Kapitola 6.

ALGEBRAICKÉ NEROVNICE O JEDNÉ NEZNÁMÉ

Uvažujme vztah

$$2x + 3 > 0. \qquad (6.1)$$

Dosadíme-li za x číslo 2, přejde tento vztah v nerovnost $2 . 2 + 3 = 7 > 0$. Dosadíme-li za x číslo -2, dostaneme nerovnost $-1 < 0$, která neplatí.

Velmi často se v matematice setkáváme s úlohou nalézt všechna taková čísla x, pro která platí nějaký vztah, např. $2x + 3 = 0$. V tomto případě existuje takové číslo právě jedno. Při vyšetřování vztahu (6.1) je však situace jiná. Pokusme se řešit úlohu: Nalezněte všechna reálná čísla x, pro něž platí $2x + 3 > 0$.

Představme si, že dosazením nějakého čísla — označme je a — přejde (6.1) v platnou nerovnost $2a + 3 > 0$. Přičteme k oběma stranám této nerovnosti číslo -3. To, co jsme provedli, lze též popsat slovy „převedli jsme sčítanec 3 na druhou stranu nerovnosti s opačným znaménkem". Dále vynásobíme obě strany nerovnosti číslem 0,5. Dostaneme tak nerovnost $a > -1{,}5$. Od původní nerovnosti $2a + 3 > 0$ jsme přešli ekvivalentními úpravami podle vět T_3, T_4 k nerovnosti $a > -1{,}5$. Tato nerovnost je však jednodušší než nerovnost původní. Snadno z ní vidíme, že nejen číslo a, ale každé číslo z intervalu $(-1{,}5; +\infty)$ dává po dosazení do (6.1) platnou nerovnost; vidíme dokonce více: ta reálná čísla x, pro něž platí (6.1), jsou právě všechna čísla z množiny $(-1{,}5; +\infty)$.

Vztah (6.1) nazýváme *nerovnice* (podrobněji: *lineární nerovnice o jedné neznámé*). Kdybychom chtěli hovořit učeněji, jsou nerovnice výrokové formy a úloha řešit nerovnici neznamená nic jiného než určit obor pravdivosti této výrokové formy. Jinak řečeno: hledáme všechny hodnoty proměnné x, pro něž vyšetřovaný vztah přechází dosazením v platnou nerovnost. Říkáme pak stručněji, že „tato x vyhovují nerovnici“ nebo že „jsou řešeními nerovnice“. Při této příležitosti je vhodné upozornit na jedno úskalí. Názvem řešení označujeme nejen všechna čísla, která nerovnici vyhovují, ale i postup, který při hledání těchto čísel užíváme.

Vrátíme-li se ještě jednou k našemu řešení nerovnice (6.1), můžeme užitý postup též interpretovat takto: Nejprve jsme nahradili (6.1) jednoduššími nerovnicemi se stejnými množinami všech řešení ($2x + 3 > 0$, $2x > -3$, $x > -1{,}5$) a pak jsme z poslední nerovnice přímo „vyčetli“ řešení úlohy (interval $(-1{,}5; +\infty)$ je množinou právě všech řešení). Přitom jsme užívali úprav obdobných úpravám nerovností podle vět z předcházejícího článku. Připomeňme ještě, že kdybychom měli zjistit, zda je číslo -1 řešením nerovnice (6.1), nepotřebovali bychom provádět žádné ekvivalentní úpravy a prostě bychom jen za x dosadili číslo -1.

Pro řešení nerovnic mají základní význam ty věty, které popisují jejich ekvivalentní úpravy, tj. úpravy, při nichž se nemění množina všech jejich řešení. Tyto věty jsou obdobné větám, které jsme uvedli pro nerovnosti. Tak např. místo $\mathbf{T}_3$ pro úpravu nerovností užíváme větu:

$\mathbf{T}_3'$ Přičteme-li k oběma stranám nerovnice totéž číslo, množina jejích řešení se nezmění.

Věříme, že čtenář snadno zformuluje další věty o úpravách nerovnic podle vět z předcházející kapitoly.

