Zajímavé dvojice trojúhelníků

Dodatek

In: Arnošt Niederle (author): Zajímavé dvojice trojúhelníků. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 238–253.

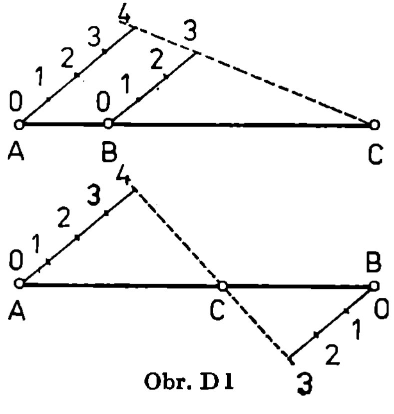
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403993

DODATEK

Výběr pojmů a vztahů z projektivní geometrie použitých v textu

Dělicí poměr. Jsou-li A, B, C tři různé body na téže přímce, potom *dělicím poměrem* nazýváme reálné číslo $\lambda = (ABC) = \frac{AC}{BC}$, které je kladné, když bod C je vnější bod úsečky AB, a záporné, když bod C je její vnitřní bod. Toto číslo je ovšem různé od nuly i od jedné.

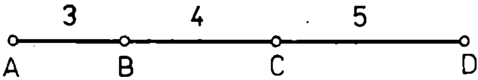
Na obr. D 1 jsou zobrazeny oba uvedené případy s náznakem konstrukce bodu C k dané úsečce AB pro dělicí poměry $\lambda_1 = \frac{4}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$.



Obr. D 1

Dvojpoměr. Jsou-li A, B, C, D čtyři navzájem různé body na téže přímce, potom *dvojpoměrem* nazýváme reálné číslo

$$\delta = (A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC\,.\,BD}{BC\,.\,AD}\,.$$



Obr. D 2

Na obr. D 2 je například $AB = 3$; $BC = 4$; $CD = 5$; je tedy:

$$\delta = (A\,B\,C\,D) = \frac{(A\,B\,C)}{(A\,B\,D)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} =$$

$$= \frac{AC\,.\,BD}{BC\,.\,AD} = \frac{7\,.\,9}{4\,.\,12} = \frac{21}{16}$$

nebo

$$(A\,C\,B\,D) = \frac{(A\,C\,B)}{(A\,C\,D)} = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} =$$

$$= \frac{3}{-4} : \frac{12}{5} = -\frac{5}{16}$$

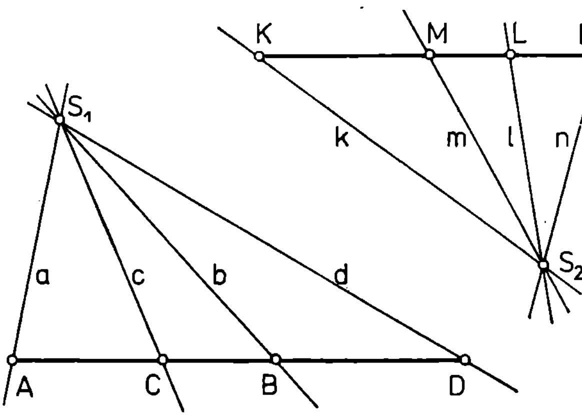
atd.

Z ukázek je zřejmé, že při číselném vyjádření dvojpoměru je nutno vzít v úvahu smysl jednotlivých úseček.

Projektivní čtveřice bodů a přímek. Jsou-li dvě čtveřice bodů na různých přímkách nebo i na téže přímce umístěny tak, že je $(A\,B\,C\,D) = (K\,L\,M\,N)$, nazýváme tyto čtveřice *projektivními*, což znamená, že jsou téhož dvojpoměru. *Projektivními* nazýváme i čtveřice přímek z daných svazků, které těmito čtveřicemi bodů procházejí.

