VÝSLEDKY CVIČENÍ

Kapitola 1 A

1. Konstrukce podle definice 1.
2. Konstrukce podle definice 2.
3. Sestrojte nejdříve kružnici opsanou.
4. Pól Q leží na přímce RU a současně na tečně vedené ke kružnici opsané $\triangle RUT$ v jeho vrcholu T.
5. Je-li $p \parallel AB$ přímka obsahující střední příčku $\triangle ABC$, potom
   a) $P = (CC_1 \cap p)$, když CC_1 půlí menší oblouk $\widehat{AB}$,
   b) $Q = (CC_2 \cap p)$, když CC_2 půlí větší oblouk $\widehat{AB}$.
6. Je celkem šest možností, a to:
   p podle $P : ABCA_1B_1$, ABA_1CB_1, ABA_1B_1C,
   q podle $Q : ABCB_2A_2$, ABB_2CA_2, ABB_2A_2C.
7. Důkaz sporem: Nechť například $P \notin AB$, ale $P \in A_1B_1$. Potom je $A_1 \equiv B \wedge B_1 \equiv A$, takže je $P \in AB$, což je v rozporu s předpokladem a předpoklad je nesprávný.
8. Především je $E \equiv F_1 \wedge F \equiv E_1$ a dále $\sphericalangle GG_1E = \sphericalangle GFE$.
9. Především je $A \equiv B_2 \wedge B \equiv A_2$, dále $\sphericalangle AC_2B = \sphericalangle ACB$.
10. Jsou-li dva podobné trojúhelníky vepsány do společné kružnice opsané, jsou shodné.
11. Rozdíl je v tom, že v úloze 10 jsou udána pořadí vrcholů. Zde může být $\triangle ABC \sim \triangle A_1C_1B_1$ nebo $\triangle ABC \sim \sim B_1C_1A_1$ a podobně, avšak i tyto trojúhelníky jsou shodné. Přesto je výrok pravdivý, protože je vynechána podmínka o velikosti poměru podobnosti.
12. Protože je i $\triangle KLM$ rovnoramenný se základnou KL, musí být $M \equiv M_2$ a bod Q je nevlastní bod roviny.
13. Společným bodem přímek AA_1, BB_1 a CC_1 je pól P sestrojený podle věty 4.
14. Obdoba úlohy 13, řeší se podle věty 5.
15. Postup podle vět 4 a 5, $\alpha' = \beta' = \gamma' = 60°$.
16. Postup podle věty 5. 3 řešení.
17. $\sphericalangle APC = \sphericalangle APB = 100°$. Platí $\triangle ABC \cong \triangle A_1C_1B_1$.

18. Sestrojte oblouky $o_1 \equiv \widehat{BPC}$ s obvodovým úhlem 100° a oblouk $o_2 \equiv \widehat{APC}$ s obvodovým úhlem 155°. Hledanou množinou bodů je oblouk mezi pólem $P = (o_1 \cap o_2)$ a bodem B. Body B a P však do této množiny nepatří.
19. Podobně jako v úloze 18. Zde pro $A_2B_2 \geqq 6{,}5$ je $\gamma' > \gamma$. Je-li $\gamma' = \gamma$, leží pól Q na přímce AB. Hledanou množinou bodů je část oblouku $\widehat{AQC}$ ležící v polorovině $\overrightarrow{ABC}$. Pól Q do této množiny patří, bod C nikoliv.
20. Řešení podle věty 4, avšak pozor, $\sphericalangle H + \sphericalangle H_1 = 220°$, což je více než 180°, a proto pól P leží vně $\triangle UHF$; $\sphericalangle FUH = 35°$.
21. Zde opět $\sphericalangle M + \sphericalangle M_1 > 180°$. Pól P leží na oblouku $\widehat{KZ}$ s obvodovým úhlem $\sphericalangle KPZ = 120°$ a na kružnici opsané kolem středu O poloměrem velikosti $\frac{r}{2}$. Dvě řešení, souměrná podle osy úsečky KZ.
22. Čtyři řešení:

a) $A \equiv B_1 \wedge B \equiv A_1$, C_1 středem menšího oblouku $\widehat{AB}$, jedno řešení,

b) $A \equiv B_2 \wedge B \equiv A_2$, C_2 středem většího oblouku AB, jedno řešení,
nebo $B_2C_2 = A_2B_2$, $A_2C_2 = A_2B_2$, dvě řešení.

23. Pro pól Q je úloha totožná s úlohou 22, protože je-li $A_2B_2 = AB$, je také $\gamma = \gamma'$, takže $\gamma - \gamma' = 0$ a pól Q leží na přímce AB. Pro pól P bude $A_1B_1 = AB$, když A_1B_1 bude opět základnou, nebo $A_1B_1 = AB \wedge B_1C_1 = AB \vee A_1C_1 = AB$. Celkem tedy šest řešení.
24. Nejdříve doplňte postupný poměr $3 : 4 : \sqrt{9 + 16} = 3 : 4 : 5$, takže velikosti stran $\triangle KLM$ jsou 4,2; 5,6 a 7. Je-li úhel při vrcholu K pravý, jsou dvě řešení, pro další dva vrcholy opět po dvou řešeních, celkem šest řešení.
25. $\alpha = \gamma'$; úhel β sestrojte jako obvodový k tětivě $AC = 5$ cm a dále pak podle věty 5.
26. Je-li $K_1L_1 \parallel KL$ a současně $L_1M_1 \parallel LM$, leží pól P na osách stran KL a LM. Jde tedy o střed kružnice opsané.
27. Určete nejdříve velikost strany E_1G_1 pomocí obvodového úhlu $\sphericalangle E_1F_1G_1 = \sphericalangle EFG$, takže $E_1G_1 = EG$. Potom umístěte $E_1G_1 \perp EF$ do kružnice opsané. Jsou možná právě dvě umístění a každé dává dvě řešení.
28. Strana B_2C_2 je průměrem opsané kružnice, $B_2C_2 \parallel AB$.