Nejčastěji používáme těch, které odpovídají tvrzením K_2, T_3, T_4 a T_5. Dříve, kdy se nerozlišovalo mezi nerovnostmi a nerovnicemi (každý chápal, že se slova nerovnost užívá ve dvou významech), odpadla tato starost s formulováním „nových" vět. Ostatně nerovnici (6.1) jsme úspěšně rozřešili jen se znalostí vět o nerovnostech. Lze tedy stručně říci, že s nerovnicemi lze zacházet jako s nerovnostmi a že jediné, nač při jejich řešení musíme dávat pozor, je to, aby se úpravami nezměnila množina jejich řešení. Je však vhodné připomenout, že i úpravy, kterými se eventuálně změní (např. zvětší) množina všech řešení, mají pro řešení nerovnic význam.

Poněvadž řešení lineárních nerovnic tvaru $ax + b > 0$, kde $a \neq 0$, b jsou daná reálná čísla a x je neznámá (stejně tak řešení lineárních nerovnic se značkami $\geqq$, $<$, $\leqq$), je vám dobře známo, omezíme se jen na několik poznámek o soustavách lineárních nerovnic o jedné neznámé a všimneme si takových nelineárních nerovnic, jejichž řešení se snadno převede na řešení nerovnic lineárních.

Často se stává, že je dána soustava dvou nebo několika nerovnic, které je třeba rozřešit a pak vybrat taková řešení, která jsou vázána jistými podmínkami mezi danými nerovnicemi. Pro jednoduchost předpokládejme, že je dána soustava dvou nerovnic s neznámou x a že je dovedeme rozřešit. Pak si můžeme klást tyto otázky:

1. Která čísla x vyhovují oběma daným nerovnicím?
2. Která čísla x vyhovují první nerovnici a nevyhovují druhé?
3. Která čísla x nevyhovují nerovnici první a vyhovují přitom nerovnici druhé?
4. Která čísla x vyhovují aspoň jedné z daných nerovnic?
5. Která čísla x nevyhovují žádné z daných nerovnic?

6. Která čísla x vyhovují nejvýš jedné z daných nerovnic?

7. Která čísla x vyhovují právě jedné z daných nerovnic?

Nejčastěji nás ovšem zajímá otázka, která čísla x vyhovují oběma daným nerovnicím. Odpověď najdeme, když dovedeme najít průnik množin (intervalů), z nichž každá je množinou všech řešení jedné z daných nerovnic. Řešení takových úloh je příležitostí k dobrému výcviku v logickém myšlení. Přitom jistě dáte pozor na význam slov „aspoň jeden", „nejvýš jeden" a „právě jeden", což má velký význam. Přitom se upevní váš poznatek, že popřít platnost některé z nerovností $x \geqq a$, $y \leqq b$, $z > c$, $u < d$ znamená totéž jako uznat platnost nerovnosti protikladné jí odpovídající podle předcházejícího pořadí $x < a$, $y > b$, $z \leqq c$, $u \geqq d$.

Soustava nerovnic bývá někdy dána tak, že je stručně zapsána postupnou nerovnicí. Nejčastěji to bývá trojčlenná postupná nerovnice tvaru $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ (resp. s jednou nebo oběma značkami $<$), kde jsme symboly $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ naznačili, že jde o početní výrazy, v nichž se vyskytuje písmeno x ve významu neznámého čísla. V tom případě můžeme přepsat tento zápis na zápis dvou nerovnic $f(x) \leqq g(x)$, $g(x) \leqq h(x)$. Snadno lze dokázat, že lze provádět ekvivalentní úpravy postupných nerovnic tím, že ke všem členům stejné číslo přičteme nebo každý člen stejným kladným číslem znásobíme. Jestliže každý člen znásobíme stejným číslem záporným, musíme značky $<$, $\leqq$, $>$, $\geqq$ po znásobení nahradit značkami $>$, $\geqq$, $<$, $\leqq$. Těchto vět využijeme při řešení některých nerovností.