Proto píšeme obdobně jako u projektivních čtveřic bodů rovnost:

$$(a\,b\,c\,d) = (k\,l\,m\,n).$$



Obr. D 3

Oba vztahy jsou zobrazeny na obr. D 3, kde je $AC = 40$; $CB = 30$; $BD = 50$; $KM = 45$; $ML = \frac{405}{19}$; $LN = \frac{450}{19}$.

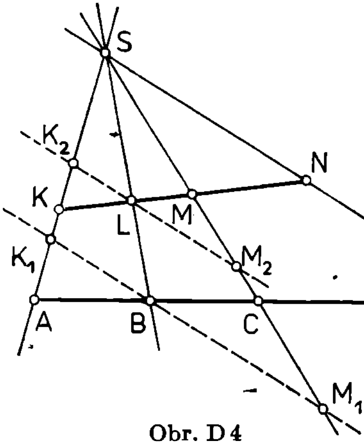
Dosadíme-li tyto velikosti, dostáváme:

$$(A\,B\,C\,D) = -\frac{5}{9}; \quad (K\,L\,M\,N) = -\frac{5}{9}.$$

Současně pak ve svazcích S_1 a S_2 platí:

$$(a\,b\,c\,d) = (k\,l\,m\,n).$$

Věta I. *Jsou-li a, b, c, d čtyři navzájem různé přímky téhož svazku, potom protínají každou příčku svazku ve čtveřici bodů téhož dvojpoměru, tj. projektivní.*



Obr. D 4

Důkaz. Na obr. D 4 vidíme čtyři přímky svazku S proťaté příčkami ve čtveřicích bodů A, B, C, D a K, L, M, N. Máme dokázat, že $(K\,L\,M\,N) = (A\,B\,C\,D)$.

Body L a B veďme rovnoběžky s přímkou SD a označme jejich průsečíky s přímkami svazku K_2, K_1, M_2, M_1, jak je patrno z obrázku.

Nyní je především

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BK_1}{DS}\,;\quad \frac{BC}{DC} = \frac{BM_1}{DS}\,;$$

a proto

$$\frac{BA}{DA} : \frac{BC}{DC} = \frac{BK_1}{DS} : \frac{BM_1}{DS} = \frac{BK_1}{BM_1}\,. \tag{1}$$

Dále pak

$$\frac{LK}{NK} = \frac{LK_2}{NS}; \quad \frac{LM}{NM} = \frac{LM_2}{NS};$$

a proto

$$\frac{LK}{NK} : \frac{LM}{NM} = \frac{LK_2}{NS} : \frac{LM_2}{NS} = \frac{LK_2}{LM_2}. \tag{2}$$

Protože je $K_1M_1 \parallel K_2M_2$, platí $\frac{BK_1}{BM_1} = \frac{LK_2}{LM_2}$, a dosadíme-li sem podle (1) a (2), bude

$$\frac{BA}{DA} : \frac{BC}{DC} = \frac{LK}{NK} : \frac{LM}{NM},$$

neboli $(A\,B\,C\,D) = (K\,L\,M\,N)$.

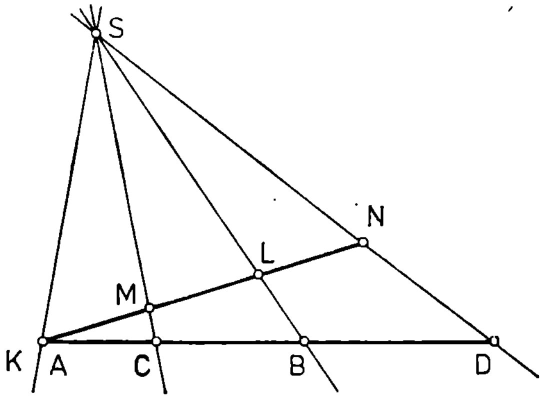
Perspektivní čtveřice bodů a přímek. Jsou-li dvě navzájem různé čtveřice bodů na dvou přímkách umístěny tak, že dvojice sobě odpovídajících bodů leží na přímkách téhož svazku, říkáme, že jsou *perspektivní*. Na obr. D 4 jsou to čtveřice $(A\,B\,C\,D)$ a $(K\,L\,M\,N)$. Z toho je zřejmé, že všechny perspektivní čtveřice bodů jsou také projektivní, jak o tom svědčí věta I, avšak ne každé dvě čtveřice projektivní jsou i perspektivní, jak ukazuje například obr. D 3.