29. Zjistěte velikosti úhlů, potom podle vět 4 a 5.
30. Postup podle věty 4.
31. Probíhá-li pól P oblouk kružnice nad tětivou AB tak, že $\sphericalangle APB = \gamma + \gamma'$, potom jsou velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku APB_1 po řadě γ; $180° - (\gamma + \gamma')$; γ', takže bod C_1 probíhá oblouk kružnice opsané mezi body A a B tak, že $\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle B_1AA_1 \equiv \sphericalangle B_1AP = \gamma'$.
Obdobně i důkaz věty obrácené k větě 5.
32. a) Pól P uvnitř $\triangle ABC$.
b) Pól P leží na straně BC.
c) Pól P leží v polorovině opačné k $\overrightarrow{BCA}$.
33. $Q \in \overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{ACB} \cap \overrightarrow{ABC}^*$.
$Q \in \overrightarrow{BCA}^* \cap \overrightarrow{ACB}^* \cap \overrightarrow{ABC}$.
34. Přímku $p \perp KL$ je možno umístit dvěma způsoby, odtud dvě řešení. V obou případech jde o relaci p nebo q podle pólu dané přímky p vzhledem ke kružnici $\triangle KLM$ opsané.
35. Úlohu lze řešit užitím podobnosti. Jednodušší se však zdá toto řešení: Označme průměr zvolené kružnice AB. Na polokružnici nad průměrem AB určete body D, E, F takové, že $AD : DE = 3 : 5$ a $EF : FB = 1 : 1$. Přímky AF a BD se protnou v bodě P a přímka EP protne zvolenou kružnici v bodě C a to je třetí vrchol hledaného trojúhelníku.
36. $BC_1 : AC_1 = 7 : 3$.

Kapitola 1 B

1. a) Přímka $h \equiv OQ$ je osou souměrnosti úseček A_2B_2 a A_1B_1; $B = (k \cap \overleftrightarrow{QB_2})$; $P = (\overleftrightarrow{BB_1} \cap h)$.
b) $C_1 \equiv C_2$ je samodružný bod, proto $C = (k \cap \overleftrightarrow{QO})$.
2. $h \perp OQ$ je osa souměrnosti. $M_1M_2 \perp h$; $M = (\overleftrightarrow{QM_2} \cap k)$. Dvě řešení, protože KM_1 lze nanést na k dvěma způsoby.
3. Postup podle návodu.
4. Podle věty 11 je $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ souměrně sdružena s $\overleftrightarrow{A_2B_2}$ podle osy OQ a současně je $A_2B_2 \equiv BA$. Proto A_1B_1 i A_2B_2 procházejí bodem Q.
5. Obdoba úlohy 4.

6. Užijte souměrnosti $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ podle h.
7. Osa souměrnosti úsečky K_1K_2 obsahuje póly P, Q. Čtyři řešení.
8. Kolem středu O opište kružnici k poloměrem OA. $A_2 = (\overleftrightarrow{AQ} \cap k)$, A_1 souměrně sdruženo s A_2 podle OQ a potom $P = (AA_1 \cap OQ)$. Nutnou podmínkou je $OQ \not\equiv OA$, protože kdyby body O, A, Q ležely v přímce, byla by úloha neurčitá s nekonečným počtem řešení.
9. Opište kružnici k kolem středu O poloměrem OR. Potom $R_1 = (\overleftrightarrow{RP} \cap k)$, R_2 souměrně sdružen podle osy OP s R_1 a $Q = (\overleftrightarrow{AA_2} \cap \overleftrightarrow{OP})$. Nutná podmínka: $OP \not\equiv OR$.
10. Bod souměrně sdružený s bodem A podle osy PQ označte A'. Potom přímky $\overleftrightarrow{A'Q}$ a $\overleftrightarrow{AP}$ se protnou v bodě A_1 a kružnice opsaná $\triangle AA'A_1$ je kružnicí opsanou $\triangle ABC$. Přímky $\overleftrightarrow{A'Q}$ a $\overleftrightarrow{AP}$ se musí protnout v polorovině $\overrightarrow{PQA'}$ a odtud plyne nutná podmínka:

   $2. \sphericalangle PQA + \sphericalangle PAQ < 180°$. Potom má úloha právě jedno řešení.
11. Obdoba úlohy 10. Pokládejte body L, M za sdružené póly!
12. Osa úsečky E_1E_2 je $h \equiv PQ$. Potom $P = (EE_1 \cap h)$; $Q = (EE_2 \cap h)$. Nutnou podmínkou je, aby $\triangle E_1E_2E$ nebyl pravoúhlý s pravým úhlem ve vrcholu E_1 nebo E_2.
13. Přepona $\triangle EFG$ obsahuje střed kružnice opsané. Je-li přeponou EF, jsou dvě řešení, je-li jí EG, opět dvě řešení, je-li jí FG, jedno řešení.
   Konstrukce. Trojúhelníku EF_1G_2 opište kružnici. Přímka GG_2 obsahuje pól Q, který leží na oblouku podle věty 5.
14. Hledanou množinou je kružnice opsaná nad průměrem OP, kde P je pól sdružený k pólu Q.
15. Početně podle mocnosti bodu P ke kružnici k je velikost příslušné tětivy 8. *Konstrukce*. Narýsujte tětivu velikosti 8. Kolem středu O opište kružnici, která se dotýká této tětivy, a její průsečík s tětivou AA_1 je hledaný bod P. Dvě řešení.
16. Obdoba úlohy 15, opět dvě řešení.
17. Početně: $OP . OQ = 32^2$. Konstrukce užitím Eukleidovy věty o odvěsně.
18. Narýsujte bod Q podle zadání a veďte z něho tečny k dané kružnici. Spojnice dotykových bodů určují sdružený pól P.

19. Polopřímka QP a osa úsečky KL určují střed kružnice opsané $\triangle KLM$.
20. Sestrojte vrchol A_2 podle osy PQ, potom $A = (A_1P \cap \cap A_2Q)$ a $\triangle AA_1A_2$ opište kružnici. V ní lze $\triangle ABC$ umístit jediným způsobem, označení zbývajících vrcholů B a C pak lze provést dvěma způsoby.
21. Je-li $K \equiv K_2$, je $\overleftrightarrow{QK}$ tečnou kružnice opsané $\triangle KLM$ a $KP \perp PQ$.
22. Hledané dvojice mohou tvořit trojúhelníky rovnostranné, rovnoramenné a pravoúhlé. To jsou tři možnosti. Označení vrcholů je možno provést šesti způsoby a vnitřní úhly v dvojicích trojúhelníků lze označit rovněž šesti způsoby. Celkem tedy $3 \times 6 \times 6 = 108$ řešení pro každou ze dvou možných poloh osy souměrnosti.
Jinak konstrukce jsou jednoduché podle definic 1 a 2.
23. Užijte věty 4 a 5!
24. Postup podle věty 4 a 5.
25. Do kružnice k vepište $\triangle A_1B_1C_1$ tak, aby bylo $A\bar{A} \parallel \parallel B_1C_1$, $B\bar{B} \parallel C_1A_1$, $C\bar{C} \parallel A_1B_1$.
26. Obdoba úlohy 25, pól leží vně kružnice k.
27. $\alpha = 87°40'37''$, $\beta' = 78°12'57''$, $\gamma' = 63°58'51''$, $\bar{\alpha} = 54°31'11''$, $\bar{\beta} = 22°14'07''$.
28. Vzhledem k velikosti úhlu β' je $\alpha' < 71°28'$, takže je $\bar{\gamma} > 52°08'$ a odtud $\bar{\beta} < 78°09'$, což vyhovuje.
29. Uvažte věty 4 a 5 i obr. 17. Jde o případy I nebo IV.
30. Obdoba úlohy 29.

Kapitola 2 A

1. Kolmice vedené středem opsané kružnice na strany zvoleného trojúhelníku protnou opsanou kružnici v hledaných bodech.
2. Osy stran a osy vnitřních úhlů $\triangle EFG$ se protínají ve vrcholech $\triangle E_1F_1G_1$.
3. Velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ jsou 50°, 60°, 70°, v $\triangle A_1B_1C_1$ 65°, 60°, 55°, t. j. 13 : 12 : 11.
Obecně: Je-li $\alpha : \beta : \gamma = a : b : c$, potom je $\alpha' : \beta' : \gamma' = = (b + c) : (c + a) : (a + b)$.

4. Zapište do postupného poměru velikosti vnitřních úhlů druhé složky podle věty 17 a rozšiřte dvěma.
5. $\alpha = 64°24'$, $\beta = 32°48'$, $\gamma = 82°48'$.
6. $90 + \frac{\alpha}{2}$, $90 + \frac{\beta}{2}$, $90 + \frac{\gamma}{2}$.
7. Střed kružnice vepsané leží na oblouku kružnice opsané kolem středu G_1 oblouku $\widehat{EF}$ a příslušný úsekový úhel je 110°.
8. Poloměr r a úhel α určují velikost strany BC. Dále pak jako v úloze 7. 2 řešení shodná.
9. Užijte věty 15 a sestrojte nejdříve $\triangle ABC$.
10. Vrchol M_1 je středem oblouku $\widehat{KL}$, $KL_1 = L_1M$.
11. $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ je osou úsečky AS, kde S je střed kružnice $\triangle ABC$ uvnitř vepsané, kružnice opsaná $\triangle AB_1C_1$ je současně kružnicí opsanou $\triangle ABC$.
12. Trojúhelník KLM je identický a $\triangle E_1F_1G_1$ z relace p podle S.
13. Užijte věty 25.
14. Užijte věty 24.
15. Úhly $\triangle A_2B_2C_1$ mají velikosti 20°, 30°, 130°, úhly v $\triangle ABC$ velikosti 40°, 60°, 80° s poměrem 2 : 3 : 4.
16. Například pro $\alpha = \beta \wedge \alpha \neq \gamma$ je:
podle S_a: $90° + \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$; podle S_b: $\frac{\alpha}{2}, 90° + \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$;
podle S_c: $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, 90° + \frac{\gamma}{2}$.
Má-li tedy být $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$, připadá v úvahu právě pól S_c.
17. Postačující podmínkou je $AA_1 > A_1B$, neboť bod S vždy odděluje body A a A_1. Opište nejdříve kružnici $\triangle AA_1B$. Potom bod C_1 půlí menší oblouk $\widehat{AB}$ a $A_1S = S_aA_1$.
18. Je to přímka EE_1, kde střed oblouku FG je E_1 a kružnice opsaná kolem bodu E_1 poloměrem $\overline{E_1F}$.
19. Průsečíky jsou vrcholy $\triangle H_1J_1K_1$ z dvojice $[\triangle H_1J_1K_1, \triangle HJK] \in p$ podle S.
20. Jde o důsledek věty 25. Opište kružnici $\triangle AMC$. Potom E je průsečík této kružnice s přímkou BD, $M \equiv E_1$ a $D \equiv S_e$.
21. Jde o Feuerbachovu kružnici, protože na ní leží paty výšek $\triangle EFG$.

