Zajímavé dvojice trojúhelníků

Kapitola 4. Některé metrické vztahy

In: Arnošt Niederle (author): Zajímavé dvojice trojúhelníků. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 213–237.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403992

KAPITOLA 4

NĚKTERÉ METRICKÉ VZTAHY

V předcházejících třech kapitolách jsme se převážně zabývali především vztahy polohovými. Vztahy metrické jsme zatím brali v úvahu v souvislosti s velikostmi úhlů a v několika málo dalších případech. Proto v této závěrečné kapitole obrátíme svou pozornost k velikostem stran uvažovaných dvojic a trojic trojúhelníků a k velikostem poloměrů kružnic jim opsaných.

Pro zjednodušení textu budeme i zde používat dříve zavedených symbolů ve stejném významu. Především budeme velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ značit po řadě α, β, γ a velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ po řadě α', β', γ'. Stejného značení pak užijeme i v trojúhelnících jim podobných. Nebudeme ani zdůvodňovat obecně platné vztahy, například:

Leží-li pól P uvnitř $\triangle ABC$, potom je podle sinové věty

$$BC : CA : AB = \sin\alpha; \sin\beta : \sin\gamma,$$

$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma',$$

$$\overline{B}\overline{C} : \overline{A}\overline{C} : \overline{A}\overline{B} = \sin(\alpha + \alpha') : \sin(\beta + \beta') :$$
$$: \sin(\gamma + \gamma').$$

Odtud pak plyne z podobnosti například:

$$B_aC_a : C_aP : PB_a = \sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma'$$

nebo

$$BC : CA_0 : A_0B = \sin(\alpha + \alpha') : \sin(\beta + \beta') : \\ : \sin(\gamma + \gamma').$$

Samozřejmě vezmeme v úvahu rozdíly, které se tu mohou objevit, když bude například podle věty 4 $(\alpha + \alpha') > 180°$, nebo $\gamma - \gamma' < 0°$, kde potom příslušné hodnoty sinu budou záporné. Na tyto případy upozorňuje tabulka 3 za větou 44, které v těchto případech opět s výhodou využijeme.

Vedle důsledků věty sinové uvedeme bez důkazu ještě vztah mezi velikostí strany, poloměru kružnice opsané a sinu protilehlého úhlu. Například

$$\begin{aligned} AB &= 2r \sin\gamma = 2r_c \sin(\gamma + \gamma'), \\ A_1B_1 &= 2r \sin\gamma', \\ A_2B_2 &= 2r \sin\gamma', \\ A_cB_0 &= 2r_c \sin\gamma' \end{aligned}$$

a podobně.

Nebudeme se zabývat vztahy mezi velikostmi stran a úhlů v trojúhelnících $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle ABC_0$, a to proto, že v úlohách bychom těchto vztahů příliš nevyužili. Na druhé straně je podle potřeby velmi snadno odvodíme ze vztahů, které dále probereme podrobněji.

Věta 57. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* P *nebo* $[ABC\triangle, \triangle A_2B_2C_2] \in \mathbf{q}$ *podle* Q, *potom o velikostech stran a úhlů v uvažovaných trojúhelnících platí:*

$$\begin{aligned} A_1B_1 : AB &= \sin\gamma' : \sin\gamma, & A_2B_2 : AB &= \sin\gamma' : \sin\gamma, \\ B_1C_1 : BC &= \sin\alpha' : \sin\alpha, & B_2C_2 : BC &= \sin\alpha' : \sin\alpha, \\ C_1A_1 : CA &= \sin\beta' : \sin\beta, & C_2A_2 : CA &= \sin\beta' : \sin\beta. \end{aligned}$$

Důkaz. Uvedli jsme, že je $AB = 2r \sin \gamma$ a také $A_1B_1 = 2r \sin \gamma'$ nebo $A_2B_2 = 2r \sin \gamma'$,
a proto

$$A_1B_1 : AB = 2r \sin \gamma' : 2r \sin \gamma = \sin \gamma' : \sin \gamma,$$

$$A_2B_2 : AB = 2r \sin \gamma' : 2r \sin \gamma = \sin \gamma' : \sin \gamma.$$

Dále už jde jenom o cyklické záměny.

Zajímavé jsou důsledky této věty v případech, kdy dvojice trojúhelníků jsou utvořeny podle pólů ve zvláštních polohách.

Věta 58. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *kde* S *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané, potom je:*

a) $A_1B_1 : AB = 1 : 2 \sin \dfrac{\gamma}{2}$, b) $A_1B_1 = 2r \cos \dfrac{\gamma}{2}$,

$B_1C_1 : BC = 1 : 2 \sin \dfrac{\alpha}{2}$, $B_1C_1 = 2r \cos \dfrac{\alpha}{2}$,

$C_1A_1 : CA = 1 : 2 \sin \dfrac{\beta}{2}$, $C_1A_1 = 2r \cos \dfrac{\beta}{2}$,

c) $B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \cos \dfrac{\alpha}{2} : \cos \dfrac{\beta}{2} : \cos \dfrac{\gamma}{2}$.

Důkaz. Podle věty 17 je $\alpha' = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, $\beta' = 90° - \dfrac{\beta}{2}$, $\gamma' = 90° - \dfrac{\gamma}{2}$.

Proto je podle věty 57:

a) $A_1B_1 : AB = \sin\gamma' : \sin\gamma = \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) : \sin\gamma =$
$= \cos\frac{\gamma}{2} : 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 1 : 2\sin\frac{\gamma}{2}$ a cyklické záměny.

b) $A_1B_1 = 2r\sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = 2r\cos\frac{\gamma}{2}$ a cyklické záměny;

c) Vyplývá přímo z b).