Věta II. *Jsou-li dvě čtveřice bodů projektivní a současně mají jeden bod společný, jsou perspektivní.*

Důkaz provedeme sporem.

Na obr. D 5 je podle předpokladu $(A\,B\,C\,D) = (K\,L\,M\,N)$ a současně $K \equiv A$. Nechť přímky BL

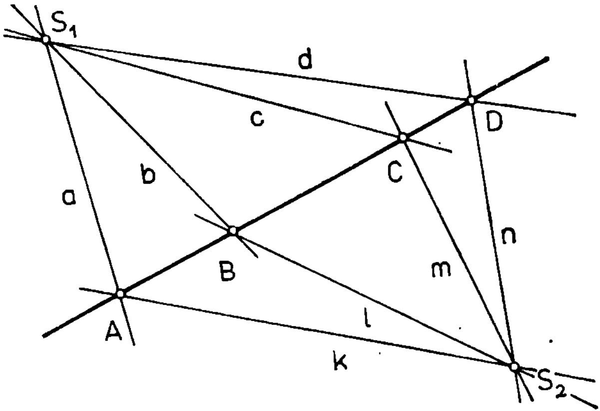
a CM nejsou rovnoběžné, takže se protnou v bodě S, a nechť přímka SD protne přímku KN v bodě N'. Předpokládejme, že body N a N' jsou různé. Potom ovšem platí podle věty I, že čtveřice $(A\ B\ C\ D) = (K\ L\ M\ N')$ jsou projektivní, takže i čtveřice $(K\ L\ M\ N)$ a $(K\ L\ M\ N')$ jsou projektivní a není možné, aby body N a N' byly různé.



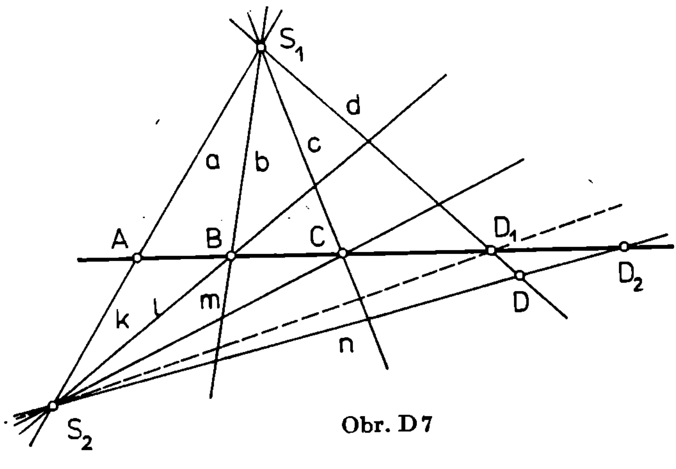
Obr. D 5

Je-li však $N \equiv N'$, potom čtveřice $(A\ B\ C\ D) = (K\ L\ M\ N)$ jsou perspektivní, neboť podle předpokladu je také $K \equiv A$.

Perspektivními pak nazýváme takové dvě čtveřice přímek ze dvou navzájem různých svazků, které promítají čtveřici bodů na téže přímce. Perspektivní jsou například čtveřice $(a\ b\ c\ d) = (k\ l\ m\ n)$ na obr. D 6, neboť obě promítají čtveřici bodů $(A\ B\ C\ D)$ a $S_1 \not\equiv S_2$.