22. Obdoba úlohy 21.
23. $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle ACB = 40°$, protože je to vnější úhel v rovnoramenném trojúhelníku BA_1S_a. Potom $\gamma' = 70°$, $\beta = 60°$, $\beta' = 60°$, $\alpha' = 50°$.
Množinou všech středů S_a je oblouk kružnice nad tětivou AB s obvodovým úhlem velikosti 20°.
24. $\sphericalangle ASB = 160°$ a odtud $\gamma = 140°$; případy b) a c) nemají řešení.
25. Daný trojúhelník: 24°, 108°, 48°; $\triangle ABC$: 48°, 36°, 96°; $\triangle A_1B_1C_1$: 66°, 72°, 42°.
26. Podmínky: $\sphericalangle AOB_1 < 90° \wedge \sphericalangle AOC_1 > 90°$, přičemž všechny tři body leží na téže polokružnici. Sestrojte nejdříve bod C_1 (B_1 půlí menší oblouk $\widehat{AC}$), potom bod B (C_1 půlí větší oblouk $\widehat{AB}$).
27. $C_1C \perp S_aS_b$, $C_1S_a = C_1S_b$, $C_1O \equiv C_2O$, $B_1A_1 \parallel S_aS_b \wedge$ $\wedge\ B_1A_1 = \frac{1}{2} S_aS_b$.
28. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ souměrný podle středu O s $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ a potom $\triangle ABC \in p$ podle průsečíku výšek $\triangle A_1B_1C_1$.
29. Na přímce B_1O leží bod $\overline{B}$, na přímce $\overline{C}O$ bod C_1, dále je $\overline{A}A \parallel B_1C_1$ atd.
30. Sestrojte nejdříve střed S_a [$C_2S_a \perp B_2A_1$; $B_2S_a \perp C_2A_1$], potom střed S atd.
31. Jde o kružnicový oblouk $\widehat{BC}$ s obvodovým úhlem velikosti $\frac{3\alpha}{2} - 90°$. Střed S_a do této množiny nepatří, protože $\sphericalangle CS_aB = 90° - \frac{\alpha}{2}$ s výjimkou: trojúhelník pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu A.

Kapitola 2 B

1. $V \equiv P$ podle definice 1, $V \equiv Q$ podle definice 2.
2. Rýsujte dvojici [$\triangle K_1L_1M_1$, $\triangle KLM$] $\in p$ podle S!
3. Jako v úloze 2.
4. Obdoba úloh 2 a 3 s tím rozdílem, že pól V leží ve vnější oblasti kružnice opsané $\triangle ABC$. Tři řešení.
5. Užijte pólu S_z. Jedno řešení.

6. Užijte vět 31 a 32!
7. První složka: 40°, 60°, 80°; druhá složka 100°, 60°, 20°, poměr velikostí 5 : 3 : 1.
8. a) Čísla u, v, t splňují trojúhelníkovou nerovnost,
   b) jedno z čísel je větší než součet zbývajících dvou,
   c) jedno z čísel se rovná právě součtu zbývajících dvou.
9. Je-li $\alpha : \beta : \gamma = u : v : t \wedge 2s = u + v + t$, potom
   a) u ostroúhlého trojúhelníku je

$$\alpha' = \frac{\pi}{s}(s - u);\ \beta' = \frac{\pi}{s}(s - v);\ \gamma' = \frac{\pi}{s}(s - t),$$

   takže $\alpha' : \beta' : \gamma' = (s - u) : (s - v) : (s - t)$,

   b) u tupoúhlého trojúhelníku:

$$\alpha' = \frac{\pi}{s}(u - s);\ \beta' = \frac{\pi v}{s};\ \gamma' = \frac{\pi t}{s},$$

   takže $\alpha' : \beta' : \gamma' = (u - s) : v : t$.

   O tom, zda je uvažovaný trojúhelník ostroúhlý či tupoúhlý, je vždy nutno předem rozhodnout podle výsledku úlohy 8.
10. Tento trojúhelník je tupoúhlý, a proto je hledaný poměr 4 : 6 : 5, čemuž odpovídají velikosti 48°, 72°, 60°.
11. Úloha není jednoznačná. Nevíme, který vnitřní úhel první složky je tupý. Je-li například tupý ten, který je na prvním místě v postupném poměru $u : v : t$, potom poměr velikostí úhlů ve druhé složce je podle výsledku úlohy 9 $(u - s) : : v : t = 7 : 8 : 25$ a odtud potom jsou hledané velikosti úhlů 105°45′, 18°, 56°15′.
12. Podle věty 35 je hledaný společný bod kružnic průsečík výšek $\triangle YXZ$.
13. Hledaný bod M je průsečík výšek daného $\triangle EFG$.
14. Sestrojte bod C_1 souměrně sdružený s V podle AM. Kružnice opsaná hledanému trojúhelníku ABC prochází body A a C_1.
15. Polopřímka B_1V je osou úhlu β'. Strana AC leží na ose úsečky B_1V. Protože je $\beta' = 180° - 2\beta$, můžeme sestrojit velikost úhlu β a také strany AC. Sestrojte $\triangle ACB_1$, ve kterém známe velikost strany AC, poloměru kružnice opsané a výšky, jejíž velikost je polovina velikosti úsečky B_1V. Dvě řešení.