Všechny mocniny z^{2k-1}, kde z je reálné číslo a k číslo přirozené, tedy mocniny s lichým přirozeným mocnitelem, nabývají všechny současně hodnot kladných pro $z > 0$, hodnoty 0 pro $z = 0$ a hodnot záporných pro

$z < 0$. Jsou proto všechny nerovnice tvaru $z^{2k-1} < 0$ navzájem ekvivalentní, a tedy i ekvivalentní s nerovnicí $z < 0$. Vyloučíme-li případ $z = 0$, jsou všechny mocniny s lichým záporným exponentem též čísly souhlasnými, neboť jsou převrácenými čísly k mocninám s lichým kladným mocnitelem. Při vyloučení $z = 0$ jsou také všechny mocniny z^{2k} a z^{-2k} čísly souhlasnými, a proto nerovnice $z^{2k} > 0$, $z^{-2k} > 0$ jsou všechny ekvivalentní, tedy ekvivalentní s nerovnicí $z^2 > 0$. Všechna tato tvrzení platí obdobně i pro ostatní nerovnice. Dosadíme-li $z = ax + b$ nebo $z = x - x_1$ do nerovnic výše uvedených, ukáže se, že řešení nerovnic $(ax + b)^n < 0$, resp. $(x - x_1)^n < 0$ lze převést na řešení jednoduchých lineárních nebo kvadratických nerovnic, což ukážeme na příkladech.

Nežli začneme řešit příklady, připojme ještě jednu poznámku. Představme si, že máme řešit nerovnici

$$\frac{2x + 3}{2} - \frac{3x + 1}{3} \geqq 0. \tag{6.2}$$

Pomocí ekvivalentních úprav ji převedeme postupně na nerovnice

$$\frac{6x + 9 - 6x - 2}{6} \geqq 0,$$

$$6x + 9 - 6x - 2 \geqq 0, \tag{6.3}$$

$$7 \geqq 0.$$

Poslední nerovnici vyhovuje každé $x \in (-\infty, +\infty)$, neboli řešením nerovnice (6.2) je každé reálné číslo.

Někdo jiný by mohl postupovat takto: Zapamatoval by si, že řeší nerovnici (6.2), a upravoval by nerovnost

(6.2) s blíže neurčeným reálným číslem x. Obdržel by postupně

$$\frac{6x + 9 - 6x - 2}{6} \geqq 0,$$

$$6x + 9 - 6x - 2 \geqq 0, \qquad (6.4)$$

$$7 \geqq 0.$$

Všechny tyto nerovnosti jsou ekvivalentní podle vět z článku 5. Platí-li poslední nerovnost pro každé reálné číslo, platí pro ně i (6.2). Uvážíme-li odlišnost obou postupů, není příliš podstatné, zda pracujeme s nerovnicemi nebo nerovnostmi. Ostatně ze zápisu

$$\sqrt{x^2} \leqq |x| \qquad (6.5)$$

budete stěží rozhodovat, zda jde o nerovnost nebo o nerovnici. Proto až budete při sledování příkladů eventuálně na rozpacích, zda ten či onen vztah je nerovnicí nebo nerovností, uvědomte si, že to není někdy ta nejdůležitější otázka — tou pro nás zůstává správné řešení zadané úlohy.

Příklad 1. Řešme nerovnici

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0.$$

Tuto algebraickou nerovnici třetího stupně snadno rozřešíme, když ji převedeme na tvar

$$(x - 1)^3 > 0;$$

tato nerovnice je ekvivalentní s nerovnicí $x - 1 > 0$. Hledané řešení popisuje nerovnice

$$x > 1.$$

Příklad 2. Řešme nerovnici

$$\frac{5}{x^2 - 6x + 9} \leqq 0 .$$

Poněvadž $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, nemá zlomek na levé straně smysl pro $x = 3$. Obě strany nerovnice dělíme číslem 5 a pak přejdeme k nerovnici $(x - 3)^2 \leqq 0$. Pro $x \neq 3$ jsou obě nerovnice ekvivalentní. Avšak pro $x \neq 3$ nemá nalezená nerovnice řešení. Tedy původní nerovnice nemá řešení.

Příklad 3. Řešme soustavu nerovnic

$$-1 < \frac{2 - 5x}{3} \leqq 2 .$$

Všechny členy této postupné nerovnice znásobíme kladným číslem 3 a pak od nich odečteme číslo 2. Tak dostaneme postupnou nerovnici $-5 < -5x \leqq 4$. Všechny její členy znásobíme záporným číslem $-\frac{1}{5}$, přičemž znaménka mezi jednotlivými členy obrátíme a dostaneme tak nerovnici $1 > x \geqq -\frac{4}{5}$, kterou můžeme psát též ve tvaru $-\frac{4}{5} \leqq x < 1$. Každá z těchto postupných nerovnic udává, která čísla x dané soustavě nerovnic vyhovují. Jsou to právě všechna čísla x z intervalu $\left\langle -\frac{4}{5}; 1 \right)$.