Věta 59. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \mathbf{q}$ *podle* S_a, *kde* S_a *je střed kružnice vně vepsané* $\triangle ABC$ *proti vrcholu* A, *potom je:*

a) $A_1B_2 : AB = 1 : 2\cos\frac{\gamma}{2}$, b) $A_1B_2 = 2r\sin\frac{\gamma}{2}$,

$B_2C_2 : BC = 1 : 2\sin\frac{\alpha}{2}$, $B_2C_2 = 2r\cos\frac{\alpha}{2}$,

$C_2A_1 : CA = 1 : 2\cos\frac{\beta}{2}$, $C_2A_1 = 2r\sin\frac{\beta}{2}$,

c) $B_2C_2 : C_2A_1 : A_1B_2 = \cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}$.

Důkaz. Zde budeme dosazovat podle věty 23 a to:

$$\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2};\quad \beta' = \frac{\beta}{2};\quad \gamma' = \frac{\gamma}{2}.$$

a) $A_1B_2 : AB = \sin\gamma' : \sin\gamma = \sin\frac{\gamma}{2} : \sin\gamma =$

$= \sin\frac{\gamma}{2} : 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 1 : 2\cos\frac{\gamma}{2}$.

Obdobně je $C_2A_1 = 1 : \cos \frac{\beta}{2}$, avšak

$$B_2C_2 : BC = \sin \alpha' : \sin \alpha = \sin \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2} :$$

$$: \sin \alpha = \cos \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

b) $A_1B_2 = 2r \sin \gamma' = 2r \sin \frac{\gamma}{2}$. Obdobně je $C_2A_1 =$ $= 2r \sin \beta' = 2r \sin \frac{\beta}{2}$, avšak

$$B_2C_2 = 2r \sin \alpha' = 2r \sin \left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = 2r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Zde je ovšem třeba ještě utvořit cyklické záměny vzhledem k pólům S_b a S_c. Provedení ponechme do cvičení.

c) Toto tvrzení opět vyplývá přímo z tvrzení b).

Věta 60. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* V, *nebo dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* V, *kde* V *je průsečík výšek* $\triangle ABC$, *potom je*

a) v ostroúhlém $\triangle ABC$

$$\begin{aligned}
A_1B_1 : AB &= 2 \cos \gamma : 1, & A_1B_1 &= 2r \sin 2\gamma,\\
B_1C_1 : BC &= 2 \cos \alpha : 1, & B_1C_1 &= 2r \sin 2\alpha,\\
C_1A_1 : CA &= 2 \cos \beta : 1, & C_1A_1 &= 2r \sin 2\beta,
\end{aligned}$$
$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma,$$

b) *v tupoúhlém* $\triangle ABC$, *kde* $\alpha > 90°$,

$$\begin{aligned}
A_2B_2 : AB &= 2 \cos \gamma : 1, & A_2B_2 &= 2r \sin 2\gamma,\\
B_2C_2 : BC &= -2 \cos \alpha : 1, & B_2C_2 &= -2r \sin 2\alpha,\\
C_2A_2 : CA &= 2 \cos \beta : 1, & C_2A_2 &= 2r \sin 2\beta,
\end{aligned}$$
$$B_2C_2 : C_2A_2 : A_2B_2 = -\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

Důkaz. a) Je-li $\triangle ABC$ ostroúhlý, musíme dosadit podle věty 33 a to:

$$\alpha' = 180° - 2\alpha,\ \beta' = 180° - 2\beta,\ \gamma' = 180° - 2\gamma.$$

$$A_1B_1 : AB = \sin\gamma' : \sin\gamma = \sin(180° - 2\gamma) : \sin\gamma =$$
$$= \sin 2\gamma : \sin\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma : \sin\gamma = 2\cos\gamma : 1$$

a všechny cyklické záměny,

$$A_1B_1 = 2r\sin\gamma' = 2r\sin(180° - 2\gamma) = 2r\sin 2\gamma$$

a odtud také

$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

b) Je-li $\triangle ABC$ tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu A, je $\cos\alpha < O$ a také $\sin 2\alpha < O$. Proto se v příslušných rovnostech objevuje znaménko minus. Jinak není mezi a) a b) rozdíl.

Metrické vlastnosti dvojic typu $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \in \boldsymbol{p}$ podle středu O kružnice $\triangle ABC$ opsané nemusíme zkoumat. Podle věty 37 tu jde o souměrnost podle středu, tedy shodnost, takže zde není nic nového k objevení.

Pokud jde o relaci $\boldsymbol{p}$ podle těžiště T $\triangle ABC$, té jsme věnovali pozornost z hlediska metrických vlastností už v kapitole druhé, takže ani jí se zde nemusíme zatím věnovat.

Naopak bude účelné uvědomit si vztahy mezi velikostmi poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ a trojúhelníkům $\triangle PBC$, $\triangle APB$, $\triangle ABP$ nebo $\triangle QBC$, $\triangle AQC$, $\triangle ABQ$. K označení velikostí těchto poloměrů užijeme symbolů:

a) r pro velikost poloměru kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$,

b) r_a, r_b, r_c pro velikosti poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle PBC$, $\triangle A_0BC$, $\triangle PB_aC_a$, $\triangle APC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle A_bPC_b$, $\triangle ABP$, $\triangle ABC_0$, $\triangle A_cB_cP$,
nebo trojúhelníkům $\triangle QBC$, $\triangle A_0BC$, $\triangle QB_aC_a$, $\triangle AQC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle A_bQC_b$, $\triangle ABQ$, $\triangle ABC_0$, $\triangle A_cB_cQ$.