Obr. D6

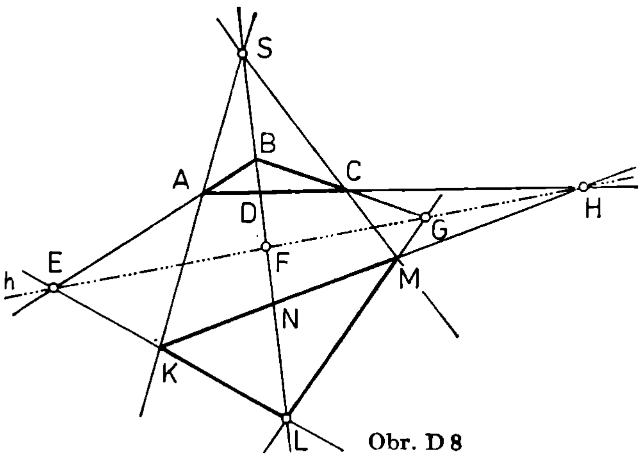


Obr. D7

Věta III. *Jsou-li dvě projektivní čtveřice přímek umístěny tak, že jedna dvojice sobě odpovídajících přímek splývá, jsou tyto čtveřice perspektivní.*

Důkaz. Na obr. D 7 jsou zobrazeny čtveřice přímek $(a\ b\ c\ d)$ a $(k\ l\ m\ n)$, o nichž předpokládáme, že jsou projektivní, a současně je $a \equiv k$. Snadno určíme body $B = (b \cap l)$, $C = (c \cap m)$ a přímku BC, na níž pak leží bod A. Předpokládejme dále ještě, že přímky d a n se protnou v nějakém bodě D, který neleží na přímce BC. Buď dále $D_1 = (d \cap \overleftrightarrow{BC})$ a $m' \equiv S_2D_1$. Podle věty I je $(A\ B\ C\ D_1) = (A\ B\ C\ D_2)$, takže body D_1 a D_2 splývají, a protože je $D \in =\overleftrightarrow{S_2D_2}$, splývají i body D a D_1. Bod D tedy nemůže ležet mimo přímku BC a uvažované čtveřice přímek jsou perspektivní, tj. odpovídající si přímky se protínají na přímce BC.

Věta IV. Věta Desarguesova o trojúhelnících. *Jsou-li*

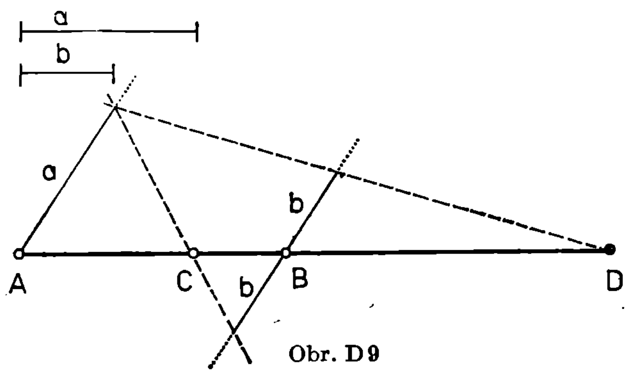


Obr. D 8

trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle KLM$ umístěny v téže rovině tak, že přímky AK, BL a CM procházejí týmž bodem S, potom se sobě odpovídající strany trojúhelníků, tj. $[AB, KL]$, $[BC, LM]$ a $[CA, MK]$ protínají v bodech téže přímky.

Důkaz. Na obr. D 8 je podle věty I $(A\ D\ C\ H) = (K\ N\ M\ H)$, a proto jsou čtveřice přímek $(\overleftrightarrow{BA}\ \overleftrightarrow{BD}\ \overleftrightarrow{BC}\ \overleftrightarrow{BH})$ a $(\overleftrightarrow{LK}\ \overleftrightarrow{LN}\ \overleftrightarrow{LM}\ \overleftrightarrow{LH})$ projektivní. Současně přímky BD a LN splývají, takže uvedené čtveřice přímek jsou perspektivní podle věty III. To znamená, že se sobě odpovídající přímky protínají v bodech E, F, G a H.

