \\ r_2 \end{array}$$

(3) Před číslo r_2 předepíšeme číslo r_1 a opět dělíme; celý výpočet teď vypadá takto:

$$\begin{array}{l}
p : q = q_1 \\
\underline{-qq_1} \\
q : r_1 = q_2 \\
\underline{-r_1 q_2} \\
r_1 : r_2 = q_3 \\
\underline{-r_2 q_3} \\
r_3
\end{array}$$

atd.

Ukážeme si teď, jak tento postup vypadá při numerickém počítání. Zvolíme za příklad racionální číslo $\frac{43}{30}$, s nímž jsme už počítali ve 2. příkladu 1. kapitoly. Víme tedy předem, co má vyjít: $\frac{43}{30} = (1, 2, 3, 4)$.

Příklad 1. Vypočítejme $q_1, \ldots, q_n$ čísla $\frac{43}{30}$.

Řešení.

$$\begin{array}{l}
43 : 30 = 1 \\
\underline{-30} \\
30 : 13 = 2 \\
\underline{-26} \\
13 : \ 4 = 3 \\
\underline{-12} \\
4 : \ 1 = 4
\end{array}$$

Výpočet zkracujeme tím, že nezbytná odčítání provádíme zpaměti. To se podobá postupu při obyčejném dělení. Počítáme tedy takto:

$$\begin{array}{rrl} 43:30 & = 1 \\ 30:13 & = 2 \\ 13:\ \ 4 & = 3 \\ 4:\ \ 1 & = 4 \end{array}$$

Teď je už dosti názorně vidět rychlost tohoto postupu.

Příklad 2. Vypočítejme $q_1, \ldots, q_n$ čísla $\dfrac{1156}{375}$.

Řešení.

$$\begin{array}{rrl} 1156:375 & = 3 \\ 375:\ \ 31 & = 12 \\ 31:\ \ \ 3 & = 10 \\ 3:\ \ \ 1 & = 3 \end{array}$$

Výpočet metodami 1. kapitoly by znamenal dosti úmorné počítání.

Na ukázku předvedeme dosti dlouhý výpočet. Nové zde je to, že budeme počítat řetězový zlomek racionálního čísla 2,3547. (Ve skutečnosti na tom ovšem nic nového není; bereme prostě $p = 23\,547$, $q = 10\,000$.)

Příklad 3. Vypočítejme $q_1, \ldots, q_n$ čísla 2,3547.

Řešení.

$$
\begin{array}{l}
23547 : 10000 = 2 \\
10000 : 3547 = 2 \\
3547 : 2906 = 1 \\
2906 : 641 = 4 \\
641 : 342 = 1 \\
342 : 299 = 1 \\
43
\end{array}
$$

pokračování:

$$
\begin{array}{l}
299 : 43 = 6 \\
43 : 41 = 1 \\
41 : 2 = 20 \\
2 : 1 = 2
\end{array}
$$

Tedy $2{,}3547 = (2, 2, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 20, 2)$.

Naučili jsme se počítat neúplné podíly čili prvky řetězového zlomku kladného racionálního čísla; ještě však neznáme žádný efektivní způsob výpočtu sblížených zlomků, jestliže naopak známe prvky. Tomu bude věnována příští kapitola.

Cvičení

1. Vypočítejte znovu způsobem popsaným v této kapitole cvičení 2(a), (b), (c) předchozí kapitoly.

2. Vypočítejte tímto způsobem řetězové zlomky racionálních čísel (a) $\frac{95}{42}$, (b) $\frac{308}{95}$, (c) $\frac{17}{53}$, (d) $\frac{10301}{1020}$.

Srovnejte s cvičením 1(a), (b), (c), (d) předchozí kapitoly.

3. Vypočítejte řetězový zlomek racionálního čísla $\frac{47561}{26904}$.

(Buďte připraveni na dlouhý výpočet.)

3. VÝPOČET SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

Pro sblížený zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ platí pro $k \geqq 3$ rekurentní vzorce, které jsme slíbili už v 1. kapitole. Vyslovíme je v následující větě.

Věta 1. *Pro čitatele P_k a jmenovatele Q_k sblíženého zlomku řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ platí tyto vztahy:*

$$
\begin{aligned}
&P_1 = q_1, \quad Q_1 = 1, \\
&P_2 = q_1 q_2 + 1, \quad Q_2 = q_2, \\
&P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \quad k \geqq 3, \\
&Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \quad k \geqq 3.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

První dva vztahy (pro P_1, Q_1, P_2, Q_2) dostaneme z obecných vztahů

$$P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2},$$

$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2},$$

jestliže v nich položíme $P_0 = 1$, $P_{-1} = 0$, $Q_0 = 0$, $Q_{-1} = 1$.

Pak pro $k=1$ dostáváme $P_1=q_1$, $Q_1=1$; pro $k=2$ je pak $P_2=q_2P_1+P_0=q_1q_2+1$, $Q_2=q_2Q_1+Q_0=q_2$.

Prozatím však budeme dávat přednost tomu, definovat vztahy pro P_1, Q_1, P_2, Q_2, protože provedená úvaha má tu vadu, že se v ní počítá se „sblíženým zlomkem nultého řádu $\frac{P_0}{Q_0}$", a dokonce i se „sblíženým zlomkem (-1)-ho řádu $\frac{P_{-1}}{Q_{-1}}$", což odporuje tomu, jak jsme sblížené zlomky zavedli.

Důkaz provedeme matematickou indukcí. První krok: Podle (2) z 1. kapitoly je

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{q_3q_2q_1+q_3+q_1}{q_3q_2+1},$$

tj. $P_3=q_3(q_1q_2+1)+q_1=q_3P_2+P_1$, $Q_3=q_3q_2+1=$ $=q_3Q_2+Q_1$; pro $k=3$ tedy naše vzorce platí.

Druhý krok: Nechť (1) platí pro nějaké $i>3$, tedy

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{q_iP_{i-1}+P_{i-2}}{q_iQ_{i-1}+Q_{i-2}}; \tag{2}$$

chceme dokázat, že pak platí i pro $i+1$. Pro větší názornost budeme řetězové zlomky zapisovat ve tvaru (1) z první kapitoly. Je tedy

$$\frac{P_i}{Q_i}=q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots+\cfrac{1}{q_i}},$$

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_i + \cfrac{1}{q_{i+1}}}}.$$

Sblížený zlomek $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$ tedy dostaneme ze sblíženého zlomku $\frac{P_i}{Q_i}$, jestliže v něm prvek q_i nahradíme součtem $q_i + \frac{1}{q_{i+1}}$.

Totéž tedy provedeme v (2), čímž ze zlomku $\frac{P_i}{Q_i}$ dostaneme zlomek $\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$:

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{\left(q_i + \frac{1}{q_{i+1}}\right) P_{i-1} + P_{i-2}}{\left(q_i + \frac{1}{q_{i+1}}\right) Q_{i-1} + Q_{i-2}},$$

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} = \frac{q_i q_{i+1} P_{i-1} + P_{i-1} + q_{i+1} P_{i-2}}{q_i q_{i+1} Q_{i-1} + Q_{i-1} + q_{i+1} Q_{i-2}}.$$

Dále budeme opět počítat P_{i+1}, Q_{i+1} samostatně:

$$P_{i+1} = q_{i+1}(q_i P_{i-1} + P_{i-2}) + P_{i-1},$$

$$Q_{i+1} = q_{i+1}(q_i Q_{i-1} + Q_{i-2}) + Q_{i-1}$$

a po dosazení z (1)

$$P_{i+1} = q_{i+1} P_i + P_{i-1},$$

$$Q_{i+1} = q_{i+1} Q_i + Q_{i-1},$$

což jsou skutečně dokazované vzorce pro $i+1$. Tím je věta dokázána.

Jiný důkaz je uveden v Chinčinově knížce [3]. Opírá se o pojem zbytku, který v této knížce také později použijeme.