Věta 61. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* P *a nechť poloměry kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům* $\triangle ABC$, $\triangle PBC$, $\triangle APC$ *a* $\triangle ABP$ *mají velikosti* r, r_a, r_b *a* r_c, *potom je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : \frac{\sin \alpha}{|\sin(\alpha + \alpha')|} : \frac{\sin \beta}{|\sin(\beta + \beta')|} : \frac{\sin \gamma}{|\sin(\gamma + \gamma')|}.$$

Důkaz. V kružnici k opsané $\triangle ABC$ je například

$$BC = 2r \sin \alpha \Rightarrow r = \frac{BC}{2 \sin \alpha}, \tag{4.1}$$

v kružnici l_a opsané $\triangle PBC$ pak
$BC = 2r_a \sin(\alpha + \alpha')$ podle věty 4, takže

$$r_a = \frac{BC}{2 \sin(\alpha + \alpha')}. \tag{4.2}$$

Podle (4.1) a (4.2) je proto

$$r : r_a = \frac{BC}{2 \sin \alpha} : \frac{BC}{2 \sin(\alpha + \alpha')}$$

a po úpravě

$$r : r_a = 1 : \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

Obdobně pak je

$$r : r_b = 1 : \frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \beta')},$$

$$r : r_c = 1 : \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \gamma')}.$$

Tím je dokázána i pravdivost postupného poměru

$$r : r_a; r_b : r_c = 1 : \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} : \frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \beta')} : \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma + \gamma')}.$$

V tvrzení věty 61, jehož pravdivost jsme právě dokázali, jsou však hodnoty sinů ve jmenovatelích uvedeny v absolutní hodnotě. Není proto náš důkaz ještě úplný. Musíme zde vzít v úvahu i případ, kdy příslušný pól leží vně uvažovaného $\triangle ABC$, a proto je $(\alpha + \alpha')$ nebo $(\beta + \beta')$ či $(\gamma + \gamma')$ větší než 180°. Potom ovšem jeho sinus je záporný a museli bychom jej uvést se záporným znaménkem, aby postupný poměr měl všechny členy kladné. Je proto výhodnější do tohoto poměru uvést uvažované siny v absolutních hodnotách. To jistě můžeme, protože nám v tomto případě jde pouze o velikosti uvedených sinů.

Věta 62. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* Q *a nechť poloměry kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům* $\triangle ABC$, $\triangle QBC$, $\triangle AQC$ *a* $\triangle ABQ$ *mají velikosti* r, r_a, r_b, a r_c; *potom je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : \frac{\sin\alpha}{\sin|\alpha - \alpha'|} : \frac{\sin\beta}{\sin|\beta - \beta'|} : \frac{\sin\gamma}{\sin|\gamma - \gamma'|}.$$

Důkaz. Na rozdíl od důkazu věty 61 zde použijeme věty 5. Jinak je důkaz úplnou analogií důkazu věty 61, takže není nutno jej dopodrobna opakovat. Rozdíl je pouze v tom, že úhly $(\alpha - \alpha')$, $(\beta - \beta')$ a $(\gamma - \gamma')$ nemohou mít absolutní hodnotu nikdy větší než 180°. Mohou být ovšem záporné, a proto jsou ve jmenovatelích v tvrzení této věty uvedeny v absolutní hodnotě. Na poloze pólu Q vzhledem k vnitřním úhlům $\triangle ABC$ zde nezáleží.

Pro zvláštní polohy pólů P nebo Q dostaneme ovšem po vhodném dosazení a úpravách výrazy mnohem jednodušší.

Věta 63. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *kde* S *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané a nechť* r, r_a r_b, *a* r_c *jsou velikosti poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům* $\triangle ABC$, $\triangle SBC$, $\triangle ASC$ *a* $\triangle ABS$; *potom je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\beta}{2} : 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot$$

Důkaz. Dosaďme do výrazu z věty 61 podle věty 17 například $\sin(\alpha + \alpha') = \sin\left(\alpha + 90° - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$= \sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \frac{\alpha}{2}$. Potom ovšem bude

$$r : r_a = 1 : \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} = 1 : \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 1 : \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot$$

Stejným postupem dojdeme i k úměrám

$$r : r_b : 1 : 2 \sin \frac{\beta}{2}; \qquad r : r_c = 1 : 2 \sin \frac{\gamma}{2},$$

takže platí

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\beta}{2} : 2 \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Zbývá jenom dodat, že v tomto vztahu není nutné uvádět hodnoty sinů v absolutních hodnotách, protože střed kružnice uvnitř vepsané leží vždy uvnitř $\triangle ABC$, takže žádný z uvažovaných sinů nenabude záporné hodnoty.

Bude-li pólem některý ze středů kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných, jsou tři možnosti, například:

Věta 64. *Je-li* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *kde* S_a *je střed kružnice vně vepsané trojúhelníku* ABC *proti vrcholu* A, *je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2} : 2 \cos \frac{\beta}{2} : 2 \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Důkaz. Zde ovšem vyjdeme z tvrzení věty 62 a dosadíme podle věty 23, kde

$$\alpha' = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}; \qquad \beta' = \frac{\beta}{2}; \qquad \gamma' = \frac{\gamma}{2}.$$

Bude proto $|\alpha - \alpha'| = \left|\alpha - 90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right| = \left|\frac{\alpha}{2} - 90^\circ\right|$.