Harmonická čtveřice bodů a přímek. Leží-li body A, B, C a D na téže přímce tak, že platí $(A\ B\ C\ D) = -1$, nazýváme takovou čtveřici bodů *harmonickou*. Říkáme také, že body C a D dělí úsečku AB *harmonicky*. Konstrukci harmonické čtveřice k dané úsečce AB a dělicímu poměru $\frac{a}{b}$, kde a, b jsou velikosti daných úseček, ukazuje obr. D 9.

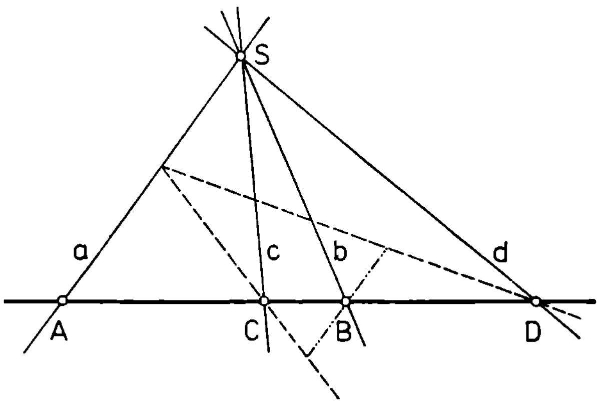


Obr. D 9

Zřejmě tu je $\frac{AC}{BC} = -\frac{a}{b} \wedge \frac{AD}{BD} = \frac{a}{b}$, takže

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{-a}{b} : \frac{a}{b} = -1.$$

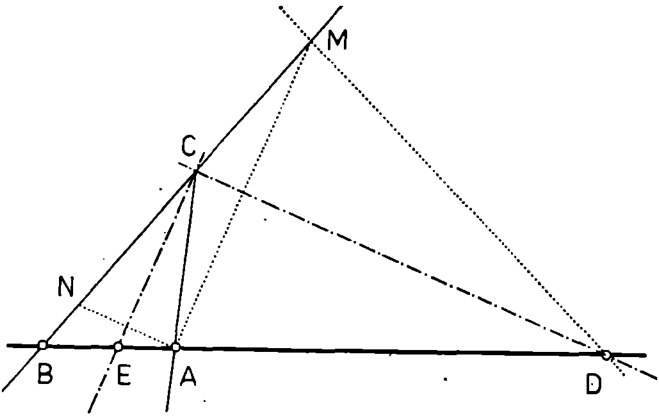
Obdobně nazýváme čtveřici přímek téhož svazku *harmonickou*, jestliže promítá harmonickou čtveřici bodů na přímce. Jinak také nazýváme takové přímky „harmonicky sdružené“. Čtveřici harmonicky sdružených přímek ukazuje obr. D 10.



Obr. D 10

Věta V. *Jsou-li polopřímky a, b ramena daného úhlu, polopřímka c jeho osou a polopřímka d osou úhlu k němu vedlejšího, potom přímky a, b, c, d tvoří harmonickou čtveřici.*

Důkaz. Na obr. D 11 jsou v trojúhelníku ABC úhly ACB a ACM úhly vedlejší. Současně je $AC = MC$ a $CE = MA$. Bod E leží na straně AB tak, že CE je osou ACB, bod D tak, že CD je osou ACM. Je-li dále



Obr. D 11

$CN = CM$, je $DC = AN$. Z těchto předpokladů pak plyne:

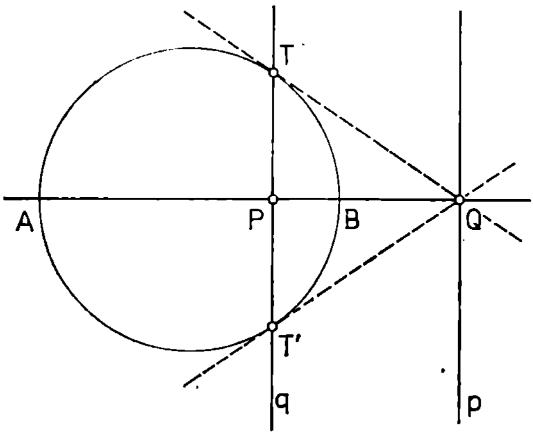
$$\frac{BE}{EA} = \frac{BC}{CM} = \frac{BC}{AC} \wedge \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{NC} =$$

$$= -\frac{BC}{CM} = -\frac{BC}{AC}.$$

Zřejmě je tedy $\dfrac{BE}{AE} = -\dfrac{BD}{AD}$ a odtud $(B\,A\,E\,D) = -1$.