Mějme řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n). \tag{3}$$

Řetězový zlomek

$$r_k = (q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n)$$

nazýváme *zbytkem* řetězového zlomku (3). Mějme na paměti mezní případy $r_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $r_n = (q_n) = q_n$. Pro (3) zřejmě platí

$$(q_1, \ldots, q_n) = (q_1, \ldots, q_{k-1}, r_k). \tag{4}$$

Řetězový zlomek $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ můžeme podle (4) psát jako (q_1, r_2); zde je

$$r_2 = (q_2, q_3, \ldots, q_n),$$

$$(q_1, r_2) = q_1 + \frac{1}{r_2}. \tag{5}$$

Symetrický charakter vzorců (1) umožňuje sestavit výpočty do tabulky:

q_k	q_1	q_2	q_3	......	q_n
P_k	q_1	q_1q_2+1			
Q_k	1	q_2			

(6)

První dva sloupce tabulky (pod q_1 a q_2) vyplníme, jak je naznačeno, a pro ostatní používáme vzorců (1). Všimněme si, že podíly čísel P_k, Q_k, obsažených ve druhém a třetím řádku tabulky, se rovnají sblíženým zlomkům; pod q_n najdeme poslední sblížený zlomek $\frac{P_n}{Q_n}=\frac{p}{q}$.

Příklad 1. Sestavme tabulku (6) a vypočítejme sblížené zlomky řetězového zlomku (3, 2, 1, 1, 2, 3).

Řešení.

q_k	3	2	1	1	2	3
P_k	3	7	10	17	44	149
Q_k	1	2	3	5	13	44

Posloupnost sblížených zlomků je $3, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \frac{44}{13}, \frac{149}{44}$.

Příklad 2. Vypočítejme sblížené zlomky řetězového zlomku čísla $\frac{218}{161}$.

Řešení.

$$\begin{array}{l} 218 : 161 = 1 \\ 161 : 57 = 2 \\ 57 : 47 = 1 \\ 47 : 10 = 4 \\ 10 : 7 = 1 \\ 7 : 3 = 2 \\ 3 : 1 = 3 \end{array}$$

$$\frac{218}{161} = (1, 2, 1, 4, 1, 2, 3)$$

q_k	1	2	1	4	1	2	3
P_k	1	3	4	19	23	65	218
Q_k	1	2	3	14	17	48	161

Sblížené zlomky: $1, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{19}{14}, \frac{23}{17}, \frac{65}{48}, \frac{218}{161}$.

Příklad 3. Dokažme vzorec (5) z 1. kapitoly:

$$(q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n, 1) = (q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n + 1).$$

Řešení. Vzorec dokážeme vyplněním tabulky (6). Sestavíme dvě tabulky, nejprve pro levou stranu dokazované rovnosti, potom pro pravou stranu. Protože až po prvek q_{n-1} jsou obě strany rovnosti identické, dávají obě strany totéž P_{n-1}, Q_{n-1}, a stačí tedy sestavit jen pravé okraje tabulek.

Levá strana:

q_{n-1}	q_n	1
P_{n-1}	$q_nP_{n-1} + P_{n-2}$	$(q_n + 1)P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_{n-1}	$q_nQ_{n-1} + Q_{n-2}$	$(q_n + 1)Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Pravá strana:

q_{n-1}	$q_n + 1$
P_{n-1}	$(q_n + 1)P_{n-1} + P_{n-2}$
Q_{n-1}	$(q_n + 1)Q_{n-1} + Q_{n-2}$

Skutečně tedy pro oba řetězové zlomky dostáváme totéž vyjádření racionálním číslem, totiž

$$\frac{(q_n + 1)\,P_{n-1} + P_{n-2}}{(q_n + 1)\,Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Cvičení

1. Vypočítejte sblížené zlomky řetězových zlomků:

(a) $(0, 2, 1, 2, 1, 2)$; (b) $(1, 1, 2, 3, 2)$;
(c) $(2, 5, 1, 1, 2, 7, 10)$; (d) $(0, 5, 1, 4, 2, 3, 3, 5)$;
(e) $(0, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

2. Vypočítejte sblížené zlomky řetězových zlomků čísel

(a) $\frac{30}{41}$; (b) $\frac{2001}{1760}$; (c) $\frac{697}{505}$; (d) $\frac{900}{3361}$; (e) $\frac{1557}{9697}$.

3. Fibonacciho posloupnost $\{u_n\}$ je určena svými prvními dvěma členy $u_1 = u_2 = 1$ a rekurentním vztahem $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$, $k \in \mathrm{N}$. Začíná tedy členy 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Vypočítejte sblížené zlomky řetězového zlomku (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) a povšimněte si souvislosti s prvními členy Fibonacciho posloupnosti.

4. Dokažte (srovnejte s příkladem 3 a cvičením 3 předchozí kapitoly):

(a) $(2, 2, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 20, 2) = 2{,}3547$;

(b) $(1, 1, 3, 3, 3, 1, 5, 4, 4, 1, 3) = \dfrac{47561}{26904}$.

4. VLASTNOSTI SBLÍŽENÝCH ZLOMKŮ

Budeme vyšetřovat vlastnosti posloupnosti sblížených zlomků řetězového zlomku kladného racionálního čísla. Vezměme např. posloupnost $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{11}{30}$ sblížených zlomků řetězového zlomku čísla $\frac{11}{30}$. Utvořme rozdíly $\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2}$ atd., obecně $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$, kde $k \geqq 2$ (a v daném případě $k \leqq 6$):

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = \frac{1}{Q_2 Q_1},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6} = \frac{-1}{Q_3 Q_2},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}-\frac{P_3}{Q_3}=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}=\frac{1}{24}=\frac{1}{Q_4Q_3},$$

$$\frac{P_5}{Q_5}-\frac{P_4}{Q_4}=\frac{4}{11}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{88}=\frac{-1}{Q_5Q_4},$$

$$\frac{P_6}{Q_6}-\frac{P_5}{Q_5}=\frac{11}{30}-\frac{4}{11}=\frac{1}{330}=\frac{1}{Q_6Q_5}.$$

Patrně platí

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{\pm 1}{Q_kQ_{k-1}}$$

se znamením + pro sudá k, − pro lichá k.

Věta 1. *Pro rozdíl dvou sousedních sblížených zlomků kladného racionálního čísla platí*

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}},\quad 2\leqq k\leqq n. \tag{1}$$

Důkaz provedeme nikoli pro vztah (1), nýbrž pro vztah

$$P_kQ_{k-1}-P_{k-1}Q_k=(-1)^k, \tag{2}$$

který dostaneme z (1) odstraněním zlomků. Vzorec (2) je velmi užitečný a často se s ním setkáme.

Především dokážeme, že (2) platí pro $k=2$, a to dosazením známých hodnot $P_1=q_1$, $P_2=q_1q_2+1$, $Q_1=1$, $Q_2=q_2$:

$$(q_1q_2+1).1-q_1q_2=1=(-1)^2.$$

Označme rozdíl na levé straně (2) symbolem Δ_k. Je zřejmě $\Delta_2 = 1$. Do (2) dosadíme za P_k, Q_k ze vzorců (1) předešlé kapitoly; dostáváme

$$\Delta_k = (q_k P_{k-1} + P_{k-2})\, Q_{k-1} - P_{k-1}(q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}) =$$

$$= -(P_{k-1} Q_{k-2} - P_{k-2} Q_{k-1}) = -\Delta_{k-1}.$$

Je tedy $\Delta_k = -\Delta_{k-1}$ a opakováním téhož postupu dostaneme rovnosti

$$\Delta_k = -\Delta_{k-1} = \Delta_{k-2} = \ldots = \pm\Delta_2;$$

je-li k sudé, je na konci znamení $+$, je-li k liché, je tam znamení $-$, přičemž $\Delta_2 = 1$.
Tedy celkem

$$\Delta_k = P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^k.$$

Ze vzorce (2) plyne tvrzení o nesoudělnosti čísel P_k, Q_k, které jsme vyslovili už v 1. kapitole: Největší společný dělitel čísel P_k, Q_k totiž musí dělit pravou stranu rovnosti (2), tj. číslo ± 1, je tedy 1 největším společným dělitelem čísel P_k, Q_k a $\frac{P_k}{Q_k}$ je zlomek v základním tvaru.