V každém případě je $\frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, a proto $\sin |\alpha - \alpha'| = \cos \frac{\alpha}{2}$.

Po dosazení a úpravě je jako v předešlé větě

$$r : r_a = 1 : 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Dále však je $|\beta - \beta'| = \left|\beta - \frac{\beta}{2}\right|$ a $|\gamma - \gamma'| = \left|\gamma - \frac{\gamma}{2}\right|$, takže musíme dosadit $\sin|\beta - \beta'| = \sin \frac{\beta}{2}$, $\sin|\gamma - \gamma'| = \sin \frac{\gamma}{2}$.

Je tedy

$$r : r_b = 1 : \frac{\sin \beta}{\sin \frac{\beta}{2}} = 1 : \frac{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = 1 : 2 \cos \frac{\beta}{2}$$

a obdobně také

$$r : r_c = 1 : \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Tím je dokázána pravdivost jedné ze tří možností. Další dvě vyjdou z cyklických záměn, a to:

Bude-li S_b střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu B pólem, bude

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \cos \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\beta}{2} : 2 \cos \frac{\gamma}{2},$$

nebo

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : 2 \cos \frac{\alpha}{2} : 2 \cos \frac{\beta}{2} : 2 \sin \frac{\gamma}{2},$$

když pólem bude S_c střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu C.

Vezmeme-li v úvahu větu 52 a obr. 106, zjistíme, že dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V a $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C] \in \boldsymbol{q}$ podle V jsou z hlediska metrických vztahů zcela nezajímavé, protože v tomto případě kružnice opsané $\triangle ABC$, $\triangle VBC$, $\triangle AVC$ a $\triangle ABV$ jsou navzájem shodné a platí $r : r_a : r_b : r_c = 1 : 1 : 1 : 1$ bez ohledu na to, jde-li o trojúhelník ostroúhlý či tupoúhlý.

Zajímavější je případ, kdy pólem je střed kružnice $\triangle ABC$ opsané.

Věta 65. *Je-li dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O, kde O je střed kružnice $\triangle ABC$ opsané, potom je*

$$r : r_a : r_b : r_c = 1 : \frac{1}{2\cos\alpha} : \frac{1}{2\cos\beta} : \frac{1}{2\cos\gamma}.$$

Důkaz. Víme, že relace $\boldsymbol{p}$ podle O je středovou souměrností, tedy shodností, a proto $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$. Potom ovšem $\alpha + \alpha' = 2\alpha$, $\beta + \beta' = 2\beta$, $\gamma + \gamma' = 2\gamma$, takže například

$$r : r_a = 1 : \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = 1 : \frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= 1 : \frac{1}{2\cos\alpha},$$

neboli

$$r : r_a : r_b : r_c = \frac{1}{2\cos\alpha} : \frac{1}{2\cos\beta} : \frac{1}{2\cos\gamma}.$$

V těchto úvahách bychom mohli ještě pokračovat tak, že bychom odvodili i vzorce pro výpočet velikostí stran trojúhelníků typu $\triangle A_0BC$ nebo $\triangle PB_aC_a$ či $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ apod. Ve třetí kapitole jsme však již ukázali, že tyto trojúhelníky jsou z dvojic navzájem podobných, takže dobře vystačíme s dosud odvozenými vzorci.

Způsob použití těchto vzorců vysvitne z následujících příkladů řešených úloh.

Příklad 1. Je dána relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P taková, že $AB = 7$ cm, $A_1B_1 = 5$ cm, $\sphericalangle ACB = \gamma = 64°$. Vypočítejte:

a) velikost poloměru kružnice opsané $\triangle ABC$,
b) velikost úhlu $\gamma' = \sphericalangle A_1C_1B_1$,
c) velikost poloměru kružnice opsané $\triangle ABP$,
d) velikost úhlu $\gamma' = \sphericalangle \overline{A}\overline{C}\overline{B} = \sphericalangle AC_0B$,
e) velikost strany A_cB_c trojúhelníku PA_cB_c příslušného k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P.

Řešení. a) Protože je $AB = 2r \sin \gamma$, je

$$r = \frac{AB}{2 \sin \gamma} = \frac{7}{2.0{,}89\,789} \doteq 3{,}89 \text{ cm}.$$

b) Podle věty 57 je $A_1B_1 : AB = \sin \gamma' : \sin \gamma$, odkud

$$\sin \gamma' = \frac{A_1B_1 \sin \gamma}{AB} = \frac{5.0{,}89\,879}{7} = 0{,}64190.$$

Tomu vyhovují dva úhly a to: $\gamma' \doteq 39°56'$ nebo: $\gamma' \doteq 140°04'$ (přesněji $39°56'26''$, $140°03'34''$).

c) Zde musíme rozlišovat dvě možnosti:

I. Je-li $\gamma' = 39°56'$, je $\gamma + \gamma' = 103°56'$, takže $\gamma + \gamma' < 180°$ a pól P leží uvnitř $\triangle ABC$. V tom případě je podle věty 61

$$r_c = \frac{r \sin \gamma}{\sin (\gamma + \gamma)} \doteq \frac{3{,}89.\sin 64°}{\sin 103°56'} = \frac{3{,}89.0{,}89\,879}{0{,}97\,058}$$

$$r_c \doteq 3{,}60\ [\text{cm}].$$

II. Je-li $\gamma' = 140°04'$, je $\gamma + \gamma' = 204°04'$, takže $\gamma + \gamma' > 180°$ a pól P leží vně $\triangle ABC$. V tomto případě je proto

$$r_c = -\frac{r \sin \gamma}{\sin (\gamma + \gamma')} \doteq \frac{3{,}89 \,.\, 0{,}89\,879}{0{,}40\,780} \doteq 8{,}58 \text{ [cm]}.$$

d) V tomto případě stačí nahlédnout do tabulky 3, abychom zjistili, že

I. $\bar{\gamma} = 180° - (\gamma + \gamma') = 180° - (64° + 39°56') = 75°04'$, což je současně i velikost $\sphericalangle AC_0B$.

