O nerovnostech a nerovnicích

Kapitola 2. Některé poznatky z analytické geometrie (analytický popis polorovin)

In: František Veselý (author); Jan Vyšín (other); Jiří Veselý (other): O nerovnostech a nerovnicích. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1982. pp. 12–18.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404004

Kapitola 2.

NĚKTERÉ POZNATKY Z ANALYTICKÉ GEOMETRIE

(analytický popis polorovin)

Ze školy je vám známo, jak lze v rovině, v níž byla zvolena pravoúhlá souřadnicová soustava, přiřadit všem bodům $[x, y]$ dané přímky p lineární rovnici, která má obecný tvar $ax + by + c = 0$. V tomto článku chceme ukázat, jak lze v takové rovině přiřadit všem bodům $[x, y]$ poloroviny vyťaté přímkou p lineární nerovnici $ax + by + c \geqq 0$ a všem vnitřním bodům této poloroviny nerovnici $ax + by + c > 0$. Dříve než tak učiníme, připomeneme některé základní pojmy z geometrie a pak se umluvíme na užívání některých názvů a značek. Tyto úmluvy nám umožní zestručnit další výklad.

Je-li dána přímka p a mimo ni ležící bod A, je jimi určena rovina pA. Přímka p rozděluje body této roviny na tři části:

I. Všechny takové body X roviny pA, pro které platí, že úsečka AX nemá žádný bod společný s přímkou p; nevylučujeme $X \equiv A$.

II. Všechny body přímky p.

III. Všechny takové body X roviny pA, pro které platí, že úsečka AX má vnitřní bod společný s přímkou p.

Souhrn všech bodů, které leží v částech I a II, nazveme *polorovinou*, určenou přímkou p a bodem A, a označíme ji $\varrho(p, A)$. Souhrn všech bodů, které leží v částech II a III, nazveme *polorovinou opačnou* k $\varrho(p, A)$. Polorovina $\varrho(p, A)$ a polorovina k ní opačná mají společné právě všechny body přímky p, kterou nazýváme *hraniční přímka* obou polorovin. Body části I nazveme vnitřními body $\varrho(p, A)$ a body části III vnitřními body poloroviny opačné k $\varrho(p, A)$.

V rovině, v níž byla zvolena kartézská (pravoúhlá) souřadnicová soustava, si můžeme označování obou polorovin vyťatých přímkou p ještě více zjednodušit. Za předpokladu, že souřadnicová soustava s počátkem O a jednotkovými body J_1 na první souřadnicové ose[4]) a J_2 na druhé byla zvolena tak, že osa x je vodorovná, osa y svislá, bod J_1 leží vpravo od bodu O a bod J_2 nad bodem O, můžeme rozlišení polorovin vyťatých přímkou p charakterizovat zhruba takto: a) Je-li přímka p různoběžná s osou y, pak dolní polorovinu označíme $\varrho(p)$ a horní $\bar{\varrho}(p)$. b) Je-li přímka p rovnoběžná s osou y, označíme levou polorovinu $\varrho(p)$ a pravou $\bar{\varrho}(p)$. Pro praktickou potřebu řešení úloh v této knížce by snad stačila tato úmluva, která se odvolává na smyslový názor při volbě zvláštní souřadnicové soustavy. Ukážeme však, že můžeme zavést označení $\varrho(p)$ a $\bar{\varrho}(p)$ bez odvolání na názor takto:

1. Prochází-li přímka p_0 počátkem a je různá od osy y, pak označíme $\bar{\varrho}(p_0)$ polorovinu $\varrho(p_0, J_2)$ a $\varrho(p_0)$ polorovinu opačnou. Jestliže je p přímka rovnoběžná s přímkou p_0 a protíná-li osu y v bodě Q, pak označíme $\varrho(p)$ a $\bar{\varrho}(p)$ ty poloroviny, které dostaneme posunutím $\varrho(p_0)$ a $\bar{\varrho}(p_0)$, při němž počátek O přejde do bodu Q.

2. Jestliže p_0 splývá s osou y, pak označíme $\bar{\varrho}(p_0)$ polorovinu $\varrho(p_0, J_1)$ a $\varrho(p_0)$ polorovinu opačnou. Jestliže je p přímka rovnoběžná s přímkou p_0 a protíná-li osu x v bodě P, pak označíme $\varrho(p)$ a $\bar{\varrho}(p)$ ty poloroviny, které dostaneme posunutím $\varrho(p_0)$ a $\bar{\varrho}(p_0)$, při němž počátek O přejde do bodu P.