(Čtenář, kterému vadí, že vzorec (2), a tedy také tvrzení o nesoudělnosti čísel P_k, Q_k, platí pro $k \geqq 2$, nechť si uvědomí, že pro $k = 1$ je $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}$, tedy největší společný dělitel čísel P_1 a Q_1 je opět 1.)

Na posloupnosti sblížených zlomků ze začátku této kapitoly si ukážeme další vlastnost sblížených zlomků. Jde o posloupnost sblížených zlomků řetězového zlomku čísla $\frac{11}{30}$. Platí

$$\frac{P_1}{Q_1}=0<\frac{11}{30},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=\frac{1}{2}>\frac{11}{30},$$

$$\frac{P_3}{Q_3}=\frac{1}{3}<\frac{11}{30},$$

$$\frac{P_4}{Q_4}=\frac{3}{8}>\frac{11}{30},$$

$$\frac{P_5}{Q_5}=\frac{4}{11}<\frac{11}{30},$$

a konečně ovšem

$$\frac{P_6}{Q_6}=\frac{11}{30}.$$

Vidíme, že hodnoty sblížených zlomků jsou střídavě menší a větší než hodnota daného racionálního čísla, až ovšem na poslední sblížený zlomek, pro který platí rovnost. Přitom menší hodnoty mají sblížené zlomky lichého řádu $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5}$, větší hodnoty sblížené zlomky sudého řádu $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}$.

Věta 2. *Sblížené zlomky lichého řádu* $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5}, \ldots$ *kladného racionálního čísla* $\frac{p}{q}$ *tvoří rostoucí posloupnost, sblížené zlomky sudého řádu* $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}, \frac{P_6}{Q_6}, \ldots$ *klesající posloupnost.*

Důkaz. K důkazu potřebujeme vzorec

$$P_{k-2}Q_k - P_kQ_{k-2} = (-1)^k q_k, \quad k \geqq 3. \tag{3}$$

Jestliže jako prve dosadíme za P_k, Q_k ze vzorců (1) předešlé kapitoly, dostáváme

$$P_{k-2}(q_kQ_{k-1} + Q_{k-2}) - (q_kP_{k-1} + P_{k-2})\, Q_{k-2} = -q_k\Delta_{k-1},$$

kde označení Δ_{k-1} je převzato z důkazu předešlé věty: je $\Delta_{k-1} = (-1)^{k-1}$, což dokazuje vzorec (3). Vydělíme-li (3) číslem Q_kQ_{k-2}, které je ovšem kladné, dostáváme

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k\, q_k}{Q_kQ_{k-2}}.$$

Tedy pro sudé k je

$$\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}} - \frac{P_k}{Q_k} > 0 \quad \text{pro} \quad k \geqq 3$$

a pro sblížené zlomky sudého řádu je

$$\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}},$$

tvoří tedy klesající posloupnost. Pro liché k je však

$$\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}},$$

tj. sblížené zlomky lichého řádu tvoří rostoucí posloupnost.

Z této věty a z věty 1 vyplývá, že platí

$$\frac{P_1}{Q_1} < \frac{P_3}{Q_3} < \ldots < \frac{p}{q} < \ldots < \frac{P_4}{Q_4} < \frac{P_2}{Q_2}.$$

Slovy: Sblížené zlomky lichého řádu řetězového zlomku kladného racionálního čísla $\frac{p}{q}$ jsou vesměs menší než $\frac{p}{q}$, sblížené zlomky sudého řádu jsou vesměs větší. Toto tvrzení se netýká posledního sblíženého zlomku

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{p}{q}.$$

Toto tvrzení se často vyskytuje v této zjednodušené formě: $\frac{p}{q}$ leží mezi dvěma sousedními sblíženými zlomky.

Platí však silnější věta:

Věta 3. *Pro každé k (i pro $k = n$) platí, že hodnota zlomku $\frac{p}{q}$ je blíže hodnotě sblíženého zlomku $\frac{P_k}{Q_k}$ než hodnotě zlomku $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$; tj. platí*

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\left|\frac{p}{q}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|.$$

Důkaz. Mějme řetězový zlomek

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n) \tag{4}$$

a označme písmenem r jeho zbytek:

$$r=(q_{k+1}, \ldots, q_n).$$

Místo (4) tedy píšeme

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k, r). \tag{5}$$

Racionální číslo $\frac{p}{q}$, které je vyjádřeno řetězovým zlomkem (4), resp. (5), zapíšeme takto:

$$\frac{p}{q}=\frac{rP_k+P_{k-1}}{rQ_k+Q_{k-1}},$$

čili

$$\frac{p}{q}\cdot rQ_k+\frac{p}{q}Q_{k-1}=rP_k+P_{k-1},$$

$$\frac{p}{q}\cdot rQ_k-rP_k=P_{k-1}-\frac{p}{q}Q_{k-1},$$

$$rQ_k\left(\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right)=Q_{k-1}\left(\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-\frac{p}{q}\right).$$

Pro $r>1$, $Q_k>Q_{k-1}$ odtud dostáváme

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\left|\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{p}{q}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|. \tag{6}$$

Důsledek. Z toho, že $\frac{p}{q}$ leží mezi dvěma po sobě jdoucími sblíženými zlomky, řekněme $\frac{P_k}{Q_k}$ a $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$, plyne

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\left|\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}\right|,$$

což podle věty 1 dává

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}. \tag{7}$$

Tento vzorec platí pro $k<n$; uvědomíme-li si však, že $Q_{k+1}>Q_k$, dostáváme vzorec

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{Q_k^2}, \tag{8}$$

který platí i pro $k=n$.

Poznámka. Vzorec (8) udává horní mez výrazu

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|. \tag{9}$$

Výraz (9) je absolutní hodnota chyby aproximace čísla $\frac{p}{q}$ sblíženým zlomkem $\frac{P_k}{Q_k}$. Samotná chyba je rozdíl

$$\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k};$$

může to být i záporné číslo.

Existuje také vzorec pro dolní mez výrazu (9). Důležitější však je otázka, zda odhad (8) nelze zlepšit. V Chinčinově knížce [3] i v Perronově knize [4] se dokazují tato dvě tvrzení:

1. *Ze dvou po sobě jdoucích sblížených zlomků řetězového zlomku čísla* $\frac{p}{q}$ *má alespoň jeden tu vlastnost, že platí*

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{2Q_k^2}.$$

2. *Ze tří po sobě jdoucích sblížených zlomků řetězového zlomku čísla* $\frac{p}{q}$ *má alespoň jeden tu vlastnost, že platí*

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,.\,Q_k^2}.$$

Věta 4. *Hodnota sblíženého zlomku* $\frac{P_k}{Q_k}$ *se méně liší od hodnoty* $\frac{p}{q}$ *než hodnota kteréhokoli jiného zlomku* $\frac{x}{y}$, *pro jehož jmenovatele platí* $y<Q_k$, *tj. platí nerovnost*

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_k}{Q_k}\right|<\left|\frac{p}{q}-\frac{x}{y}\right|, \tag{10}$$

pokud je $y<Q_k$.

Jinak: Mezi zlomky se jmenovateli nejvýše rovnými Q_k aproximuje sblížený zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ číslo $\frac{p}{q}$ nejlépe.