II. $\bar{\gamma} = (\gamma + \gamma') - 180° = (64° + 140°04') - 180° = 24°04'$, což i zde je velikost $\sphericalangle AC_0B$.

e) V obou případech užijeme vzorce

$$A_cB_c = 2r \sin \gamma'.$$

I. $A_cB_c \doteq 2 \,.\, 3{,}60 \,.\, 0{,}64\,190 \doteq 4{,}62$ [cm]

II. $A_cB_c \doteq 2 \,.\, 8{,}58 \,.\, 0{,}64\,190 \doteq 11{,}01$ [cm]

Příklad 2. Do kružnice k o poloměru $r = 3{,}8$ cm vepište trojúhelník, jehož strany mají velikosti v poměru $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$, kde $\alpha + \beta + \gamma = 90°$ jsou poloviční velikosti vnitřních úhlů daného $\triangle KLM$ [$KL = 6$ cm, $LM = 7$ cm, $MK = 8$ cm].

Rozbor. Podle věty 58 je hledaný trojúhelník druhou složkou v relaci $\triangle ABC\ \mathbf{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle S za předpokladu, že 2α, 2β a 2γ jsou velikosti vnitřních úhlů

$$\triangle KLM \sim \triangle ABC \vee \triangle KML \sim \triangle ABC \vee \triangle LKM \sim$$
$$\sim \triangle ABC \vee \triangle LMK \sim \triangle ABC \vee \triangle MKL \sim$$
$$\sim \triangle ABC \vee \triangle MLK \sim \triangle ABC.$$

Konstrukce. Sestrojíme $\triangle KLM$ a jemu podobný $\triangle ABC$ tak, aby poloměr kružnice jemu opsané měl danou velikost 3,8 cm. Potom narýsujeme $\triangle A_1B_1C_1$ z relace **p** podle S, který již má požadované vlastnosti.

Důkaz správnosti konstrukce je dán větou 58.

Diskuse. Jak již bylo v rozboru naznačeno, lze dvojici $\triangle ABC$ a $\triangle KLM$ navzájem přiřadit šesti různými způsoby. Odtud plyne, že úloha má šest řešení.

Příklad 3. Je dán $\triangle ABC$, jehož obsah má velikost $P = 256\ \mathrm{m}^2$ a dva vnitřní úhly velikosti $\alpha = 42°$, $\beta = 58°$. Vypočítejte velikost obsahu P_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ podle S. Úlohu řešte nejdříve obecně, potom teprve dosaďte podle zadání.

Řešení. Především zjistíme velikost úhlu $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 80°$.

Obsahy P a P_1 vyjádříme takto:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \qquad P_1 = \frac{1}{2}a_1b_1\sin\gamma', \tag{4.3}$$

kde a, b, a_1 a b_1 jsou velikosti stran uvažovaných trojúhelníků.

Podle věty 58 je $B_1C_1 : BC = 1 : 2\sin\frac{\alpha}{2}$ a odtud

$$B_1C_1 = \frac{BC}{2\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{4.4}$$

Obdobně pak

$$A_1C_1 = \frac{AC}{2\sin\frac{\beta}{2}}. \tag{4.5}$$

Současně je podle věty 17

$$\gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2}. \tag{4.6}$$

Hodnoty (4.4), (4.5) a (4.6) dosaďme do (4.3):

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{BC.AC}{2\sin\frac{\alpha}{2}.2\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Protože však velikosti stran BC a AC neznáme, musíme se snažit je ze vztahu vyloučit vhodným dosazením. K tomu nám dopomůže tato úprava výrazu $\sin\left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$. Víme, že $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, odkud $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\gamma}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$.

Můžeme proto psát

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{BC.AC.\sin\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}\, 2\sin\frac{\beta}{2}\, 2\sin\frac{\gamma}{2}},$$

a protože $\frac{1}{2} BC.AC.\sin\gamma = P$, bude konečně

$$P_1 = \frac{P}{8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Tím je úloha obecně vyřešena. Dosadíme-li podle zadání, bude

$$P_1 = \frac{256}{8.0{,}35\,837.0{,}48\,471.0{,}64\,279} = 286{,}5 \text{ m}^2.$$

Příklad 4. Je dán postupný poměr velikostí poloměrů kružnic opsaných dvojici $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_2C_2] \in q$ podle

S_a a k ní příslušným trojúhelníkům $\triangle S_aB_aC_a$ a $\triangle A_bS_aC_b$, a to:

$r : r_a : r_b = u : v : t$, kde u, v, t jsou čísla přirozená.

a) Dokažte, že danou složenou úměrou je jednoznačně určen i čtvrtý člen postupných poměrů na obou stranách úměry a stanovte podmínky řešitelnosti.

b) Na základě výsledku úlohy a) ukažte, že ve zvláštním případě, kdy $r = 10$ a $u : v = 3 : 2$ je daná úloha jednoznačná, právě když $u = 3$. Tento případ řešte početně!