Příklad 4. Hledejme na číselné ose všechny body x, které mají od bodu a vzdálenost menší než $\varepsilon > 0$ (viz obr. 1c).

Ekvivalentní zápis této úlohy je: řešte nerovnici $|x - a| < \varepsilon$. Podle věty A_3 ji můžeme napsat ve tvaru $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$. Jestliže ke všem členům této postupné nerovnice přičteme číslo a, dostaneme již řešení naší úlohy ve tvaru $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Hledané body x leží zřejmě v otevřeném intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Poznámka. Při studiu matematické analýzy se setkáte s nerovnicemi v tomto příkladě uvedenými tak často, že je užitečné, když se vám při pohledu na ně vybaví ihned představa okolí bodu a. Znamenají tedy např. $|x - 7| < 2$ otevřený interval $(5; 9)$ nebo $|x + 3| < 0{,}2$ otevřený interval $(-3{,}2; -2{,}8)$.

Příklad 5. Jak musíme volit číslo m, aby soustava rovnic $3x + 2y = 15$, $x + 2y = m$ měla řešení x, y, která jsou a) nezáporná, b) kladná. Která řešení soustavy mají tu vlastnost, že číslo m je při uvedených podmínkách 1) co nejmenší, 2) co největší?

Řešíme-li tuto soustavu rovnic, dostaneme pro neznámé

$$x = \frac{15 - m}{2}, \quad y = \frac{3m - 15}{4}.$$

a) Mají-li být čísla x, y nezáporná, musí platit nerovnosti $\frac{15 - m}{2} \geqq 0$, $\frac{3m - 15}{4} \geqq 0$. To znamená, že číslo m musí být prvkem uzavřeného intervalu $\langle 5; 15 \rangle$.

b) Mají-li být čísla x, y kladná, musí platit ostré nerovnosti $\frac{15 - m}{2} > 0$, $\frac{3m - 15}{4} > 0$. Jejich úpravou dostaneme, že číslo m musí být prvkem otevřeného intervalu $(5; 15)$.

1. Při řešení v oboru nezáporných čísel můžeme vybrat nejmenší hodnotu $m = 5$ z intervalu $\langle 5;\ 15 \rangle$. Této hodnotě m odpovídá řešení $x = 5$, $y = 0$. Při řešení v oboru kladných čísel nemůžeme z intervalu $(5;\ 15)$ vybrat nejmenší hodnotu. I když zvolíme pro m číslo hodně blízké číslu 5, jako např. 5,000 001, pak v otevřeném intervalu $(5;\ 15)$ najdeme snadno další číslo, které je menší než 5,000 001. Nejmenší číslo v tomto otevřeném intervalu neexistuje.

2. Při řešení v oboru nezáporných čísel můžeme vybrat největší $m = 15$, jemuž odpovídá řešení $x = 0$, $y = 7{,}5$. Při řešení v oboru kladných čísel neexistuje žádná dvojice čísel x, y, pro něž by bylo m největší.

Příklad 6. Řešme nerovnici $\sqrt{x^2 + 5} < x - 3$.

Nejprve zjistíme, že početní výrazy na levé i na pravé straně nerovnice mají smysl pro libovolná reálná čísla x. Poněvadž druhá odmocnina z nezáporného čísla je nezáporné číslo, musí platit $x - 3 \geqq 0$ čili $x \geqq 3$. S touto podmínkou můžeme nerovnici umocnit a pak řešením lineární nerovnice dostaneme $x < \frac{2}{3}$. Tento neomezený interval nemá však žádný společný prvek s neomezeným intervalem $x \geqq 3$. Dané nerovnici nevyhovuje tedy žádné reálné číslo x.

Cvičení

6.1 Národní podnik musí vynakládat m Kčs na jednu výrobní jednotku ke krytí nákladů závislých na velikosti výroby (suroviny, polotovary, mzdy apod.) a mimoto s Kčs ročně na krytí stálých výdajů nezávislých na velikosti výroby. Kolik výrobků musí ročně produkovat, má-li celkový zisk podniku být z Kčs při prodejní ceně c Kčs na jednotku produkce? Proveďte diskusi řešení.