Důkaz sporem. Nechť existuje zlomek $\frac{x}{y}$ vyhovující podmínkám věty. Protože zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ je blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ a zlomek $\frac{x}{y}$ je blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$, je zlomek $\frac{x}{y}$ blíže zlomku $\frac{p}{q}$ než zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$. Protože dále $\frac{p}{q}$ leží mezi $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ a $\frac{P_k}{Q_k}$, platí

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|<\left|\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|.$$

Odtud s použitím věty 1

$$\frac{|xQ_{k-1}-yP_{k-1}|}{yQ_{k-1}}<\frac{1}{Q_kQ_{k-1}}.$$

Z $y<Q_k$ plyne $yQ_{k-1}<Q_kQ_{k-1}$, a tedy

$$|xQ_{k-1}-yP_{k-1}|<1.$$

Protože x, y, P_{k-1}, Q_{k-1} jsou celá čísla, je i výraz v absolutní hodnotě celé číslo, ale to je možné jen tak, že je

$$xQ_{k-1}-yP_{k-1}=0,$$

tj.

$$\frac{x}{y} = \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}.$$

To je však hledaný spor, protože sblížený zlomek $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ by se podle toho měl méně lišit od zlomku $\frac{p}{q}$ než sblížený zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$, zatímco podle věty 3 se liší více.

Budeme definovat pojem nejlepšího přiblížení. Zlomek $\frac{P}{Q}$ se nazývá *nejlepším přiblížením zlomku* $\frac{p}{q}$, jestliže kterýkoli jiný zlomek, který leží blíže nebo stejně blízko zlomku $\frac{p}{q}$, má většího jmenovatele; nechť je tento zlomek $\frac{x}{y}$, pak slova „leží blíže nebo stejně blízko" znamenají, že platí

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P}{Q}\right| \leqq \left|\frac{p}{q} - \frac{x}{y}\right| \tag{11}$$

pro $y > Q$.

Podle věty 4 jsou tedy sblížené zlomky řetězového zlomku čísla $\frac{p}{q}$ nejlepšími přiblíženími zlomku $\frac{p}{q}$.

Toto tvrzení platí pro sblížené zlomky $\frac{P_2}{Q_2}$, $\frac{P_3}{Q_3}$, …, nemusí však platit pro první sblížený zlomek $\frac{P_1}{Q_1}$. Ukážeme si to na příkladě.

Příklad 1. Zvolme $\frac{p}{q}$ tak, aby bylo $q_2 = 1$. Sestavme např. tabulku

q_k	2	1	3	2
P_k	2	3	11	25
Q_k	1	1	4	9

Sblížené zlomky $\frac{3}{1} = 3$, $\frac{11}{4}$, $\frac{25}{9}$ jsou podle věty 4 nejlepšími přiblíženími zlomku $\frac{25}{9}$. Tvrdíme, že sblížený zlomek $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{2}{1} = 2$ není nejlepším přiblížením zlomku $\frac{25}{9}$ podle naší definice. Je totiž zřejmě

$$\left|\frac{25}{9} - \frac{P_2}{Q_2}\right| \leqq \left|\frac{25}{9} - \frac{P_1}{Q_1}\right|,$$

tj.

$$\left|\frac{25}{9} - 3\right| \leqq \left|\frac{25}{9} - 2\right|,$$

$$\frac{2}{9} \leqq \frac{7}{9},$$

přičemž pro jmenovatele obou zlomků platí $Q_1 = Q_2 = 1$.

Věta 5. *První sblížený zlomek* $\frac{P_1}{Q_1}$ *je nebo není nejlepším přiblížením zlomku* $\frac{p}{q}$ *podle toho, zda* $q_2 > 1$ *nebo* $q_2 = 1$.

Důkaz je téměř samozřejmý. Pro $q_2 = 1$ je $Q_1 = Q_2 = 1$, přičemž platí nerovnost (11). Je $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1 + 1}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}$ a zřejmě

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{P_2}{Q_2}\right| \leqq \left|\frac{p}{q} - \frac{P_1}{Q_1}\right|,$$

$$\left|\frac{p}{q} - (q_1 + 1)\right| \leqq \left|\frac{p}{q} - q_1\right|,$$

protože

$$\left|\frac{p}{q} - q_1 - 1\right| = \left|\frac{p}{q} - q_1 + (-1)\right| \leqq \left|\frac{p}{q} - q_1\right| + 1.$$

Cvičení

1. Čtenář si jistě povšiml teoretického rázu této kapitoly. Přitom všechny dokázané věty lze ilustrovat na nějaké posloupnosti sblížených zlomků, tak jako jsme to provedli před uvedením vět 1 a 2. Doporučujeme čtenáři, aby si podobnou ilustraci provedl sám i u dalších vět s použitím např. některé posloupnosti sblížených zlomků ze cvičení 1, 2 předešlé kapitoly.
2. Vlastnosti sblížených zlomků, které jsme zde popsali, připouštějí velmi názornou geometrickou interpretaci. Nechť se o ni čtenář pokusí. V soustavě pravoúhlých souřadnic vyznačíme číslo $\frac{p}{q}$ na svislé ose

a vedeme rovnoběžku s vodorovnou osou. Pak zobrazíme v 1. kvadrantu sblížené zlomky $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$ body, jejichž první souřadnice budou 1, 2, ... a druhé souřadnice čísla $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots$. K tomuto cvičení lze opět vybrat některou z posloupností sblížených zlomků ze cvičení 1, 2 předešlé kapitoly.

3. Nalezněte pátý sblížený zlomek řetězového zlomku čísla 0,317317 a určete horní mez výrazu $\left|0{,}317317 - \frac{P_5}{Q_5}\right|$ podle vzorce (7). Vypočítejte chybu $\delta = 0{,}317317 - \frac{P_5}{Q_5}$.

5. NEROVNOSTI MEZI ŘETĚZOVÝMI ZLOMKY

Který ze dvou řetězových zlomků (3, 2, 4), (3, 3, 4) je větší? Byli bychom možná ochotni prohlásit za větší (3, 3, 4), protože ve dvou prvcích se shoduje s druhým řetězovým zlomkem a třetí prvek je větší. Ale snadno — převedením řetězových zlomků na racionální čísla — se přesvědčíme, že je tomu právě naopak: $(3, 2, 4) = \frac{31}{9}$, $(3, 3, 4) = \frac{43}{13}$, $\frac{31}{9} > \frac{43}{13}$, tedy také $(3, 2, 4) > (3, 3, 4)$.

A dále, který ze dvou řetězových zlomků (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4, 3, 2) je větší? Zatím to dovedeme zjistit jen převedením řetězových zlomků na racionální čísla. Je $(1, 2, 3, 4) > (1, 2, 3, 4, 3, 2)$; proveďte výpočet.

Přesvědčte se, že také platí $(3, 2, 4) < (3, 2, 5)$ a $(1, 2, 3) < (1, 2, 3, 4, 5)$.

V této kapitole odvodíme věty, které nám umožní srovnávat řetězové zlomky bez jejich převádění na odpovídající racionální čísla.

Vyšetřování nerovnosti rozdělíme na dva případy. Nejprve se budeme zabývat nerovnostmi typu $(1, 2, 3, 4) > (1, 2, 3, 4, 3, 2)$ a $(1, 2, 3) < (1, 2, 3, 4, 5)$. Vidíme, co mají tyto dva příklady společného. Porovnáváme dva řetězové zlomky $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ a $(q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n)$. Druhý řetězový zlomek dostaneme z prvního přidáním $n-k$ prvků $q_{k+1}, \ldots, q_n$.