Sdružené póly. V kružnici $k = (O; r)$ na obr. D 12 je AB průměr a bod Q na prodloužení průměru AB za bod B.

Tečny vedené z bodu Q ke kružnici k se této kružnice dotýkají v bodech T a T'. Označme P průsečík přímek AB a TT'. Takto sestrojenou dvojici bodů P a Q nazýváme *sdruženými póly*, přímku TT' polárou bodu Q a přímku $p \perp AB$ jdoucí bodem Q polárou bodu P vzhledem ke kružnici k.



Obr. D 12

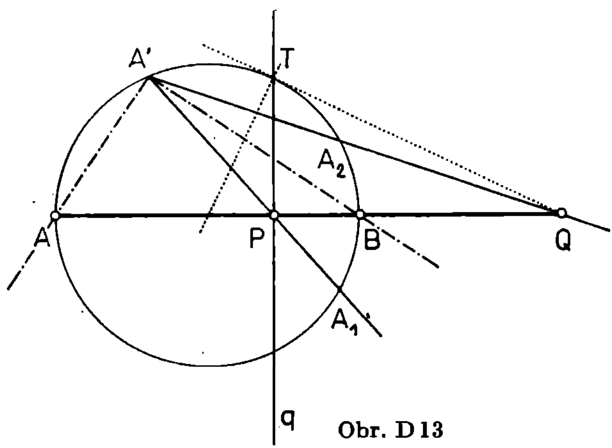
Věta VI. *Mějme kružnici $k = (O; r)$, její průměr AB a na přímce AB dvojici sdružených pólů P a Q vzhledem ke kružnici k.*

Potom je $(A\,B\,P\,Q) = -1$, tj. sdružené póly P a Q dělí průměr AB harmonicky.

Důkaz. Na obr. D 12 je $\sphericalangle QTB$ úsekový úhel příslušný k oblouku TB, takže je $\sphericalangle QTB = \sphericalangle TT'B = \sphericalangle BTT'$, čili polopřímka TB je osou $\sphericalangle QTT'$. Protože podle Thaletovy věty je $BT \perp TA$, je TA osou úhlu vedlejšího k $\sphericalangle QTT'$, takže podle věty V tvoří polopřímky TA, TP, TB a TQ harmonickou čtveřici. Odtud pak plyne přímo $(A\ B\ P\ Q) = -1$.

Věta VII. *Je-li bod Q bodem vnější oblasti kružnice $k = (O; r)$ a přímka p jeho polárou vzhledem ke kružnici k, potom tato polára je množinou bodů, které spolu s bodem Q dělí harmonicky každou přímku jdoucí bodem Q a protínající kružnici k ve dvou bodech.*

Důkaz. Na obr. D 13 je AB průměr kružnice k a P, Q sdružené póly ležící na přímce AB. Bodem Q je vedena přímka, která protíná kružnici k v bodech A', B' a poláru bodu Q v bodě P'. Podle věty VI je $(A\ B\ P\ Q) = -1$,