Řešení. a) Především platí podle věty 64

$$r : r_a : r_b : r_c = \frac{1}{2} : \sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2}. \qquad (4.7)$$

Daný postupný poměr $u : v : t$ upravíme tak, aby první člen byl $\frac{1}{2}$. Proto celý poměr vydělíme číslem $2u$, o kterém ze zadání víme, že je různé od nuly. Současně doplníme čtvrté členy obou postupných poměrů v dané úměře, a to na levé straně r_c, na pravé straně x. Po těchto úpravách dostaneme:

$$r : r_a : r_b : r_c = \frac{1}{2} : \frac{v}{2u} : \frac{t}{2u} : \frac{x}{2u}. \qquad (4.8)$$

Porovnáme-li nyní pravou stranu výrazu (4.8) s pravou stranou výrazu (4.7), vidíme, že je

$$\frac{v}{2u} = \sin\frac{\alpha}{2};\quad \frac{t}{2u} = \cos\frac{\beta}{2};\quad \frac{x}{2u} = \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Tím jsou velikosti úhlů α, β, γ určeny, a to jednoznačně, protože je $\frac{\beta}{2} < 90° \wedge \frac{\gamma}{2} < 90°$ a příslušné kosiny jsou kladné a ani $\frac{\alpha}{2}$ nemůže být větší než 90°. Protože pak $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, známe i $x = 2u . \cos \frac{\gamma}{2}$.

První část důkazu je provedena.

Dále víme, že absolutní hodnoty sinu a kosinu jsou menší než 1.

Je proto:

$$\frac{v}{2u} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{v}{2u} < 1, \text{ neboli } 0 < v < 2u,$$

$$\frac{t}{2u} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{t}{2u} < 1, \text{ neboli } 0 < t < 2u. \tag{4.9}$$

Musíme ovšem vzít v úvahu i to, že $\triangle A_1B_2C_2$ je tupoúhlý, protože podle věty 23 je zde $\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}$, takže $\beta' + \gamma' < 90° \Rightarrow \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} < 90°$. To však znamená, že aspoň jeden z úhlů $\frac{\beta}{2}$ nebo $\frac{\gamma}{2}$ je menší než 45°. Můžeme předpokládat, že je to například úhel $\frac{\beta}{2}$. Potom jeho kosinus bude větší než cos 45° a platí:

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{t}{2u} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t > u\sqrt{2}.$$

Tím se interval (4.9) ještě více zúží a bude $u\sqrt{2} < t < 2u$, což je hledaná podmínka.

b) Dosadíme-li $u = 3$, je $v = 2$ a potom $3.\sqrt{2} < t < 6$, takže $t = 5$, protože podle zadání je t přirozené číslo. Dosadíme-li však $u = 6$, potom $v = 4$ a t nabude hodnot 9, 10, 11, takže úloha už není jednoznačná.

Je-li tedy $u = 3$, $v = 2$, $t = 5$, bude:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{2u} = \frac{2}{6} \doteq 0{,}33\,333 \text{ a odtud } \alpha \doteq 38°56',$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{t}{2u} = \frac{5}{6} \doteq 0{,}83\,333 \text{ a odtud } \beta \doteq 67°06',$$

$$\text{takže } \gamma \doteq 74°48'.$$

Nyní již můžeme určit i velikost čísla x, neboť $x = 2u \, . \cos \frac{\gamma}{2} = 6 \, . \cos 37°24' \doteq 4{,}77$.

Velikosti jednotlivých poloměrů dostaneme ze vztahu $r : r_a : r_b : r_c = \frac{1}{2} : \sin \frac{\alpha}{2} : \cos \frac{\beta}{2} : \cos \frac{\gamma}{2}$.

První člen postupného poměru na levé straně má být 10. Proto postupný poměr na pravé straně rozšíříme 20, takže $r : r_a : r_b : r_c = 10 : 20 \sin \frac{\alpha}{2} : 20 \cos \frac{\beta}{2} : 20 \cos \frac{\gamma}{2} = 10 : 6{,}67 : 17{,}67 : 15{,}9$, neboli $r = 10$, $r_a = 6{,}67$, $r_b = 17{,}67$, $r_c = 15{,}9$.

Příklad 5. Do kružnice $k = (O; 10)$ je vepsána dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O taková, že poloměr kružnice opsané $\triangle OBC$ má velikost $r_a = 12$, poloměr kružnice opsané $\triangle AOC$ velikost $r_b = 15$. Vypočítejte velikosti stran a vnitřních úhlů v trojúhelnících ABC a $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, kde $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ je ze složené relace $[\triangle ABC, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle O.

Řešení. Nejdříve zjistíme velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ užitím věty 65. Je-li podle této věty například

$$r : r_a = 1 : \frac{1}{2\cos\alpha}, \text{ bude } \cos\alpha = \frac{r}{2r_a}$$

$$\text{a obdobně } \cos\beta = \frac{r}{2r_b}.$$

Dosadíme-li podle zadání, bude

$$\cos\alpha = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} \Rightarrow \alpha = 65°22'32'',$$

$$\cos\beta = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = 70°31'43''.$$

Tím je dána i velikost třetího úhlu, $\gamma = 44°05'45''$.