Věta 1. *Buďte racionální čísla a, b dána ve tvaru řetězových zlomků $a = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$, $b = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n)$. Pak platí $a > b$, je-li k sudé, $a < b$, je-li k liché.*

Důkaz. Označme zbytky řetězového zlomku čísla a postupně $r_k, r_{k-1}, r_{k-2}, \ldots, r_1$.
Je

$$r_k = (q_k) = q_k,$$

$$r_{k-1} = (q_{k-1}, q_k),$$

$$r_{k-2} = (q_{k-2}, q_{k-1}, q_k),$$

$$\ldots\ldots$$

$$r_1 = a.$$

Podobně zbytky řetězového zlomku čísla b označme $s_k, s_{k-1}, s_{k-2}, \ldots, s_1$. Je

$$s_k = (q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n),$$

$$s_{k-1}=(q_{k-1}, q_k, \ldots, q_n),$$

$$s_{k-2}=(q_{k-2}, q_{k-1}, \ldots, q_n),$$

$$\ldots\ldots$$

$$s_1=b.$$

Především je $s_k=(q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n)>q_k=r_k$. Dále platí

$$r_{k-1}=q_{k-1}+\frac{1}{r_k}, \quad s_{k-1}=q_{k-1}+\frac{1}{s_k}.$$

Protože podle hořejšího je $r_k<s_k$ a r_k i s_k jsou kladná čísla, je

$$\frac{1}{r_k}>\frac{1}{s_k},$$

a tedy

$$r_{k-1}>s_{k-1}.$$

Dále platí

$$r_{k-2}=q_{k-2}+\frac{1}{r_{k-1}}, \quad s_{k-2}=q_{k-2}+\frac{1}{s_{k-1}}$$

a vzhledem k nerovnosti mezi r_{k-1}, s_{k-1} je

$$r_{k-2}<s_{k-2}.$$

Postup lze opakovat tak dlouho, až skončíme nerovností mezi r_1 a s_1, tj. mezi a a b. Dostáváme posloupnost nerovností, v níž se střídají znaky $<$, $>$:

$$r_k<s_k,$$

$$r_{k-1}>s_{k-1},$$

$$r_{k-2} < s_{k-2},$$
$$\dots\dots$$
$$a = r_1 \lesseqgtr s_1 = b.$$

Počet těchto nerovností je k. Proto pro liché k bude v poslední nerovnosti znak $<$, pro sudé k znak $>$. To je tvrzení naší věty.

Nyní jsou už jasné dva příklady, které jsme uvedli před vyslovením věty: $(1, 2, 3, 4) > (1, 2, 3, 4, 3, 2)$ (sudé k), $(1, 2, 3) < (1, 2, 3, 4, 5)$ (liché k).

Druhý typ nerovností, který budeme zkoumat, je charakterizován příklady $(3, 2, 4) > (3, 3, 4)$ a $(3, 2, 4) < (3, 2, 5)$. Naše úvaha však bude obecnější, tj. neomezíme se na dva řetězové zlomky s týmž počtem prvků. Předem vyloučíme řetězové zlomky, jejichž poslední prvek je 1, neboť už z 1. kapitoly známe vzorec

$$(q_1, q_2, \dots, q_n, 1) = (q_1, q_2, \dots, q_n + 1).$$

Věta 2. *Buďte dány dva řetězové zlomky, netvořící právě uvedenou dvojici. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Nejsou-li zlomky identické, pak si nejsou rovny.*

(b) *Označíme-li*

$$a = (q_1, q_2, \dots, q_n),\ b = (q'_1, q'_2, \dots, q'_m),$$

pak pro $q_1 > q'_1$ platí $a > b$, pro $q_1 < q'_1$ platí $a < b$.

(c) *Nechť $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$, …, $q_k = q'_k$. Je-li k sudé, pak pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ je $a > b$, pro $q_{k+1} < q'_{k+1}$ je $a < b$. Je-li k*

liché, platí naopak, že pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ je *$a < b$, pro $q_{k+1} < q'_{k+1}$ je $a > b$.*

Důkaz. Tvrzení (b) i (a) plyne z (c). Budeme tedy dokazovat tvrzení (c). Uvažujme řetězové zlomky racionálních čísel

$$a = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_n),$$

$$b = (q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{k+1}, \ldots, q'_m).$$

Budiž

$$q'_{k+1} > q_{k+1}.$$

Označme jako v důkazu předešlé věty $r_k, r_{k-1}, \ldots, r_1 = a$ zbytky řetězového zlomku čísla a, $s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1 = b$ zbytky řetězového zlomku čísla b.

Především platí

$$s_{k+1} \geqq q'_{k+1} \geqq q_{k+1} + 1 \geqq r_{k+1},$$

tedy

$$s_{k+1} \geqq r_{k+1},$$

kde rovnost platí jen v případě, který jsme předem vyloučili.

Jako předtím dokážeme posloupnost nerovností

$$r_{k+1} < s_{k+1},$$

$$r_k > s_k,$$

$$\ldots\ldots$$

$$a = r_1 \gtrless s_1 = b.$$

Tyto nerovnosti jsou opačného smyslu než nerovnosti v důkazu předešlé věty. Proto pro $q_{k+1} < q'_{k+1}$ (předpoklad důkazu) pro sudé k je $a < b$, pro liché k je $a > b$. Pro $q_{k+1} > q'_{k+1}$ se smysl nerovnosti mezi čísly a, b změní: tj. pro sudé k je $a > b$, pro liché k je $a < b$.

Tato věta, zdánlivě složitá, dává ihned $(3, 2, 4) > (3, 3, 4)$, $(3, 2, 4) < (3, 2, 5)$, ale také např. $(3, 2, 4) < (3, 2, 5, 7, 1)$ nebo $(3, 2, 4) > (3, 3, 3, 3, 3)$.

Poznámka 1. Při důkazu věty 1 jsme vůbec nepoužili přidaných prvků $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$. Podobně nikde v důkazu věty 2 jsme nepoužili čísel n, m, tj. počtu prvků řetězových zlomků čísel a, b.

Poznámka 2. Může se stát, že z nějakých důvodů máme k dispozici jen prvních $k+1$ prvků srovnávaných řetězových zlomků. Podle poznámky 1 platí: srovnáváme-li řetězové zlomky podle věty 1, je

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k) < (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots)$$

nebo

$$(q_1, q_2, \ldots, q_k) > (q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots),$$

podle toho, jaké je číslo k. Používáme-li věty 2, platí $(q_1, q_2, \ldots, q_{k+1}, \ldots) \gtrless (q_1, q_2, \ldots, q'_{k+1})$ podle toho, jaké je číslo k a zda platí $q_{k+1} \lesseqgtr q'_{k+1}$.

6. APROXIMACE IRACIONÁLNÍHO ČÍSLA

Iracionální číslo vyjadřujeme různými způsoby; např. nekonečnými neperiodickými desetinnými rozvoji nebo hodnotami různých funkcí (jako je odmocnina, logaritmus, goniometrické funkce apod.)

Ke každému iracionálnímu číslu α a $n \in \mathrm{N}$ existuje racionální číslo a_n takové, že platí

$$|\alpha - a_n| \leqq 0{,}5 \,.\, 10^{-n}. \tag{1}$$

Toto číslo a_n nazýváme *n-místným* nebo *n-ciferným zaokrouhlením iracionálního čísla* α; také se používá názvu *n-místná* (*n-ciferná*) *racionální aproximace iracionálního čísla* α.

Např. zaokrouhlení čísla π na dvě desetinná místa je 3,14; na čtyři desetinná místa 3,1416; na deset desetinných míst 3,1415926536. Tyto hodnoty se naleznou v běžných logaritmických tabulkách, které obsahují některé konstanty zaokrouhlené na dostatečný počet desetinných míst. U jiných čísel, např. druhých a třetích odmocnin, logaritmů, hodnot goniometrických funkcí, však zpravidla najdeme jen zaokrouhlení na pět nebo určitý malý počet desetinných míst. Tak např. najdeme $\sqrt{2} = 1{,}41421$, $\sqrt{5} = 2{,}236068$, $\log 2 = 0{,}30103$, číslo e (základ přirozených logaritmů) $= 2{,}71828$ atd. Čísla a_n, pro něž platí (1), určujeme také měřením: Odhad chyby je dán tím, že prostým okem dokážeme rozlišit, zda ručička měřicího přístroje nedosáhla nebo naopak překročila polovinu posledního dílku stupnice.