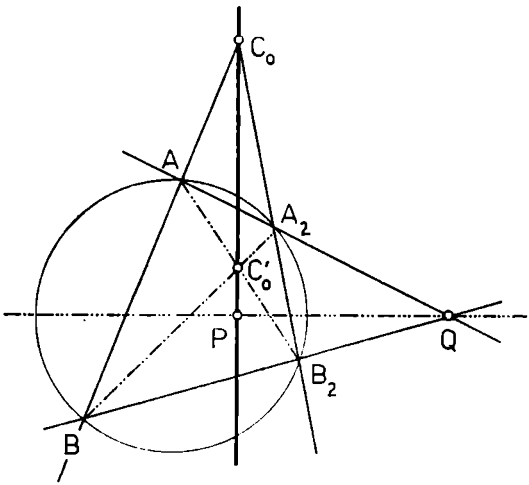


Obr. D 13

takže čtveřice polopřímek $A'A$, $A'B$, $A'P$ a $A'Q$ tvoří harmonickou čtveřici. Současně je $BA' \perp A'A$, a proto $A'B$ je osou $\sphericalangle B'A'A_1$, kde A_1 je průsečík polopřímky $A'P$ s kružnicí k. To však znamená, že oblouky $B'B$ a BA_1 jsou shodné a přímka QP je osou úhlu $B'PA_1$. Protože je $QP \perp PP'$, je PP' osou $\sphericalangle B'PA'$ vedlejšího k $\sphericalangle B'PA_1$. Proto také polopřímky PQ, PB', PP' a PA' tvoří harmonickou čtveřici a je $(A\ B\ P\ Q) = (A'\ B'\ P'\ Q) = -1$.

Z věty VII vyplývá konstrukce poláry, při níž není nutno rýsovat tečny z pólu Q ke kružnici k. Postup je zřejmý z obr. D 14.

Daným pólem Q vedeme sečny kružnice k, které tuto kružnici protnou například v bodech A, A_2, B a B_2. Prů-

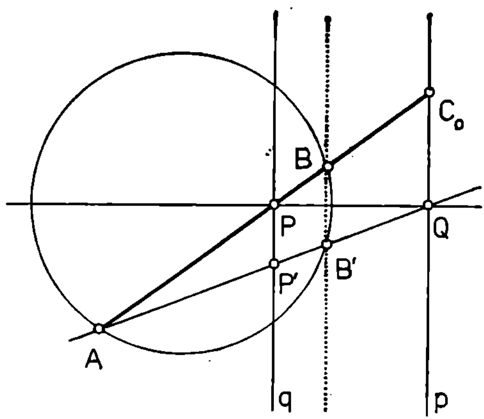


Obr. D 14

sečík přímek AB a A_2B_2 buď C_0, přímek AB_2 a BA_2 buď C_0'. Přímka C_0C_0' je již hledanou polárou. Stačí ovšem najít jenom jeden z bodů C_0 nebo C_0', protože, jak víme, je $C_0C_0' \perp PQ$.

Správnost této konstrukce snadno dokážeme. Je-li totiž podle věty VII $(A\ A_2\ A_1\ Q) = (B\ B_2 B_1\ Q) = -1$, kde A_1 a B_1 jsou průsečíky přímek AQ a BQ s polárou, jsou čtveřice bodů $(A\ A_1\ A_2\ Q)$ a $(B\ B_1\ B_2\ Q)$ projektivní se společným bodem Q, tedy perspektivní, tj. přímky AB, A_1B_1, A_2B_2 a QC_0 procházejí jedním bodem, tedy bodem C_0. Právě tak přímky AB_2, A_1B_1, BA_2 a QC_0' bodem C_0'.

Závěrem je třeba připomenout, že věta VII platí i tehdy, když zaměníme sdružené póly a poláry. Na obr. D 15 jsou P a Q sdružené póly, p, q příslušné poláry. Dále víme, že $(A\ B'\ P'\ Q) = -1$. Z předcházejícího důkazu



Obr. D 15

pak vyplývá, že přímky p, BB' a q jsou navzájem rovnoběžné, takže je

$$(A\ B\ P\ C_0) = (A\ B'\ P'\ Q),$$

čili: Každá přímka vedená bodem ležícím na poláře q a procházející sdruženým pólem P je průsečíky s kružnicí k, pólem P a bodem na poláře C_0 dělena harmonicky.