6.2 Osazenstvo dolu má vytěžit a tun uhlí denně a těží denně b tun. Tím plní plán na p procent. Když se plánovaná denní těžba i skutečná denní těžba zvýšily o d tun, změnil se tím procentový ukazatel plnění plánu na p' procent. Porovnejte rozdílem procentové ukazatele p, p' a proveďte diskusi řešení.

6.3 Řešte nerovnice:

a) $x^2 + 10x + 25 > 0$, b) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^2 \leqq 0$,
c) $(4x^2 - 4x + 1)^{-3} > 0$, d) $(4x + 3)^{-5} \leqq 0$.

6.4 Která čísla x vyhovují všem nerovnicím dané soustavy:

a) $2x + 1 < 0$, $2x + 5 > 0$, $0 < x + 2 < 3$,
b) $5x + 3 > 0$, $|x| < 0{,}5$, $|x - 1| < 0{,}6$,
c) $3 < 2x + 5 < 7$, $2x - 1 \leqq 4x + 2 \leqq 2x + 1$,
d) $\sqrt{2x - 1} < \sqrt{4x - 1}$, $0 < 3 - x < 0{,}5$.

6.5 Pro která čísla m má soustava rovnic $x - 2y + 4 = 0$, $4x + 3y + m = 0$ taková řešení, že x, y jsou čísla nezáporná. Zvolte pak největší možnou hodnotu čísla m a určete k němu příslušné řešení dané soustavy rovnic. Přitom si všimněte, že neexistuje žádné řešení soustavy, při němž by bylo číslo m nejmenší.

Nyní se naučíme řešit algebraické nerovnice tvaru

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n) \geqq 0, \quad (6.6),$$

v nichž levá strana je součinem lineárních činitelů tvaru $x - x_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Přitom se má rozhodnout, zda a pro která x platí mezi tímto součinem a číslem 0 ostrá nebo neostrá nerovnost. Při dalších úvahách budeme nejprve předpokládat, že čísla x_i jsou navzájem různá a že jejich označení bylo zvoleno tak, aby platilo $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < x_n$. Součin lineárních činitelů v nerovnici (6.6) bude rovný nule právě jen pro tato čísla $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Jejich součin bude různý od nuly jen ve vnitřních bodech intervalů, jejichž krajními body na číselné ose jsou čísla x_i. Znaménko součinu je třeba určit jen pro body zmíněných intervalů, což vás pro větší názornost i stručnost naučíme na vhodně zvolených příkladech. Přitom budeme předpokládat, že umíte rozložit kvadratický trojčlen v součin reálných lineárních činitelů, což je vždy možné, když diskriminant kvadratického trojčlenu není záporný.

Příklad 7. Řešme nerovnici

$$x(x^2 - 4)(x^2 - 4x - 5) \geqq 0.$$

Po rozkladu $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$, $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$, po dosazení do dané nerovnice a po uspořádání lineárních činitelů dostaneme

$$(x + 2)(x + 1)(x - 0)(x - 2)(x - 5) \geqq 0. \qquad (6.7)$$

Platí tedy rovnost pro body $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 5$. Vyznačte si tyto body na náčrtu číselné osy, abyste mohli dobře sledovat další výklad. Pět bodů $-2, -1, 0, 2, 5$ rozděluje číselnou osu na šest částí a naším úkolem nyní je zjistit znaménko součinu lineárních činitelů z nerovnice (6.7) pro čísla x v otevřených intervalech $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 5)$, $(5; +\infty)$. Předpokládejme nejprve, že jsme zvolili číslo x z posledního intervalu, takže platí $x + 2 > 0$, $x + 1 > 0$, $x - 0 > 0$, $x - 2 > 0$, $x - 5 > 0$. Součin všech pěti činitelů bude pro čísla x z posledního neomezeného intervalu kladný, a proto tato x jsou řešeními dané nerovnice. Zvolme nyní x z předposledního intervalu $(2; 5)$. Pro body z tohoto intervalu platí $x + 2 > 0$, $x + 1 > 0$, $x > 0$, $x - 2 > 0$, $x - 5 < 0$. Součin čtyř kladných činitelů s jedním záporným bude záporný, a proto body intervalu $(2; 5)$ nebudou dané nerovnici vyhovovat. Zvolíme-li nyní x z intervalu $(0; 2)$, budou tři činitelé kladní, dva záporní. Součin všech pěti činitelů bude kladný a všechny body intervalu $(0; 2)$ budou řešeními dané nerovnice. Tak postupujeme dále od jednoho intervalu k druhému, až dojdeme konečně do prvního neomezeného intervalu $(-\infty; -2)$. Při tomto zkoumání součinu lineárních činitelů v nerovnici (6.7) se střídaly otevřené intervaly, jejichž prvky patřily k řešení, s intervaly, jejichž prvky k řešení nepatřily. Shrneme-li výsledky zkoumání dané nerovnice v otevřených intervalech se zjištěním, že v krajních bodech intervalů platí v dané nerovnici rovnost, dostaneme tento výsledek: Nerovnice (6.7) platí právě pro všechny body z intervalů $\langle -2; -1 \rangle$, $\langle 0; 2 \rangle$, $\langle 5; +\infty)$.