Nás však bude zajímat něco jiného. Budeme iracionální čísla (ve skutečnosti jejich racionální zaokrouhlení) aproximovat zlomky, které mají vlastnost nejlepšího přiblížení, definovanou v kapitole 4. Tam jsme také dokázali, že tuto vlastnost mají sblížené zlomky, až snad na první.

Existují však ještě jiné zlomky, které mají vlastnost nejlepšího přiblížení. Říká se jim *vsunuté zlomky*.

Buďte $\frac{P_k}{Q_k}, \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ dva po sobě jdoucí sblížené zlomky řetězového zlomku $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Utvoříme posloupnost zlomků: $\frac{P_k}{Q_k}, \frac{P_{k+1}+P_k}{Q_{k+1}+Q_k}, \frac{2P_{k+1}+P_k}{2Q_{k+1}+Q_k}, \frac{3P_{k+1}+P_k}{3Q_{k+1}+Q_k},$
$\ldots, \frac{cP_{k+1}+P_k}{cQ_{k+1}+Q_k}, \ldots, \frac{(q_{k+2}-1)P_{k+1}+P_k}{(q_{k+2}-1)Q_{k+1}+Q_k},$
$\frac{q_{k+2}P_{k+1}+P_k}{q_{k+2}Q_{k+1}+Q_k}=\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}.$
První a poslední člen této posloupnosti jsou sblížené zlomky $\frac{P_k}{Q_k}, \frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$. Žádný jiný člen však není sblížený zlomek; jsou to vesměs zlomky tvaru

$$\frac{cP_{k+1}+P_k}{cQ_{k+1}+Q_k}, \tag{2}$$

kde $c \in \mathrm{N}$ splňuje nerovnosti

$$1 \leqq c \leqq q_{k+2}-1. \tag{3}$$

Právě těmto zlomkům říkáme vsunuté zlomky. Je zřejmé, že nějaké zlomky dostaneme jen pro $q_{k+2}>1$; pro $q_{k+2}=1$ vsunuté zlomky neexistují.

Připomeneme si definici „sblíženého zlomku nultého řádu“ $\frac{P_0}{Q_0}$, o kterém jsme se zmínili v kapitole 3: $P_0=1$, $Q_0=0$. Definice vsunutých zlomků má totiž smysl i pro $k=0$.

Ne všechny vsunuté zlomky jsou však nejlepšími přiblíženími. Perron v [4] dokazuje větu:

Vsunutý zlomek (2) *je právě tehdy nejlepším přiblížením, jestliže* $2c>q_{k+2}$ *nebo jestliže* $2c=q_{k+2}$ *a přitom platí* $(q_{k+2}, q_{k+1}, \ldots, q_2)>(q_{k+2}, q_{k+3}, q_{k+4}, \ldots)$. *Pro* $2c<q_{k+2}$ *není vsunutý zlomek* (2) *nejlepším přiblížením.*

Perron ilustruje důsledky tohoto tvrzení na nejlepších přiblíženích čísla π. Uveďme jeho příklad; k výpočtu použijeme hodnoty π, zaokrouhlené na deset desetinných míst. Menší počet desetinných míst by nezaručil dostatečnou přesnost; čtenář se může sám přesvědčit, že pro hodnotu $\pi=3{,}1415926$ nedostane s dostatečnou přesností už prvek q_5.

Příklad 1. Určeme nejlepší přiblížení čísla π.

Řešení.

3,14159 26536 : 1 00000 00000 = 3
1 00000 00000 : 14159 26536 = 7
14159 26536 : 885 14248 = 15
885 14248 : 882 12816 = 1
3 01432

pokračování:

882 12816 : 3 01432 = 292
3 01432 : 1 94672 = 1
1 94672 : 1 06760 = 1

V dělení nebudeme pokračovat; dostali jsme právě $q_7 = 1$; uvidíme však, že už sblížený zlomek $\frac{P_6}{Q_6}$ má příliš velkého čitatele i jmenovatele, a takové zlomky se k aproximaci nehodí. Prvních šest sblížených zlomků: $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{3}{1}$, $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{22}{7}$, $\frac{P_3}{Q_3} = \frac{333}{106}$, $\frac{P_4}{Q_4} = \frac{355}{113}$, $\frac{P_5}{Q_5} = \frac{103993}{33102}$, $\frac{P_6}{Q_6} = \frac{104348}{33215}$.

Budeme teď hledat vsunuté zlomky: Hodnoty $P_0 = 1$, $P_1 = 3$, $Q_0 = 0$, $Q_1 = 1$ dávají vsunuté zlomky

$$\frac{3c+1}{c}, \quad \text{kde } 1 \leqq c \leqq 6;$$

hodnoty $P_1 = 3$, $P_2 = 22$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 7$ dávají

$$\frac{22c'+3}{7c'+1}, \quad \text{kde } 1 \leqq c' \leqq 14;$$

hodnoty $P_2 = 22$, $P_3 = 333$, $Q_2 = 7$, $Q_3 = 106$ by dávaly

$$\frac{333c''+22}{106c''+7}, \text{ avšak } q_4 = 1;$$

hodnoty $P_3 = 333$, $P_4 = 355$, $Q_3 = 106$, $Q_4 = 113$ dávají

$$\frac{355c'''+333}{113c'''+106}, \quad \text{kde } 1 \leqq c''' \leqq 291.$$

Avšak podle citované věty zlomky $\frac{3c+1}{c}$ poskytují nejlepší přiblížení pro hodnoty $c = 4, 5, 6$: odtud po snadném výpočtu vsunuté zlomky $\frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}$. Zlomky $\frac{22c'+3}{7c'+1}$ poskytují nejlepší přiblížení pro $c' = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$; odtud sedm vsunutých zlomků $\frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}$. Zlomky $\frac{355c'''+333}{113c'''+106}$ poskytují nejlepší přiblížení pro $c''' = 147, 148, \ldots$, což jsou zlomky s velkými čitateli a jmenovateli: $\frac{52518}{16717}, \frac{52873}{16830}, \ldots$. Zde je $q_5 = 292$; pro $c''' = 146$ tedy platí $2c''' = q_5$; tedy to, zda dostaneme nejlepší přiblížení také pro $c''' = 146$, závisí na tom, zda platí nerovnost $(q_5, q_4, q_3, q_2) > (q_5, q_6, q_7, \ldots)$. Vzpomeňme si na poznámku z předešlé kapitoly. Více prvků než sedm jsme nevypočítali, ale podle zmíněné poznámky to stačí. Skutečně platí $(292, 1, 15, 7) > (292, 1, 1, \ldots)$ podle věty 2 z předešlé kapitoly. Dostáváme tedy nejlepší přiblížení i pro $c''' = 146$; je to zlomek $\frac{52163}{16604}$.

Už jsme se zmínili o tom, že zlomky s příliš velkými čísly se k aproximacím nehodí.

Účelem těchto aproximací je najít zlomek pokud možno s malými čísly, přičemž je ovšem taková aproximace tím lepší, čím je chyba menší. U čísla π byly některé dobré aproximace známy už před vybudováním teorie řetězových zlomků. Tak např. Archimédes věděl, že π leží mezi $\frac{22}{7}$

a $\frac{223}{71}$, Adrian z Metz, zvaný Metius (okolo roku 1600) znal aproximace $\frac{333}{106}$ i $\frac{355}{113}$.

Vypočítejme hodnoty těchto zlomků a jejich chyby:

$$\frac{22}{7} = 3{,}14285\,7\ldots; \quad \text{chyba} = -0{,}001;$$

$$\frac{223}{71} = 3{,}14084\,5\ldots; \quad \text{chyba} = +0{,}0007;$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}14150\,94\ldots; \quad \text{chyba} = +0{,}00008;$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}14159\,29203\,5\ldots; \quad \text{chyba} = -0{,}00000\,02667\,6.$$

Vidíme, že $\frac{355}{113}$ je velmi dobrá aproximace.