16. Opište kružnici poloměrem OV kolem středu O. Potom sestrojte kružnici souměrně sdruženou podle přímky AB s danou kružnicí. Průsečíky těchto dvou kružnic jsou hledané průsečíky výšek.
17. Obdoba úlohy 16, $\triangle KLM$ je tupoúhlý.
18. Sestrojte kružnice o poloměru r, které procházejí body A a V. Ty určují na dané kružnici zbývající dva vrcholy $\triangle ABC$.
19. Obdoba úlohy 18.
20. Danou úsečku c umístěte na kružnici k v libovolné poloze $A'B'$. Sestrojte kružnici souměrně sdruženou s kružnicí k podle přímky $A'B'$. Kolem středu O opište kružnici poloměrem OV. Tyto dvě kružnice se protínají v bodech V' a V'', které otočte kolem středu O do polohy V a o stejný úhel otočte i úsečku $A'B'$.
21. Obdoba úlohy 20.
22. Kolmice sestrojená bodem V na přímku h určí na dané kružnici body K a K_1. Osy úseček VK a VK_1 obsahují hledanou stranu LM. Dvě řešení.
23. $\sphericalangle KML = 60°$, $\sphericalangle KLM = 40°$.
24. $\sphericalangle E_2F_2G_2 = 110°$. Sestrojte nejdříve druhou složku relace a potom teprve první.
25. Trojúhelníku ABC opište kružnici a sestrojte $A_1B_1C_1$ z relace p podle S. Potom $KL \parallel B_1C_1$ prochází bodem A, $LM \parallel A_1C_1$ prochází bodem B a $KM \parallel A_1B_1$ prochází bodem C.
26. Strana BC je kolmá na přímku AA_1. Bod A_1 musíme zvolit na větším oblouku $\widehat{AB}$.
27. Střed oblouku $\widehat{A_1B_1}$ je vrchol C; potom $B_1B \perp AC$ atd.
28. $\sphericalangle AOC = 2.48° = 96°$; bod A je střed oblouku B_1C_1, $AB \perp CC_1$. 2 řešení.
29. $C_1C \perp h$; velikost CB je známa, neboť $\sphericalangle BOC = 120°$.
30. Jde o kružnicový oblouk nad úsečkou AB při obvodovém úhlu $\sphericalangle AQB = |3\gamma - 180°|$.

Kapitola 2 C

1. Postup podle věty 37 a 13.
2. Sestrojte nejdříve dvojici $\triangle \overline{KLM}\ p\ \triangle K_1L_1M_1$ podle S a potom $\triangle K_1L_1M_1\ p\ \triangle KLM$ podle O. 4 řešení.

3. V $\triangle ABC$: 24°, 36°, 120°, v $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$: 48°, 72°, 60°; 4 : 6 : 5.
4. Obecně je například $\alpha = 90° - \frac{\bar{\alpha}}{2}$.
$\bar{\gamma} = 61°54'$; $\alpha = 71°33'$, $\beta = 49°24'$, $\gamma = 59°03'$.
5. Je-li $\alpha : \beta : \gamma = u : v : t \wedge u + v + t = 2s$, potom $\bar{\alpha} : \bar{\beta} : \bar{\gamma} = (s - u) : (s - v) : (s - t)$.
6. Viz úlohu 4.
7. Postup konstrukce: $\overleftrightarrow{AO} \equiv \overleftrightarrow{AA_1} \wedge \overleftrightarrow{C_1O} \equiv \overleftrightarrow{C_1C}$; $A_1B_1 \parallel \overline{C}C \wedge B_1O \equiv BO$ atd. Žádná dvojice na průměru!
8. Obdobně jako 7.
9. Obdobně jako 7.
10. Užijte poznámky 1 za větou 38:
$C_1C \perp \bar{A}\bar{B}$; $A_1O \equiv \bar{A}O$; $B_1O \equiv \bar{B}O$; atd.
11. Relace $p \circ \bar{p}$ podle T.
12. Relace $p \circ \bar{p}$ podle T.
13. $t_a \doteq 5{,}14$; $t_b \doteq 4{,}44$; $t_c \doteq 3{,}39$;
$\alpha = 41°24'35''$; $\beta = 55°46'16''$; $\gamma = 82°49'09''$; $B_1C_1 \doteq 5{,}11$; $AC \doteq 5{,}51$; $AB \doteq 5{,}05$; $r \doteq 6{,}05$;
$\alpha' = 57°39'30''$; $\beta' = 65°44'40''$; $\gamma' = 56°35'50''$;
$\bar{\alpha} = 80°55'55''$; $\bar{\beta} = 58°29'04''$; $\bar{\gamma} = 40°35'01''$;
$\bar{a} \doteq 5{,}97$; $\bar{b} \doteq 5{,}16$; $\bar{c} \doteq 3{,}93$;
$\bar{t}_a \doteq 3{,}48$; $\bar{t}_b \doteq 4{,}35$; $\bar{t}_c \doteq 5{,}17$.
14. Užijte věty 39. Nejdříve sestrojte dvojici trojúhelníků podobnou dvojici $\triangle ABC\ p\ \triangle A_1B_1C_1$ podle T (první složka této relace má strany velikosti daných úseček a, b, c). Tuto dvojici pak vložte do kružnice k pomocí odpovídajícího poměru podobnosti.
15. Sestrojte z daných těžnic trojúhelník. Je podobný $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $p \circ \bar{p}$ podle T.
16. Narýsujte dané tětivy do dané kružnice v libovolných polohách. Určete střed strany AB a otočte tětivu CC_1 kolem středu O tak, aby procházela středem strany AB. Tím je úloha vyřešena. Není-li tětiva CC_1 rovna průměru dané kružnice, existují dvě možné polohy přímky CC_1 a v každé z nich dvě různé polohy vrcholu C nebo C_1. Úloha má proto celkem čtyři řešení, je-li $CC_1 = 2r$, dvě řešení.
Kdyby bylo $CC_1 < AB$, padl by střed strany AB do vnitřní oblasti kružnice utvořené otáčením středu tětivy CC_1 a nebylo by možno z něho vést tečnu k této kružnici.