Velikosti stran $\triangle ABC$ vypočítáme ze vzorců $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$. Příslušné hodnoty jsou:

$$a \doteq 18{,}2;\ b \doteq 18{,}6;\ c \doteq 13{,}9.$$

Známe-li velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$, známe i velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$ z relace p podle O, který je shodný s $\triangle ABC$, a tedy i velikosti vnitřních úhlů $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, protože podle věty 14 je například

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha') = 180° - (\alpha + \alpha) =$$
$$= 180° - 2\alpha = 49°14'56''.$$

Potom také

$$\beta = 180° - 2\beta = 38°56'34'',$$
$$\gamma = 180° - 2\gamma = 91°48'30''.$$

Konečně jsou velikosti stran $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$$\bar{a} = 2r \sin \bar{\alpha} \doteq 15{,}2, \; \bar{b} = 2r \sin \bar{\beta} \doteq 12{,}6,$$
$$\bar{c} = 2r \sin \bar{\gamma} \doteq 20{,}0$$

(zaokrouhleno na 3 pl. c.).

Příklad 6. Je dán $\triangle A_cB_cV$ $[A_cB_c = 6{,}4;\; B_cV = 8;\; VA_c = 4{,}8]$ příslušný k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}$ podle V. Určete přibližné velikosti stran $\triangle ABC$, jeho vnitřních úhlů a poloměru kružnice jemu opsané.

Řešení. Zde je dobře si uvědomit, že o velikostech stran daného trojúhelníku platí

$$8^2 = 6{,}4^2 + 4{,}8^2 = 40{,}96 + 23{,}04 = 64.$$

Trojúhelník A_cB_cV je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A_c. Tím je dána i velikost poloměru kružnice opsané $r = \frac{1}{2} VB_c = 4$ a velikosti sinů obou ostrých úhlů

$$\sin \gamma' = \frac{6{,}4}{8} = 0{,}8 \Rightarrow \gamma' \doteq 53°08',$$

$$\sin \beta' = \frac{4{,}8}{8} = 0{,}6 \Rightarrow \beta' \doteq 36°52'.$$

Dále již musíme rozlišovat dvě odlišné situace.

a) Bude-li $\triangle ABC$ ostroúhlý, bude se další výpočet řídit větou 33, takže

$$\alpha' = 180° - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 90° - \frac{\alpha'}{2} = 45°,$$

$$\gamma' = 180° - 2\gamma \Rightarrow \gamma = 90° - \frac{\beta'}{2} = 63°26',$$

$$\beta' = 180° - 2\beta \Rightarrow \beta = 90° - \frac{\gamma'}{2} = 71°34''.$$

Potom známe i velikosti stran $\triangle ABC$, neboť:

$$a = 2r \sin \alpha = 8 . 0{,}70\,711 \doteq 5{,}7,$$

$$b = 2r \sin \beta = 8 . 0{,}89\,411 \doteq 7{,}2,$$

$$c = 2r \sin \gamma = 8 . 0{,}58\,952 \doteq 7{,}6.$$

b) Bude-li $\triangle ABC$ tupoúhlý, musíme k výpočtu užít věty 34, a proto

$$\alpha' = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\alpha'}{2} = 45°,$$

$$\beta' = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{\beta'}{2} = 26°34',$$

$$\gamma' = 2\gamma - 180° \Rightarrow \gamma = 90° + \frac{\gamma'}{2} = 108°26'.$$

Také zde již známe velikosti stran $\triangle ABC$, neboť:

$$a = 2r \sin \alpha = 8 . 0{,}70\,711 \doteq 5{,}7,$$

$$b = 2r \sin \beta = 8 . 0{,}44\,724 \doteq 3{,}6,$$

$$c = 2r \sin \gamma = 8 . 0{,}58\,952 \doteq 7{,}6.$$

Možnosti, jak zadat úlohy určené k numerickému řešení, jsou zde velmi pestré, jak ostatně ukazují i cvičení navazující na tuto poslední kapitolu.

Cvičení

1. Je dán poloměr $r = 5{,}2$ cm kružnice opsané $\triangle ABC$, velikost jeho strany $AB = 6{,}7$ cm a velikost úhlu $\gamma' = \sphericalangle A_1C_1B_1 = 37°24'$ v $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC$ **p**

$\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ podle P. Určete velikosti dalších prvků, a to:

a) úhlu γ z $\triangle ABC$,
b) strany A_1B_1 z $\triangle A_1B_1C_1$,
c) úhlu $\bar{\gamma}$ z $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ v relaci $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ s $\triangle ABC$,
d) poloměru r_c kružnice opsané $\triangle ABP$,
e) strany A_cB_c v $\triangle A_cB_cP$ z trojice příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle P.