O aproximacích iracionálních čísel racionálními existuje řada značně hlubokých vět; v této elementární knížce se však omezíme jen na to, co jsme řekli až dosud. Některé věty o aproximacích nalezne čtenář v Chinčinově knížce [3].

Následující dva příklady mají zcela odlišný charakter; jejich význam je především heuristický. Jsou přípravou na kapitoly o řetězových zlomcích iracionálních čísel. Nahradíme-li totiž iracionální číslo α jeho racionálním zaokrouhlením a_n, bude zřejmě přesnost výpočtů záviset na čísle n;

uvidíme však, že přitom narazíme na jistou charakteristickou vlastnost prvků řetězového zlomku, kterou ovšem prokážeme až v kapitole 9, pojednávající o řetězových zlomcích iracionálních čísel.

Příklad 2. Počítejme prvky řetězového zlomku čísla 1,41421, což je pětimístné zaokrouhlení iracionálního čísla $\sqrt{2}$. Dostaneme $q_1 = 1$ a $q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = q_7 = 2$. Bohužel q_8 kazí tento dojem periodicity, protože je $q_8 = 3$. Ale kdybychom vzali zaokrouhlení čísla $\sqrt{2}$ na více desetinných míst, dostali bychom patrně další dvojky. Rozhodně je zde podezření, že řetězový zlomek čísla $\sqrt{2}$ je periodický, přičemž jednoprvková perioda je 2.

Příklad 3. Ve cvičení 3 kapitoly 3 jsme vyšetřovali řetězový zlomek (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1). Toto číslo je jistým racionálním zaokrouhlením iracionálního čísla $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Zkusme vzít za zaokrouhlení čísla $\sqrt{5}$ hodnotu 2,236068, uvedenou na začátku této kapitoly. Pro racionální zaokrouhlení čísla $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ dostaneme 1,618034. Přesvědčme se, že řetězový zlomek tohoto čísla je $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$; zkusme, kolik jedniček takto dostaneme. Jak se ukáže výpočtem (snadným, ale zdlouhavým), který si čtenář provede ve cvičení, vyjde dokonce $q_1 = q_2 = \ldots = q_{18} = 1$; až teprve $q_{19} \neq 1$. Zde už je tedy podezření z periodicity velmi silné.

Rozumí se ovšem, že výpočtem prvků žádného racionálního zaokrouhlení nemůžeme nikdy periodicitu prokázat. Pojem periodicity je totiž spjat s pojmem nekonečného rozvoje, v případě řetězových zlomků s pojmem nekonečného řetězového zlomku; ten však zavedeme až v kapitole 9.

Smiřme se tedy s tím, co jsme řekli předem o heuristické ceně takovýchto příkladů.

Doufáme, že čtenář nyní nepojal podezření, že řetězový zlomek **každého** iracionálního čísla je periodický. Viz k tomu cvičení 3.

Cvičení

1. Vypočítejte prvních šest sblížených zlomků čísla $\sqrt{2}$. Vypočítejte vsunuté zlomky až do $\dfrac{cP_6 + P_5}{cQ_6 + Q_5}$ a určete, které z nich jsou nejlepšími přiblíženími.
2. Proveďte podrobný výpočet příkladu 3 až do $q_{18} = 1$ a určete $q_{19} \neq 1$.
3. Jisté racionální zaokrouhlení čísla e je dáno řetězovým zlomkem (2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6). Zjistěte, zda k výpočtu těchto devíti prvků postačí pětimístné zaokrouhlení čísla e, uvedené na začátku kapitoly. Jestliže ne, proveďte výpočet s vícemístným zaokrouhlením. (Devítimístné zaokrouhlení je 2,71828 1828.)

7. SYMETRICKÉ ŘETĚZOVÉ ZLOMKY

První pojem, který zde zavedeme, je *inverzní řetězový zlomek*. Název napovídá, oč jde: k řetězovému zlomku (2, 3, 5, 4, 2) je inverzní řetězový zlomek zřejmě (2, 4, 5, 3, 2) a obráceně.

Příklad 1. Vypočítejme řetězové zlomky (2, 3, 5, 4, 2) a (2, 4, 5, 3, 2).

Řešení.

Q_k	2	3	5	4	2
P_k	2	7	37	155	347
Q_k	1	3	16	67	150

Je tedy (2, 3, 5, 4, 2)$=\dfrac{P_5}{Q_5}=\dfrac{347}{154}$. Povšimněme si, že $P_4=155$.

q_k	2	4	5	3	2
P_k	2	9	47	150	347
Q_k	1	4	21	67	155

Je (2, 4, 5, 3, 2)$=\dfrac{347}{155}=\dfrac{P_5}{P_4}$, kde čísla P_4, P_5 jsou čitatelé sblížených zlomků inverzního řetězového zlomku (2, 3, 5, 4, 2).

Tento příklad je ilustrací následující věty:

Věta 1. *Nechť je* $(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{P_n}{Q_n}$ *a nechť* P_{n-1} *je čitatel předposledního sblíženého zlomku. Řetězový zlomek*

$$(q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1)$$

nazýváme inverzním k řetězovému zlomku $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ *a platí*

$$(q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1) = \frac{P_n}{P_{n-1}}.$$

Důkaz. Sestavme posloupnost rovností pro čísla P_k, počínajíc P_1:

$$P_1 = q_1 . 1,$$

$$P_2 = q_1 q_2 + 1 = q_2 . P_1 + 1,$$

$$P_3 = q_3 . P_2 + P_1$$

$$\ldots\ldots$$

$$P_n = q_n . P_{n-1} + P_{n-2}.$$

Odtud

$$\frac{P_2}{P_1} = q_2 + \frac{1}{P_1} = q_2 + \frac{1}{q_1} = (q_2, q_1),$$

$$\frac{P_3}{P_2} = q_3 + \frac{1}{\frac{P_2}{P_1}} = (q_3, q_2, q_1),$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = q_n + \frac{1}{\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}} = (q_n, q_{n-1}, \ldots, q_1).$$

Tím je věta dokázána.

Jsou-li si oba inverzní řetězové zlomky rovny, je $q_1 = q_n$, $q_2 = q_{n-1}$, ... Mohou nastat dva případy. Řetězový zlomek

$$(q_1, \ldots, q_m, q_m, \ldots, q_1) \tag{1}$$

má sudý počet prvků $2m$; řetězový zlomek

$$(q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}, q_m, \ldots, q_1) \tag{2}$$

má lichý počet prvků $2m+1$.

Řetězový zlomek tvaru (1) nebo (2) se nazývá *symetrický.*

Odvodíme nyní jednu větu o symetrických řetězových zlomcích; omezíme se přitom na řetězové zlomky se sudým počtem prvků. (Pro případ (2) platí obdobná věta, tu však nebudeme v dalším potřebovat.)

Věta 2. *Budiž $\frac{p}{q}$ zlomek v základním tvaru, $p > q > 1$ ($p, q \in \mathrm{N}$). Potom $\frac{p}{q}$ lze vyjádřit řetězovým zlomkem, který je symetrický a má sudý počet prvků $n = 2m$ právě tehdy, když $p \mid q^2 + 1$.*

Důkaz má dvě části, protože dokazujeme (logickou) ekvivalenci. Budiž tedy nejprve $\frac{p}{q}$ zlomek v základním tvaru a nechť jeho řetězový zlomek je symetrický o sudém počtu prvků $n = 2m$:

$$\frac{p}{q} = (q_1, \ldots, q_m, q_m, \ldots, q_1).$$

Protože je tento řetězový zlomek roven svému inverznímu řetězovému zlomku, platí $Q_n = P_{n-1}$; je ovšem $p = P_n$, $q = Q_n$. Ze vztahu (2) v kapitole 4 plyne pro sudé n

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = 1.$$

Dosadíme-li za P_n, Q_n, P_{n-1}, dostáváme

$$p Q_{n-1} = q^2 + 1,$$

tedy $p \mid q^2 + 1$.

