

O nerovnostech a nerovnicích

Kapitola 4. Množiny bodů v přímce; intervaly

In: František Veselý (author); Jan Vyšín (other); Jiří Veselý (other):
O nerovnostech a nerovnicích. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982.
pp. 23–26.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404006>

Terms of use:

© Marie Veselá, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

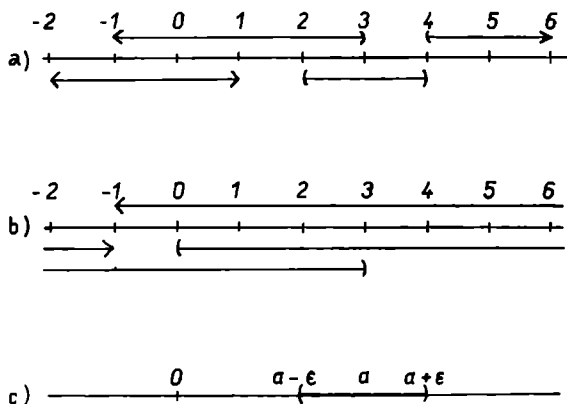
MNOŽINY BODŮ V PŘÍMCE INTERVALY

Názvem *číselná množina* budeme v této knížce označovat jen takové množiny, jejichž prvky jsou reálná čísla. Z těchto číselných množin užíváme v matematice zejména často takových, jimž na číselné ose odpovídají úsečky nebo polopřímky a celá číselná osa. Nazývají se *intervaly* a v tomto článku pojednáme o nich podle jednotlivých druhů.

Nechť jsou dána dvě čísla a, b , pro něž platí $a < b$. Pak množina všech reálných čísel, pro která platí $x \geq a, x \leq b$, což zapisujeme stručněji $a \leq x \leq b$, se nazývá *uzavřený interval*. Pro takovou množinu budeme užívat též zápisu $\langle a, b \rangle$. Obrazem této množiny bodů na číselné ose je úsečka s krajními body, které odpovídají číslům a, b . Číselnou množinu, pro kterou platí $a < x < b$, nazýváme *otevřený interval* a užíváme pro něj zápisu (a, b) . Obrazem této množiny na číselné ose jsou vnitřní body úsečky s krajními body a, b . Liší se tedy $\langle a, b \rangle$ a (a, b) tím, že krajní body intervalu v prvním případě k intervalu patří a v druhém případě nepatří. Symboly $\langle a, b \rangle$ a (a, b) znamenají intervaly (*polouzavřené*), k nimž jeden krajní bod intervalu patří a druhý nepatří.

Při řešení úloh na operace s intervaly si pomáháme někdy tím, že je znázorňujeme buď na číselné ose s vyznačením krajních bodů úhlovými nebo okrouhlými závkami, nebo při vyznačování většího počtu intervalů pomocnými úsečkami, které rýsuje rovnoběžně s čí-

selnou osou a blízko ní. Příklady jsou naryšovány v obr. 1a, kde jsou vyznačeny tyto intervaly: $I_1 = (-2; 1)$, $I_2 = (2; 4)$, $I_3 = (-1; 3)$, $I_4 = (4; 6)$. Na obr. 1c je vyznačen též otevřený interval $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, který je množinou všech takových bodů z okolí bodu a , že jejich vzdálenost od bodu a je menší než dané kladné číslo ϵ . Matematikové nazývají takový interval *epsilon-ovým okolím* bodu a .



Obr. 1

V matematice užíváme též intervalů *neomezených*. Jsou to číselné množiny, popsané jednou z nerovností tvaru $x \leq c$, $x \geq c$, $x < c$, $x > c$, v nichž c je dané číslo. Jim na číselné ose odpovídají polopřímky s krajním bodem c , který k intervalu patří nebo nepatří podle toho, je-li příslušná množina popsána nerovností neostrou nebo ostrou. Chceme-li pro označování neomezených intervalů užít obdobného způsobu jako při intervalech omeze-

ných, užijeme symbolů $-\infty$, $+\infty$, které čteme „minus nekonečno“ a „plus nekonečno“ a které používáme k vyznačení, že interval není zleva nebo zprava omezen. Výše uvedené intervaly označujeme takto: $(-\infty, c)$, $(c, +\infty)$, $(-\infty, c)$, $(c, +\infty)$. Celou číselnou osu označujeme někdy jako interval $(-\infty, +\infty)$. Pomocné značky $-\infty$, $+\infty$ jsme tu zavedli jen k úspornému označování neomezených intervalů. Na obr. 1b jsou vyznačeny tyto neomezené intervaly: $I_5 = (-\infty; -1)$, $I_6 = (-1; +\infty)$, $I_7 = (-\infty; 3)$, $I_8 = (0; +\infty)$.