---

[4]) $J_1 \equiv [1; 0]$ $J_2 \equiv [0; 1]$

Nechť je dána přímka p (různoběžná s osou y) rovnicí ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$. Zvolme nyní libovolně mimo přímku p bod $M \equiv [x, y]$, tj. vnitřní bod roviny $\varrho(p)$ nebo $\bar{\varrho}(p)$. (Udělejte si náčrtek.) Bod P přímky p, který má s bodem M stejnou souřadnici x, je bod $[x, kx + q]$. Pro souřadnici y bodu M platí:

$$
\begin{aligned}
y &> kx + q, \text{ je-li } M \text{ vnitřním bodem poloroviny } \bar{\varrho}(p),\\
y &< kx + q, \text{ je-li } M \text{ vnitřním bodem poloroviny } \varrho(p).
\end{aligned}
$$

Poněvadž k polorovinám $\bar{\varrho}(p)$ i $\varrho(p)$ počítáme též body hraniční přímky $y = kx + q$, dostáváme pro body obou polorovin tyto nerovnice:

$$
\begin{aligned}
y &\geqq kx + q \text{ pro body z poloroviny } \bar{\varrho}(p),\\
y &\leqq kx + q \text{ pro body z poloroviny } \varrho(p).
\end{aligned}
$$

Znásobíme-li druhou z těchto nerovnic číslem -1 a v obou převedeme všechny členy na levou stranu, dostaneme

$$
\begin{aligned}
-kx + y - q &\geqq 0 \text{ pro body z poloroviny } \bar{\varrho}(p),\\
kx - y + q &\geqq 0 \text{ pro body z poloroviny } \varrho(p).
\end{aligned}
$$

Jsou to nerovnice souhlasné ($\geqq$) a jejich platnost pro obě poloroviny se snadno mnemotechnicky zapamatuje: je-li koeficient při y rovný číslu $+1$, jde o polorovinu $\bar{\varrho}(p)$ (horní), je-li -1, jde o polorovinu $\varrho(p)$ (dolní). Na jeden z těchto tvarů lze převést každou nerovnici tvaru

$$ax + by + c \geqq 0, \tag{2.1}$$

v níž je $b \neq 0$, jestliže ji dělíme kladným číslem $|b|$. Podíl $\dfrac{b}{|b|} = \pm 1$ podle toho, je-li $b > 0$ nebo $b < 0$. Dělení však není nutno provádět, neboť stačí, když určíme znamení čísla b.

Je-li p přímka jdoucí bodem $[r; 0]$ rovnoběžná s osou y, snadno zjistíme, že platí $x \geqq r$ pro body z $\bar{\varrho}(p)$ a $x \leqq r$ čili $-x \geqq -r$ pro body z $\varrho(p)$. Na tento tvar můžeme však snadno převést nerovnici $ax + c \geqq 0$, jestliže absolutní člen c převedeme na pravou stranu a pak celou nerovnici dělíme kladným číslem $|a|$.

Shrnutím těchto výsledků můžeme stanovit pravidlo pro určení polorovin popsaných nerovnicí tvaru (2.1) takto:

1. Je-li $b \neq 0$, pak při $b < 0$ vyhovují nerovnici body z $\varrho(p)$ a při $b > 0$ body z $\bar{\varrho}(p)$.

2. Je-li $b = 0$, pak při $a < 0$ vyhovují nerovnici body z $\varrho(p)$ a při $a > 0$ body z $\bar{\varrho}(p)$.

Bylo by ovšem možné odvodit i jiná pravidla pro rozhodování o tom, kterou polorovinu nerovnice (2.1) popisuje. Nebudeme je odvozovat, poněvadž pro řešení úloh obsažených v dalších článcích této knížky vystačíme s tímto pravidlem. Dobře si však zapamatujeme, že hraniční přímkou poloroviny, kterou popisuje nerovnice (2.1), je přímka o rovnici $ax + by + c = 0$ a že vnitřní body příslušných polorovin jsou popsány nerovnicemi, v nichž zaměníme např. značku $\geqq$ značkou $>$.

Příklad 1. Rozhodněme, které body vyhovují nerovnici $3x + 2y - 15 < 0$, a také o tom, zda jí vyhovují body $A \equiv [0; 0]$, $B \equiv [4; 1]$, $C \equiv [2; 6]$, $D \equiv [-1; 9]$.