17. Jako věta 16. $AA_1 > \overline{BC}$.
18. Obdobná úloha je řešena v příkladu 7 v textu.
19. Uvažte například dvojici $\triangle ATC'$ a $\triangle BTC'$. Otočíme-li $\triangle BTC'$ kolem bodu C' o 180°, splynou body A a B, bod T se otočí do polohy T' tak, že $\overleftrightarrow{TT'} \equiv \overleftrightarrow{CT}$. Vzniklý trojúhelník ATT' má strany těchto velikostí:
$AT = \frac{2}{3} t_a$; $TT' = \frac{2}{3} t_c$; $TB' = \frac{2}{3} t_b$. Potom podle věty 42 je $\triangle ATT' \sim \triangle \overline{C}\overline{B}\overline{A}$, což platí o všech třech trojúhelnících utvořených podle návodu v úloze.
20. Úplná obdoba úlohy 19.
21. Postup podle příkladu 4 v textu: $\beta_1 \doteq 24°$, $\beta_2 \doteq 21°$.
22. Podle sinové věty je $\sin \bar{\alpha} : \sin \bar{\beta} : \sin \bar{\gamma} = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = t_a : t_b : t_c$.
23. Obdobně jako v úloze 22.
24. $\sin \bar{\alpha} = \sin [180° - (\alpha + \alpha')] = \sin (\alpha + \alpha')$ atd.

Kapitola 3 A

1. Užijte definice 3 a následujících vět.
2. Jako úloha 1.
3. Jako úloha 1.
4. Jako úloha 1.
5. Určete vždy nejdříve velikosti třetího úhlu a potom použijte tabulky 3 za větou 44.
a) 73°, 79°, 28°; pól P uvnitř,
b) 33°, 70°, 77°; pól $P \in \overrightarrow{ACB}^*$,
c) 56°, 31°, 93°; pól Q uvnitř $\sphericalangle BCA$,
d) 26°, 2°, 152°; pól Q uvnitř $\sphericalangle BCA$.
6. Každý ze tří hledaných trojúhelníků lze umístit, popřípadě označit šesti různými způsoby, odtud celkem 18 řešení. Umístíme-li například MNZ_0 tak, že $MN : Z_0M : NZ_0 = 3 : 4 : 6$ a obdobně pak podle věty 45 i zbývající dva trojúhelníky, potom přímky MM_0, NN_0 a ZZ_0 se protnou v pólu P.
7. Obdoba úlohy 6.
8. Postupujte podle důkazu věty 4.
9. Doplňte oba chybějící trojúhelníky z trojice příslušné k dané relaci a opište všem třem trojúhelníkům kružnice.

Ty se protnou ve vrcholech $\triangle ABC$. Potom například C_1 je průsečík přímek AA_c a BB_c.

10. Protože druhá složka z relace q podle Q je rovnoramenný trojúhelník s úhlem 120° při hlavním vrcholu, jsou všechny tři trojúhelníky z příslušné trojice rovněž rovnoramenné a lze je tudíž sestrojit. Kružnice jim opsané se zase protínají ve vrcholech hledaného trojúhelníku.

11. Osa úsečky $A\overline{A}$ se protíná s přímkou BB_1 v bodě P, který je hledaným pólem.

12. Umístěte body K a $\overline{K}$ na oblouku $\widehat{L_1M_1}$ a body L a $\overline{L}$ na oblouku $\widehat{K_1M_1}$ podle věty 13. Přímky KK_1 a LL_1 určují pól P. Strany hledané trojice trojúhelníků procházejí po dvou pólem P a jsou rovnoběžné se stranami $\triangle K_1L_1M_1$.

13. Obdoba úlohy 12, avšak rýsujeme pouze trojici $\triangle U_0VZ$, $\triangle UV_0Z$, $\triangle UVZ_0$.

14. Uvědomte si, že je $\triangle E_0FG \sim \triangle EF_0G \sim \triangle EFG_0$. Tyto trojúhelníky sestrojte. Přímky EE_0, FF_0 a FF_0 se protínají v bodě P a na opsané kružnici určují vrcholy $\triangle E_1F_1G_1$. Strany hledané trojice jsou rovnoběžné se stranami $\triangle E_1F_1G_1$ a jejich vrcholy leží na přímkách EG_1, FG_1, FE_1, GE_1, GF_1 a EF_1.