Poznámka. Vyšetřování dané nerovnice jsme mohli provádět při libovolném pořadí intervalů. Výhodné je ovšem, když je probíráme v pořadí odleva doprava nebo odprava doleva.

Příklad 8. Řešme algebraickou nerovnici 6. stupně

$$(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x - 5) \leqq 0.$$

První z kvadratických trojčlenů má záporný diskriminant a nelze jej rozložit na součin reálných lineárních činitelů. Poněvadž pro něj platí $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 > 0$ pro libovolné x, můžeme kladným číslem, které tento trojčlen představuje, krátit a po rozkladu zbývajících kvadratických trojčlenů dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$(x - 2)^2 (x + 1)(x - 5) \leqq 0 .$$

Rovnost bude platit v této nerovnosti pro čísla $x = 2$, $x = -1$ a pro $x = 5$. Čtverec prvního dvojčlenu má mimo výjimečný bod $x = 2$ stále kladnou hodnotu, takže tímto čtvercem můžeme krátit a hledat nyní jen řešení ostré nerovnice (kvadratické)

$$(x + 1)(x - 5) < 0 ,$$

kterou vyšetříme podle vzoru z předcházející úlohy pro hodnoty x ve třech otevřených intervalech $(-\infty; -1)$, $(-1; 5)$, $(5; +\infty)$. Jen v prostředním z těchto intervalů jsou lineární činitelé čísly nesouhlasnými, jejichž součin je záporný. Čísla x z tohoto intervalu dané nerovnici vyhovují. Shrneme-li výsledky našeho zkoumání, dostaneme: Dané nerovnici vyhovuje číslo $x = 2$ a všechna čísla z intervalu $\langle -1; 5 \rangle$. Tedy nerovnice je splněna právě pro všechna čísla z intervalu $\langle -1; 5 \rangle$.

Příklad 9. Řešme nerovnici

$$\frac{x - 2}{x - 3} - \frac{5}{x - 1} \leqq 1 .$$

Výrazy na levé straně nerovnosti mají smysl, jen když $x \neq 1$, $x \neq 3$. Převedeme-li všechny výrazy na zlomky se společným jmenovatelem, dostaneme po sečtení a po zkrácení nerovnici

$$\frac{x - 3{,}5}{(x - 1)(x - 3)} \geqq 0 .$$

Výraz na levé straně poslední nerovnice nabývá nulové hodnoty jen pro $x = 3{,}5$. Poněvadž případ, kdy nastává v této nerovnici rovnost, jsme již vyšetřili, můžeme vyšetřovat již jen ostrou nerovnici

$$(x - 1)^{-1} (x - 3)^{-1} (x - 3{,}5) > 0,$$

která je však (za předpokladu $x \neq 1$, $x \neq 3$) ekvivalentní s nerovnicí

$$(x - 1) (x - 3) (x - 3{,}5) > 0.$$

Tato nerovnice je splněna pro x z intervalů $(1; 3)$, $(3{,}5; +\infty)$.

Shrnutí. Dané nerovnici vyhovují právě všechna x z intervalů $(1; 3)$, $\langle 3{,}5; +\infty)$.