2. Odvoďte vzorec pro výpočet velikosti obsahu $\triangle ABC$, jsou-li dány velikosti poloměru kružnice jemu opsané a vnitřních úhlů. Tento vzorec potom upravte pro výpočet velikosti obsahů trojúhelníků $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ a trojúhelníků z trojic příslušných k těmto relacím.
3. Do kružnice $k = (O; 5{,}8)$ je vepsán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly velikosti $\alpha = 72°39'$, $\beta = 46°23'$. Určete velikosti stran $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S.
4. Určete velikosti obsahů obou složek z relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ podle S, když $AB = 9{,}4$ cm, $BC = 5{,}6$ cm, $\sphericalangle ABC = 112°$.
5. Je dán $\triangle EFG$ vepsaný do kružnice $k = (O; 7{,}2)$ s vnitřními úhly velikostí $\sphericalangle EFG = 82°$, $\sphericalangle FGE = 58°$. Určete velikosti stran E_1F_2 a E_1G_2 i úhlu $\sphericalangle F_2E_1G_2$ v trojúhelníku $E_1F_2G_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_e a jeho obsah.
6. Trojúhelník $A_1B_2C_2$ z relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle A_1B_2C_2$ podle S_a má rozměry $A_1B_2 = 4{,}6$; $B_2C_2 = 9{,}2$; $C_2A_1 = 5{,}6$. Určete velikost poloměru r kružnice opsané $\triangle ABC$.
7. Strany $\triangle ABC$ mají velikosti v poměru 7 : 9 : 8. Určete přibližný poměr velikostí stran $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.
8. Trojúhelník ABC s vnitřními úhly dané velikosti $\alpha = 42°$, $\beta = 74°$, $\gamma = 64°$ má obsah $P = 200$. Určete velikost obsahu $\triangle A_1B_1C_1$ z dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V. Nejdříve udejte obecný vzorec.
9. Je dán $\triangle EFG$ $[EF = 50$ mm, $FG = 70$ mm, $GE = 100$ mm$]$. Určete velikosti stran $\triangle E_2F_2G_2$ z relace $\triangle EFG$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle E_2F_2G_2$ podle V.
10. Jsou-li velikosti vnitřních úhlů v $\triangle ABC$ v poměru 3 : 4 : 5 a velikosti vnitřních úhlů $A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle P v poměru 7 : 8 : 9, určete velikosti vnitřních úhlů $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle P a poměr jejich velikostí.

11. Je dána dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle O vepsaná do kružnice $k = (O; 7{,}2)$ s vnitřními úhly $\sphericalangle ABC = 78°$, $\sphericalangle CAB = 46°$. Vypočítejte velikost obsahu $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ze složené relace $p \circ \overline{p}$ podle O. Udejte obecný vzorec pro dané r, α, β.
12. Dané trojúhelníky $\triangle ABC$ $[AB = 8$ cm, $BC = 6{,}5$ cm, $\sphericalangle ABC = 70°]$ a $\triangle A_cB_cP$ $[A_cB_c = 5{,}8$ cm, $B_cP = 6{,}9$ cm, $\sphericalangle A_cB_cP = 48°]$ jsou z relace $\triangle ABC$ p $\triangle A_1B_1C_1$ podle P a k ní příslušné trojice trojúhelníků. Určete velikosti stran $\triangle A_1B_1C_1$.
13. Do kružnice $k = (O; 6{,}4)$ je vepsán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly velikostí $\alpha = 76°28'35''$, $\beta = 41°32'53''$. Určete velikosti poloměrů kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle OBC$, $\triangle AOC$, $\triangle ABO$.
14. Známe-li v relaci $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle P velikost poloměru společné kružnice opsané $r = 8{,}3$ cm a velikosti úhlů $\beta = 42°36'$, $\beta' = 71°18'$, můžeme určit velikosti
   a) stran AC a A_1C_1,
   b) poloměru r_b kružnice opsané $\triangle APC$,
   c) strany A_bC_b v $\triangle A_bPC_b$ z trojice k dané relaci příslušné; naznačené výpočty proveďte.
15. V dvojici $[\triangle ABC_0, \triangle A_cB_cP] \in p$ podle C_1 příslušné k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle P známe: $A_cB_c = 5{,}6$ cm; $\sphericalangle A_cPB_c = 48°12'$; $AB = 4{,}2$ cm. Určete velikosti r, r_c, $\sphericalangle BCA$.
16. Určete polohu pólu Q v relaci $\triangle ABC$ q $\triangle A_2B_2C_2$ podle Q, je-li dán postupný poměr velikostí poloměrů $r : r_a : r_b : r_c = 3 : 4 : 5 : 6$ a velikosti úhlů $\alpha = 42°$, $\beta = 26°$.
17. Jsou-li r, r_a, r_b a r_c velikosti poloměrů kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům $\triangle ABC$, $\triangle SBC$, $\triangle ASC$ a $\triangle ABS$ a velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ α, β, γ, potom je:

$$r^2 : r_a^2 : r_b^2 : r_c^2 =$$

$$= 0{,}25 : (1 - \cos \alpha) : (1 - \cos \beta) : (1 - \cos \gamma).$$

Dokažte!
18. V pravoúhlém $\triangle KLM$ má jeden vnitřní úhel velikost 30°. Dokažte, že ze čtveřice poloměrů kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům $\triangle KLM$, $\triangle SLM$, $\triangle KSM$, $\triangle KLS$ mají právě dva shodné velikosti.
19. Je dán $\triangle ABC$ $[AB = 7;\ BC = 5;\ CA = 6]$ a pól Q

$[BQ = 9$; $CQ = 10$; $Q \in \overrightarrow{BCA}^*$. Určete velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_2B_2C_2$ z relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_2$ podle Q.

20. V dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q je $\triangle A_2B_2C_2$ rovnostranný, vepsaný do kružnice $k = (O; 7\text{ m})$. Určete velikosti úseček AQ, BQ a CQ, víte-li, že vnitřní úhly $\triangle ABC$ mají velikosti $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$.

21. Do kružnice $k = (O; 18)$ je vepsán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly $\alpha = 43°$; $\gamma = 67°$. Určete co nejjednodušeji velikosti obsahů všech tří trojúhelníků $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$ příslušných k relaci $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O.