Tato nerovnice platí pro vnitřní body poloroviny vyťaté přímkou r, která má rovnici $3x + 2y - 15 = 0$. Abychom danou nerovnici převedli na nerovnici se znaménkem $>$, znásobíme ji číslem -1 a podle záporného koeficientu při y v nerovnici $-3x - 2y + 15 > 0$ rozhodneme, že jde o dolní polorovinu $\varrho(r)$. Dosadíme-li třebas do původní nerovnice souřadnice bodu A, obdržíme $-15 < 0$; je tedy bod A vnitřním bodem poloroviny $\varrho(r)$. Podobně to zjistíme i o bodu B. Při dosazení souřadnic bodu C do původní nerovnice dostaneme $3 < 0$, což neplatí; bod C leží v $\bar{\varrho}(r)$. Dosadíme-li do původní nerovnice souřadnice bodu D, dostaneme $0 < 0$, což neplatí. Bod D není vnitřním bodem $\varrho(r)$, leží však zřejmě na hraniční přímce r, jejíž rovnici vyhovuje.

Příklad 2. Rozhodněme, zda přímka s daná rovnicí $x - 2y + 4 = 0$ protíná strany trojúhelníka o vrcholech $A \equiv [-3; 1]$, $B \equiv [4; -1]$, $C \equiv [2; 3]$.

Po dosazení souřadnic vrcholů A, B, C daného trojúhelníka ABC do levé strany rovnice přímky s dostaneme výsledky -1, 10, 0. Bod C leží tedy na přímce s, která protíná stranu AB daného trojúhelníka ABC, poněvadž body A, B leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou s.

Příklad 3. Najděme nerovnici popisující polorovinu $\varrho(p, M)$, je-li hraniční přímka p určena body $[0; 1]$, $[5; 5]$ a bod $M \equiv [9; 8]$.

Ze známého vzorce $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ najdeme $k = \dfrac{5 - 1}{5 - 0} = \dfrac{4}{5}$ a dosazením souřadnic bodu $[0; 1]$ do rovnice $y = \dfrac{4}{5}x + q$ vypočteme q. Po úpravě má rovnice přímky p tvar $4x - 5y + 5 = 0$. Dosadíme-li do levé strany této rovnice souřadnice bodu M, dostaneme jako hodnotu výrazu $4x - 5y + 5$ číslo 1. Pro bod M platí tedy nerovnost $4x - 5y + 5 > 0$. Podle známého pravidla můžeme určit $\varrho(p) \equiv \varrho(p, M)$. Leží tedy bod M pod přímkou p.

Uvědomte si, že jsme zjišťovali některé vztahy mezi geometrickými prvky jen početními metodami. Při studiu těchto příkladů i při řešení úloh v následujících cvičeních rýsujte příslušné obrazce, abyste se přesvědčili o významu početních metod pro geometrii; jindy zase geometrie vydatně pomáhá početní technice. Poloroviny, které jsou popsány danými nebo nalezenými nerovnicemi, si vyznačte nějakou značkou nebo šrafováním.

Tento článek zakončíme tím, že bez důkazu uvedeme vzorec pro výpočet vzdálenosti v daného bodu $[x_0, y_0]$ od přímky dané rovnicí $ax + by + c = 0$. Platí pro ni

$$v = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Příklad 4. Vypočtěme vzdálenosti v_1, v_2 bodů $M_1 \equiv$ $\equiv [1; 0]$, $M_2 \equiv [-5; -4]$ od přímky p dané rovnicí

$$12x - 5y + 14 = 0.$$

Snadno provedeme výpočet

$$v_1 = \frac{|12.1 - 5.0 + 14|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|26|}{13} = 2,$$

$$v_2 = \frac{|12(-5) - 5(-4) + 14|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|-26|}{13} = 2.$$

Oba body M_1, M_2 mají od přímky p stejnou vzdálenost $v_1 = v_2 = 2$. Přitom snadno zjistíme, že body M_1, M_2 leží v opačných polorovinách vyťatých přímkou p.

Cvičení

2.1 Rozhodněte, zda body $A \equiv [2; 4]$, $B \equiv [6; 2]$, $C \equiv$ $\equiv [8; 3]$ leží v polorovině dané nerovnicí

a) $x - 2y - 2 \geqq 0$,
b) $3x + 2y - 21 \geqq 0$,
c) $x \geqq 7$.

2.2 Rozhodněte, zda trojúhelník o vrcholech $A \equiv [-2; -1]$, $B \equiv [4; 2]$, $C \equiv [2; 3]$ má společné body s přímkou, která je dána rovnicí a) $3x - 4y + 4 = 0$, b) $x + y = 0$, c) $2x - y - 6 = 0$.

2.3 Narýsujte hraniční přímky polorovin, které jsou popsány nerovnicemi $3x + y \geqq 0$, $x - y \leqq 0$, $y \geqq 3$, a šrafováním vyznačte část roviny, v níž leží body společné všem daným polorovinám.

2.4 S použitím náčrtu charakterizujte body, jejichž souřadnice vyhovují současně třem daným ostrým nerovnicím $x + y > 0$, $x - y < 0$, $x - 3y + 8 > 0$.