15. Nahlédněte do tabulky za větou 44. Konstrukce obdobná jako v úloze 14.

16. V kružnici opsané $\triangle A_c'B_c'P$ platí:
$\sphericalangle B_c'A_c'P = \sphericalangle B_c'B_1P \equiv \sphericalangle CB_1B = \sphericalangle CAB = \alpha$,
$\sphericalangle A_c'B_c'P = \sphericalangle A_c'A_1P \equiv \sphericalangle CA_1A = \sphericalangle CBA = \beta$.
Dva úhly jsou shodné s úhly $\triangle ABC$.

17. až 19. Obdoba úlohy 16.

20. Je-li například $\triangle A_0BC$ rovnostranný, potom podle tabulky 3 platí:
$180° - (\alpha + \alpha') = 60°$ a odtud $\alpha = 120° - \alpha'$, $\beta = 120° - \beta'$, $\gamma = 120° - \gamma'$.
Dovedeme proto sestrojit $\triangle ABC$ a umístit jej v kružnici opsané $\triangle A_1B_1C_1$ podle věty 4.

21. Podle tabulky 3 je pro pól Q uvnitř úhlu CAB:
$\alpha = \alpha' - 120° \wedge \beta = 60° + \beta' \wedge \gamma = 60° + \gamma'$.
Podmínkou tedy je $\alpha' > 120°$.
Pro Q uvnitř úhlu vrcholového k CAB dostáváme rovnice, které nelze splnit.

22. Dokažte nejdříve platnost věty obrácené k větě 45, nejlépe sporem. Hledaný bod je pól P.

23. $\alpha = 56°12'$, $\beta = 85°29'$, $\gamma = 38°19'$, $a = 4{,}8$; $c = 3{,}6$. Při konstrukci sestrojte nejdříve oba dané trojúhelníky a spojte je do relace p podle B_1 užitím věty 4. Potom body A, C, B_1 už leží na kružnici opsané $\triangle ABC$ a bod B leží na přímce B_0B_1.
24. Sestrojte trojúhelníky $\triangle ABC_0 \sim \triangle AB_0C \sim \triangle A_0BC \sim \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$
25. Uvědomte si, že například $A_0B_0 \parallel A_1B_1$; A_0 je průsečík přímek A_cB_c a A_1C atd.
26. Obdoba úlohy 25.
27. a 28. Jde pouze o zvláštní polohu pólů. Jinak konstrukce podle definic.

Kapitola 3 B

1. Základní konstrukce. Využijte věty 19.
2. Využijte věty 25.
3. Využijte věty 52.
4. Využijte věty 52.
5. Danému $\triangle ABC_0$ opište kružnici. Její střed je vrchol C_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace p podle S. Potom hledaný trojúhelník je z dvojice $\triangle ABC_0\ p\ \triangle A_cB_cS$ podle C_1.
6. Sestrojte nejdříve $\triangle ABC$; $\sphericalangle BCA = 2 . \sphericalangle BCS$, $\sphericalangle CBA = = 2 . \sphericalangle CBS$ atd.
7. Trojúhelník ABC je souměrně sdružený s $\triangle ACB_0$ podle přímky AC.
8. Sestrojte $\triangle EFG$. Střed kružnice vepsané $\triangle EFG_0$ je vrchol příslušného $\triangle E_1F_1G_1$.
9. Těžiště daného trojúhelníku KLM_0 je vrchol M_1 příslušného $\triangle K_1L_1M_1$ z relace p podle T. Pól T pak leží na kružnici opsané $\triangle KLM_0$ a na přímce M_0M_1.
10. Vrcholy $\triangle ABC$ jsou paty výšek daného trojúhelníku.
11. Danému trojúhelníku opište kružnici. Její střed je vrchol A_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace p podle S. Strana BC hledaného trojúhelníku je souměrně sdružena podle středu A_1 se stranou B_aC_a daného trojúhelníku.
12. Vrchol B_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ je středem kružnice vepsané danému trojúhelníku.
13. Střed kružnice opsané danému trojúhelníku je vrchol $G_1(G_2)$ a strana EF je souměrně sdružena se stranou E_gF_g podle středu $G_1(G_2)$.