Druhá část důkazu je obtížnější. Nechť tedy nyní $p \mid q^2 + 1$, tj. existuje $t \in Z$ tak, že je

$$q^2 + 1 = pt.$$

Budiž řetězový zlomek čísla $\frac{p}{q}$ roven $(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \frac{P_n}{Q_n}$. Nyní musíme připomenout to, co jsme řekli na samém konci kapitoly 1; snad to čtenář dosud nezapomněl. Rovnosti

$$(q_1, \ldots, q_n, 1) = (q_1, \ldots, q_n + 1)$$

lze využít k tomu, abychom podle potřeby zvolili v řetězovém zlomku kteréhokoli kladného racionálního čísla za počet prvků buď číslo sudé, nebo liché. Volme v našem řetězovém zlomku čísla $\frac{p}{q}$ za počet prvků n sudé číslo, takže je $(-1)^n = 1$, a platí stejně jako v první části důkazu

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = 1.$$

Je $p=P_n$, $q=Q_n$ a podle předpokladu věty $P_n>Q_n$, tj. existuje $t\in Z$ tak, že

$$P_n t = Q_n^2+1$$

čili

$$Q_n^2+1=P_n t\,.$$

Jestliže k této rovnosti připojíme

$$Q_n P_{n-1}+1=P_n Q_{n-1}$$

a obě rovnosti odečteme, dostaneme

$$Q_n(Q_n-P_{n-1})=P_n(t-Q_{n-1})\,,$$

což znamená, že

$$P_n \mid Q_n(Q_n-P_{n-1})\,.$$

Protože však čísla P_n, Q_n jsou nesoudělná, je

$$P_n \mid Q_n-P_{n-1}\,.$$

Je však $P_n>Q_n-P_{n-1}$; jediné celé číslo, které je dělitelné větším číslem, je nula. Musí proto být

$$Q_n-P_{n-1}=0\,,$$

tj.

$$Q_n=P_{n-1}\,.$$

Platí tedy pro zlomek $\dfrac{p}{q}=\dfrac{P_n}{Q_n}$ rovnost

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_n}{P_{n-1}}\,,$$

to značí, že řetězový zlomek čísla $\dfrac{p}{q}$ je symetrický, a to se sudým počtem prvků $n = 2m$, tj. je to řetězový zlomek $(q_1, \ldots, q_m, q_m, \ldots, q_1)$. Tím je důkaz věty ukončen.

Této věty lze použít k řešení následující úlohy: Je dáno číslo $p > 1$ a chceme najít číslo $q > 1$ těchto vlastností: $p > q$, čísla p, q jsou nesoudělná (to jsou podmínky věty) a řetězový zlomek racionálního čísla $\frac{p}{q}$ je symetrický a má sudý počet prvků. Naše věta o existenci takového čísla q nic neříká; říká jen, že nutná a postačující podmínka je $p | q^2 + 1$. Ukážeme si to na několika příkladech.

Příklad 2. $p = 12$; q vyhovující podmínkám úlohy může být jen některé z čísel 5, 7, 11; neplatí však ani jeden ze vztahů $12 | 5^2 + 1$, $12 | 7^2 + 1$, $12 | 11^2 + 1$. Tedy pro $p = 12$ je naše úloha neřešitelná.

Příklad 3. $p = 17$; q může být některé z čísel 2, 3, …, 16. Vyhovuje $q = 4$, neboť $17 | 4^2 + 1$. Příslušný řetězový zlomek čísla $\frac{17}{4}$ je ovšem jednoduchý: $\frac{17}{4} = (4, 4)$.

Příklad 4. $p = 34$; q může být jen některé liché číslo kromě 17, pro které $3 \leqq q \leqq 33$. Vyhovuje $q = 13$; $34 | 13^2 + 1$. Řetězový zlomek je $\frac{34}{13} = (2, 1, 1, 1, 1, 2)$.

Příklad 5. $p = 5$ dává $q = 2$, $q = 3$. Je $\frac{5}{2} = (2, 2)$, avšak s číslem $q=3$ úloha na první pohled nevychází: $\frac{5}{3}=(1, 1, 2)$. Uvědomme si však, že jsme v důkazu věty použili vzorce

$$(q_1, \ldots, q_n, 1)=(q_1, \ldots, q_n+1).$$

Použijeme tedy tohoto vzorce také v naší úloze. Podle něj platí

$$(1, 1, 2)=(1, 1, 1, 1),$$

což je řetězový zlomek požadovaných vlastností. Pro $p=5$ má tedy úloha dvě řešení.

Cvičení

1. Řešte popsanou úlohu pro $p=10$.
2. Čtenář, který vyřešil cvičení 2(a), (b) v 1. kapitole, ví, že řetězové zlomky čísel $\frac{61}{11}$ a $\frac{137}{37}$ jsou symetrické a mají sudý počet prvků. Pro takto zadaná čísla p, q tedy platí věta 2; přesvědčte se o tom.

8. ZÁPORNÁ RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Hledáme pravidelný řetězový zlomek záporného racionálního čísla, tj. chceme, aby bylo $q_2, q_3, \ldots, q_n \in \mathrm{N}$. Toho lze dosáhnout jedině tak, že q_1 bude záporné celé číslo. Použijeme celé hodnoty záporného racionálního čísla. Je

$$a=[a]+\frac{1}{a_1},$$

tj.

$$a = q_1 + \frac{1}{a_1},$$

a pro $a < 0$ je $q_1 < 0$, $a_1 > 0$, tj. $q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$.

Příklad 1. Najděme řetězový zlomek čísla $-\frac{43}{30}$.

Řešení. Především je $-\frac{43}{30} = -2 + \frac{17}{30}$; dále je $\frac{17}{30} = (0, 1, 1, 3, 4)$; celkem tedy

$$-\frac{43}{30} = (-2, 1, 1, 3, 4).$$

Vypočítáme sblížené zlomky.

q_k	-2	1	1	3	4
P_k	-2	-1	-3	-10	-43
Q_k	1	1	2	7	30

Posloupnost sblížených zlomků je -2, -1, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{10}{7}$, $-\frac{43}{30}$.

Povšimněte si dvou věcí:

1. Všechna čísla P_k jsou záporná, všechna čísla Q_k jsou kladná.

2. Věta 2 z kapitoly 4 (sblížené zlomky lichého řádu jsou vesměs menší než $\frac{p}{q}$ a tvoří rostoucí posloupnost, sblížené

zlomky sudého řádu jsou větší a tvoří klesající posloupnost) zůstává v platnosti i pro záporné $\frac{p}{q}$. Také ostatní věty o sblížených zlomcích platí i pro záporné racionální číslo.

Našli jsme vyjádření záporného racionálního čísla ve tvaru pravidelného řetězového zlomku. Prvky tohoto řetězového zlomku jsou opět neúplnými podíly v rovnostech Euklidova algoritmu; v první z nich ovšem musíme připustit záporný neúplný podíl. To není nikterak v rozporu s algoritmem dělení v $\mathbf{Z}$; protože jsme se však dosud omezovali na přirozené p, q, vypíšeme si rovnosti Euklidova algoritmu pro $p = -43$, $q = 30$ (čímž dostaneme prvky řetězového zlomku z příkladu 1). Bylo by možné volit také $p = 43$, $q = -30$; dostali bychom tytéž rovnosti. Pro $p = -43$, $q = 30$ je

$$\begin{aligned} -43 &= 30.(-2) + 17, \\ 30 &= 17.1 + 13, \\ 17 &= 13.1 + 4, \\ 13 &= 4.3 + 1, \\ 4 &= 1.4. \end{aligned}$$

Dostáváme opět $-\frac{43}{30} = (-2, 1, 1, 3, 4)$.

Cvičení

Najděte řetězový zlomek čísla $-\frac{96}{65}$ a vypočítejte jeho sblížené zlomky.