Poněvadž intervaly jsou množiny, můžeme tvořit jejich sjednocení nebo průniky, jak to bylo vysvětleno v předchozím článku. Ukážeme to na několika příkladech s výše uvedenými intervaly.

Příklad 1. Sjednocením intervalů I_1 a I_3 je interval $\langle -2; 3 \rangle$, jejich průnikem $\langle -1; 1 \rangle$. Sjednocením intervalů I_2 a I_3 je interval $\langle -1; 4 \rangle$, jejich průnikem $(2; 3)$. Sjednocením intervalů I_5 a I_7 je interval I_7 , jejich průnikem je I_5 . Sjednocením intervalů I_7 a I_8 je interval $(-\infty, +\infty)$, jejich průnikem je $(0; 3)$. Sjednocením intervalů I_1 a I_6 je interval $\langle -2; +\infty \rangle$, jejich průnikem je $\langle -1; 1 \rangle$.

Příklad 2. Sjednocením intervalů I_1 a I_2 je množina právě všech prvků z I_1 a I_2 , avšak nelze ji zapsat jako interval; jejich průnikem je prázdná množina, neboť tyto intervaly nemají žádný společný prvek. Sjednocením intervalů I_5 a I_6 je interval $(-\infty, +\infty)$, jejich průnikem je množina mající jen jeden prvek, totiž číslo 1. Sjednocením tří intervalů I_1 , I_2 , I_3 je interval $\langle -2; 4 \rangle$, jejich průnikem je \emptyset .

V závěru tohoto článku vás upozorníme na některé zajímavé vlastnosti intervalů a jim odpovídajících geo-

metrických útvarů na číselné ose, tj. přímky, polopřímky a úsečky.

1. Geometrický útvar se nazývá *konvexní*, jestliže pro každé dva jeho body X, Y platí, že všechny body úsečky XY jsou body tohoto útvaru. Je zřejmé, že přímka, polopřímka i úsečka jsou konvexní útvary. Pro konvexní útvary platí věta, že jejich průnik je opět konvexní útvar. Můžete si to ověřit na úsečce, která je průnikem dvou polopřímek.

2. Jestliže k intervalu patří levý krajní bod, existuje v něm číslo nejmenší, a jestliže k němu patří pravý krajní bod, existuje v něm číslo největší. V uzavřeném intervalu existuje nejmenší i největší číslo, v otevřeném intervalu neexistuje ani nejmenší, ani největší číslo.

Cvičení

4.1 Určete sjednocení a průniky dvojic neomezených intervalů v těchto případech: a) $(-\infty; 2)$, $(-\infty; 4)$, b) $(1; +\infty)$, $(5; +\infty)$, c) $(-\infty; 3)$, $(-3; +\infty)$, d) $(-\infty; 2,4)$, $(2,4; +\infty)$, e) $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$.

4.2 Určete sjednocení a průniky dvojic omezených intervalů a) $(-2; 1)$, $(-1; 3)$, b) $(-2; 1)$, $(-1; 3)$, c) $(-2; 1)$, $(1; 2)$, d) $(-2; 1)$, $(1; 2)$, e) $(-2; 1)$, $(1; 4)$.

4.3 Určete sjednocení a průniky intervalů v těchto případech: a) $(-\infty; 1)$, $(-1; 3)$, b) $(-2; 1)$, $(-1; 1)$, c) $(-3; +\infty)$, $(3; 5)$.

4.4 Určete sjednocení a průniky tří daných intervalů: a) $(-\infty; 2)$, $(-2; +\infty)$, $(-1; 1)$, b) $(-2; 4)$, $(0; 5)$, $(1; 3)$.