14. Vrchol C_1 je průsečíkem výšek daného trojúhelníku.
15. Hledaný bod M je průsečíkem výšek daného trojúhelníku.
16. Hledaný společný bod kružnic l_1, l_2, l_3 je střed kružnice vepsané zvolenému trojúhelníku.
17. Obecně může každá z daných úloh mít 18 řešení, protože můžeme za pól zvolit kterýkoliv z vrcholů daného trojúhelníku, a potom další vrcholy lze označit šesti různými způsoby. Dále pak pokračujeme takto:
a) Podle úlohy 11.
b) Podle úlohy 12.
c) Podle úlohy 13 postupovat nelze, protože příslušný trojúhelník je tupoúhlý. Úloha tedy nemá řešení.
d) Podle úlohy 14.
18. Příslušné středové úhly mají velikosti 100°, 120°, 140°. Dále podle definic.
19. Příslušná dvojice je $\triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle ABC$ podle V_1, kde V_1 je průsečík výšek první složky. Proto je také přímka $C_1S \equiv \equiv C_1C$ kolmá na A_1B_1. Současně je $A_1B_1 \parallel C_aC_b$, takže C_1C je kolmá na C_aC_b. Je tedy C_aC_b tečnou kružnice l_0 v bodě S.
20. Celá konstrukce potvrzuje symetričnost složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle T. Je tedy možno zaměnit označení vrcholů trojúhelníků z uvažované dvojice.
21. $\alpha = 40°54'55''$; $\beta = 65°55'51''$; $\alpha' = 76°51'19''$; $\gamma' = 53°15'23''$; $\bar{\beta} = 64°30'51''$; $\bar{\gamma} = 53°15'23''$.
22. $\alpha = 107°24'22''$; $\beta = 30°52'38''$; $\gamma = 41°43'$.
23. Vrchol C_1 je těžištěm $\triangle ABC_0$, kružnice opsaná $\triangle ABC_1$ obsahuje vrchol C na přímce C_0C_1.
24. Vrchol C_1 je středem kružnice vepsané $\triangle ABC_0$; dále jako v předešlé úloze.
25. Vrchol C_1 je středem kružnice opsané $\triangle ABC_0$.
26. $\triangle ABC$ je souměrně sdružený s $\triangle ABC_0$ podle osy AB.
27. Platí $C_0 \equiv S$. Odtud konstrukce.
28. Obdobně jako v úloze 26.

Kapitola 4

1. a) 40°06′,
b) 6,32 cm,
c) 102°30′,
d) 3,43 cm,
e) 4,17 cm.

2. Užijte vzorců: $P = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$; $a = 2r \sin \alpha$;

v $\triangle ABC$: $P = 2r^2 \sin \alpha \sin \alpha \sin \gamma$,
v $\triangle A_2B_2C_2$ nebo $\triangle A_1B_1C_1$: $P = 2r^2 \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'$,
v $\triangle PB_aC_a$: $P = 2r_c^2 \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'$ a cyklické záměny;

v $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$: $P = 2r^2 \sin (\alpha + \alpha') \sin (\beta + \beta') \sin (\gamma + \gamma')$.

3. $A_1B_1 = 10$; $B_1C_1 = 9{,}35$; $C_1A_1 = 10{,}7$.
4. $\triangle ABC$: $P = 24{,}4\ \mathrm{cm}^2$, $\triangle A_1B_1C_1$: $P = 46{,}9\ \mathrm{cm}^2$, $P_1 = 2r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.
5. $E_1F_2 = 6{,}99$; $E_1G_2 = 9{,}45$; $P = 31{,}0$
6. Rozměry $\triangle ABC$ není nutno počítat. $r = 5{,}88$.
7. Užijte sinové věty. Přibližně 743 : 958 : 852.
8. $P' = 8P \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 144$.
9. $E_2F_2 = 88{,}6$ mm; $E_2G_2 = 74{,}3$ mm : $F_2G_2 = 114$ mm.
10. a) $\overline{\alpha} = 82°30'$; $\overline{\beta} = 60°$; $\overline{\gamma} = 37°30'$,
b) $\overline{\alpha} : \overline{\beta} : \overline{\gamma} = 11 : 8 : 5$.
11. $P = 39{,}1$.
12. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_cB_cP$; $A_1B_1 = 7{,}36$ cm, $B_1C_1 = 8{,}71$ cm, $C_1A_1 = 6{,}5$ cm.
13. $r_a = 13{,}7$; $r_b = 4{,}28$; $r_c = 6{,}81$.
14. a) $AC = 31{,}7$ cm; $A_1C_1 = 15{,}7$ cm;
b) $r_b = 6{,}15$ cm;
c) $A_bC_b = 11{,}6$ cm.
15. Výpočet v pořadí: $r_c = 3{,}76$; $AB = 2r_c \sin (\gamma + \gamma')$; $\sphericalangle BCA = 97°48'$.
16. $\alpha' = 42° \pm 30°07'$; $\beta' = 26° \pm 15°15'$; $\gamma = 112°$.
Polohy pólu Q podle tabulky 1, čtyři možnosti:

$\alpha' > \alpha$; $\beta' > \beta$; $\gamma' < \gamma$ — úhel vrcholový k ACB,
$\alpha' > \alpha$; $\beta' < \beta$; $\gamma' < \gamma$ — vnitřek $\triangle CAB$;
$\alpha' < \alpha$; $\beta' < \beta$; $\gamma' > \gamma$ — vnitřek $\triangle ACB$;
$\alpha' < \alpha$; $\beta' > \beta$; $\gamma' > \gamma$ — úhel vrcholový k CAB.

17. Užijte věty 63!
18. Podle věty 63 je postupný poměr velikostí například:
$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 1 : \sqrt{3} : 2$, takže je $r = r_a$.
19. Užijte věty 5 a kosinové věty:

$\alpha' = 74°11'$; $\beta' = 42°13'$; $\gamma' = 63°36'$.

20. $\gamma = \gamma'$, odtud $Q \in \overleftrightarrow{AB}$, $\sphericalangle BQC = \alpha' - \alpha = \beta - \beta' = 20°$. Potom $BQ = 12{,}8$ m; $CQ = 25{,}9$ m; $AQ = 34{,}9$ m.

21. Je-li $\overline{P}$ velikost obsahu $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ze složené relace $\mathbf{p} \circ \overline{\mathbf{p}}$ podle O, potom je

$$\overline{P} : P_1 : P_2 : P_3 = r^2 : r_a^2 : r_b^2 : r_c^2,$$

$$\overline{P} = 299;\ P_1 = 140;\ P_2 = 638;\ P_3 = 489.$$