Příklad 10. Řešme nerovnici

$$(x + 2)^3 (x + 1)^{-1} (x - 1)^{-2} (x - 3)^5 (x - 5)^4 \leqq 0.$$

Výraz na levé straně má smysl, jen když $x \neq -1$, $x \neq 1$. Rovnost nastane pro $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Po vyšetření případů, kdy nastává rovnost, můžeme vyšetřovat ostrou nerovnici, kterou z nerovnice dostaneme vynecháním znaménka $=$. Přitom vynecháme lineární dvojčleny se sudými exponenty, neboť představují kladná čísla v intervalech, které budeme vyšetřovat, a všechny dvojčleny s lichými exponenty nahradíme dvojčleny s exponentem 1, takže dostaneme nerovnici

$$(x + 2) (x + 1) (x - 3) < 0.$$

Tato nerovnice má řešení, a to čísla x z intervalů $(-\infty; -2)$, $(-1; 3)$.

Shrnutí. Dané nerovnici vyhovuje číslo 5 a všechna čísla z intervalů $(-\infty; -2\rangle$, $(-1; 3\rangle$.

Nerovnice, které se dají převést na tvar

$$k_1|x - x_1| + k_2|x - x_2| + k_3|x - x_3| + \ldots + \\ + k_n|x - x_n| \leqq k_0x + q,$$

řešíme tak, že je vyšetřujeme v intervalech, jejichž krajními body jsou čísla $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$, přesněji v intervalech $(-\infty; x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle x_2, x_3\rangle$, $\ldots$, $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$, $\langle x_n, +\infty)$.

Příklad 11. Řešme nerovnici

$$|x| - |x - 2| + |x - 5| \leqq 4.$$

Dělicí body $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5$ jsou krajními body intervalů $(-\infty; 0)$, $\langle 0; 2)$, $\langle 2; 5)$, $\langle 5; +\infty)$. V každém z těchto intervalů se dá daná nerovnice nahradit jednodušší nerovnicí, která již neobsahuje absolutní hodnoty. Má-li v takovém intervalu zjednodušená nerovnice řešení, je toto řešení současně i řešením nerovnice původní. Pořadí, v němž bereme jednotlivé intervaly, nemá na řešení vliv, zachování určitého systému je však vhodné, neboť to zmenšuje nebezpečí vzniku chyb. Berme tedy intervaly např. v pořadí zprava doleva.

a) Zkoumání v intervalu $\langle 5; +\infty)$. Když $x \geqq 5$, pak platí $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$, $|x - 5| = x - 5$. Po dosazení do dané nerovnice dostaneme

$$x - (x - 2) + (x - 5) \leqq 4.$$

Po úpravě dostaneme $x \leqq 7$. Ve zkoumaném intervalu popisuje množinu řešení vztah $5 \leqq x \leqq 7$.

b) Zkoumání v intervalu $\langle 2; 5)$. V tomto intervalu je již $x - 5 \leqq 0$, zatímco ostatní výrazy, a to x, $x - 2$, zůstávají ještě nezáporné. Proto platí v tomto intervalu $|x| = x$, $|x - 2| = x - 2$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Po dosazení do dané nerovnice a po krátké úpravě dostaneme $x \geqq 3$. Ve zkoumaném intervalu má tedy daná nerovnice řešení $3 \leqq x \leqq 5$.

c) Zkoumání v intervalu $\langle 0; 2 \rangle$. V tomto intervalu platí $|x| = x$, $|x - 2| = -(x - 2)$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme $x \leqq 1$. V tomto intervalu má tedy daná nerovnice řešení $0 \leqq x \leqq 1$.

d) Zkoumání v intervalu $(-\infty; 0\rangle$. V tomto intervalu platí $|x| = -x$, $|x - 2| = -(x - 2)$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Po dosazení a úpravě dostaneme $x \geqq -1$. V tomto intervalu má tedy daná nerovnice řešení $-1 \leqq x \leqq 0$.

Shrnutí. Daná nerovnice má za řešení právě všechna x z intervalů $\langle -1; 1 \rangle$, $\langle 3; 7 \rangle$.

Příklad 12. Řešme nerovnici

$$|4(x^2 + 2x)| < 3$$

a rozhodněme pak, zda existuje nějaké okolí bodu 0, jehož prvky vyhovují dané nerovnici.

Přepíšeme-li nerovnost podle věty $\mathbf{A}_3$ na tvar $-3 < 4(x^2 + 2x) < 3$, zjistíme, že je třeba nalézt všechna čísla x, která vyhovují současně dvěma kvadratickým nerovnostem:

$$1. \quad 4x^2 + 8x + 3 > 0, \qquad 2. \quad 4x^2 + 8x - 3 < 0.$$

Násobíme-li tyto nerovnosti kladným číslem 1/4 a provedeme-li rozklad kvadratických trojčlenů na součin lineárních kořenových činitelů, dostaneme místo nich ekvivalentní nerovnice:

$$1. \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0,$$

$$2.\left(x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)\left(x + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}\right) < 0.$$

Kvadratické nerovnice tohoto typu, v nichž levou stranu tvoří součin dvou lineárních činitelů $(x - x_1)(x - x_2)$, můžeme podle vzoru předcházejících úvah tohoto článku rozřešit zkoumáním znamení hodnot tohoto součinu v intervalech $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), $(x_2, +\infty)$. Snadno se ukáže, že kvadratický trojčlen $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ je kladný v prvním i třetím z těchto intervalů a záporný v druhém z nich. Je účelné pamatovat si tento výsledek pro rychlé řešení kvadratických nerovnic; k zapamatování vám bude jistě napomáhat poznatek, že graf funkce $y = x^2 + px + q$, která v bodech x_1, x_2 nabývá nulových hodnot, leží v (neomezeném) prvním i třetím intervalu nad osou x a v druhém intervalu (x_1, x_2) pod osou x (načrtněte si příslušný graf, jímž je parabola protínající osu x v bodech x_1, x_2). Tak zjistíme, že výše uvedeným nerovnicím vyhovují čísla x v intervalech

$$1.\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right),$$

$$2.\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}; -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right).$$

Dále zjistíme, že oběma nerovnicím vyhovují čísla x z intervalů

$$\left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{7}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right).$$

Na dodatkovou otázku dané úlohy můžeme nyní odpovědět, že okolí bodu 0 vyhovující dané podmínce existuje a je částí druhého z těchto intervalů. Jeho částmi jsou např. intervaly (—0,3; +0,3) nebo (—0,25; +0,25) apod.

Poznámka. Při studiu matematické analýzy se setkáte s řešením úloh typu, který byl v tomto příkladě naznačen. Zpravidla však stačí nalézt odpověď na otázku toho druhu, která byla uvedena jako dodatková otázka v naší úloze. Ukážeme, že řešení lze pak nalézt rychle užitím vět $\mathbf{K}_4$ a $\mathbf{A}_4$. Budeme-li předpokládat pro řešení naší úlohy $|x| < 1$, pak platí $|x^2| \leqq |x|$. Za tohoto předpokladu lze však danou nerovnici upravit tak, že existence řešení se snadno prokáže. Podle věty $\mathbf{A}_4$ můžete psát

$$|4x^2 + 8x| \leqq |4x^2| + |8x| = 4|x^2| + 8|x| \leqq$$

$$\leqq 4|x| + 8|x| = 12|x|.$$

Odtud plyne: je-li $|x| < \frac{1}{4}$, tj. $-0,25 < x < 0,25$, potom je $12|x| < 3$ a původní nerovnost je splněna. Tento příklad ukazuje též užitečnost věty $\mathbf{A}_4$ která se často nazývá *trojúhelníková nerovnost*.

Cvičení

6.6 Řešte soustavy nerovnic:

a) $x^2 - x - 2 \leqq 0$, $\quad 4x^2 - 12x + 5 \leqq 0$;

b) $x^2 + x - 2 > 0$, $\quad x^2 - 2x - 3 < 0$;

c) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 - 4) < 0$, $(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x + 1) > 0$;

d) $|x^2 - 3x| < 2$;

e) $|6x^2 - 5x| < 6$.

6.7 Řešte nerovnice:

a) $\dfrac{2x - 5}{3 - 2x} \geqq 2$; b) $\dfrac{x - 2}{2x + 3} \leqq 0$;

c) $\dfrac{x + 3}{x - 3} + \dfrac{x + 4}{x - 4} \geqq 2$;

d) $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{x^2 - x + 2} < 0$;

e) $\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leqq 2$; f) $\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| \geqq 1$.