Zajímavé dvojice trojúhelníků

Kapitola 3. Podobná zobrazení

In: Arnošt Niederle (author): Zajímavé dvojice trojúhelníků. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 153–212.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403991

KAPITOLA 3

PODOBNÁ ZOBRAZENÍ

A. OBECNÉ VLASTNOSTI

V závěru první kapitoly jsme naznačili, že v této kapitole pojednáme podrobněji o relacích „$\bar{\boldsymbol{p}}$ podle P“ nebo „$\bar{\boldsymbol{q}}$ podle Q“. Zatím jsme se těmito relacemi zabývali jenom natolik, že jsme dokázali existenci $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ předpokládaných vlastností (viz větu 13) a vztahy mezi velikostmi vnitřních úhlů trojice $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle P, kde P je vnitřní bod $\triangle ABC$ (viz větu 14).

V tomto omezení jsme využili vět 13 a 14 při zkoumání vlastností složené relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle T, kde T bylo těžiště $\triangle\ ABC$. Pro další úvahy však nyní již s tímto omezením nevystačíme. Především musíme odvodit větu obdobnou větě 14 pro pól P ležící vně $\triangle ABC$.

Věta 43. *Má-li trojice trojúhelníků ze složené relace $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle P vnitřní úhly velikostí α, β, γ; α', β', γ'; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, potom o těchto velikostech platí:*

$$\bar{\alpha} = (\alpha + \alpha') - 180°, \text{ když } \alpha + \alpha' > 180°,$$

$$\bar{\beta} = \beta + \beta',$$

$$\bar{\gamma} = \gamma + \gamma'.$$

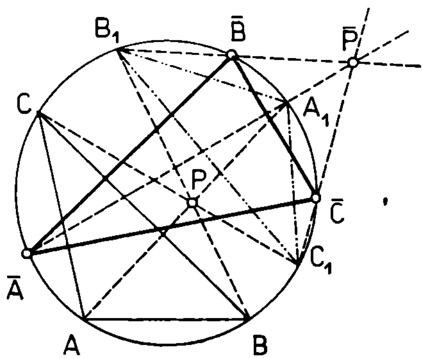
Důkaz (obr. 83). Na obr. 83 je v $\triangle ABC$ $\alpha + \alpha' >$

$> 180°$, takže pól P leží podle věty 4 v polorovině $\overrightarrow{BCA}$*. Proto je

$$\bar{\beta} = \sphericalangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \sphericalangle B_1\bar{B}\bar{C} - \sphericalangle B_1\bar{B}\bar{A}. \qquad (3.1)$$

Dále pak podle věty 13 $B_1\bar{C} = A_1C$ a odtud

$$\sphericalangle B_1\bar{B}\bar{C} = 180° - \sphericalangle A_1AC = 180° - \sphericalangle PAC \qquad (3.2)$$



Obr. 83

současně je

$$B_1\bar{A} = C_1A \Rightarrow \sphericalangle B_1\bar{B}\bar{A} = \sphericalangle C_1CA = \sphericalangle PCA. \qquad (3.3)$$

Dosadíme-li podle (3.2) a (3.3) do (3.1), bude

$$\bar{\beta} = 180° - \sphericalangle PAC - \sphericalangle PCA = \sphericalangle APC = \beta + \beta'$$

a to podle věty 4 v $\triangle APC$.

Obdobně dostaneme v $\triangle ABP$ $\bar{\gamma} = \sphericalangle APB = \gamma + \gamma'$.

Protože je $\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \gamma = 180°$, bude

$$\bar{\alpha} = 180° - (\beta + \beta') - (\gamma + \gamma') = (\alpha + \alpha') - 180°.$$

Existují ovšem ještě cyklické záměny pro $(\beta + \beta') > 180°$ a $(\gamma + \gamma') > 180°$. Ty uvedeme později v přehledné tabulce.

Věta 44. *Má-li trojice trojúhelníků ze složené relace* $\triangle ABC \; \mathbf{q} \; \triangle A_2B_2C_2 \; \bar{\mathbf{q}} \; \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *podle* Q *vnitřní úhly velikostí* α, β, γ; α', β', γ'; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$, *potom o těchto velikostech platí:*

a) *leží-li pól* Q *uvnitř* $\sphericalangle BAC$, $\bar{\alpha} = 180° + (\alpha - \alpha')$; $\bar{\beta} = (\beta - \beta')$; $\bar{\gamma} = (\gamma - \gamma')$;

b) *leží-li pól* Q *uvnitř úhlu vrcholového k* $\sphericalangle BAC$, $\bar{\alpha} = 180° + (\alpha' - \alpha)$; $\beta' = (\beta' - \beta)$; $\bar{\gamma} = (\gamma' - \gamma)$.

Důkaz. Pravdivost tvrzení a) vyplývá z obrácení věty 43. K důkazu proto použijeme obrázku 83. Zde leží pól $\bar{P}$ vně kružnice $\triangle ABC$ opsané.

Zaměňme označení pólů $\bar{P} \equiv Q \wedge \bar{Q} \equiv P$, takže je-li

$$\triangle ABC \; \mathbf{p} \; \triangle A_1B_1C_1 \; \bar{\mathbf{p}} \; \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } P,$$

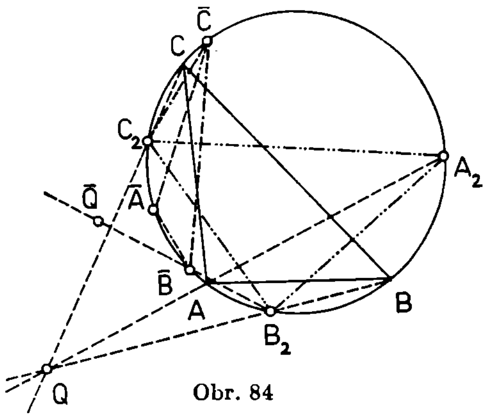
bude

$$\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \; \mathbf{q} \; \triangle A_2B_2C_2 \; \bar{\mathbf{q}} \; \triangle ABC \text{ podle } Q,$$

když $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2C_2$. Záměníme-li současně označení ABC za $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a naopak, jakož i označení příslušných vnitřních úhlů, bude

$$\begin{aligned}
\alpha &= \bar{\alpha} + \alpha' - 180° &&\Rightarrow \bar{\alpha} = 180° + (\alpha - \alpha'),\\
\beta &= \bar{\beta} + \beta' &&\Rightarrow \bar{\beta} = \beta - \beta',\\
\gamma &= \bar{\gamma} + \gamma' &&\Rightarrow \bar{\gamma} = \gamma - \gamma'.
\end{aligned}$$

b) Druhé tvrzení věty 44 se týká pólu Q ležícího uvnitř vrcholového úhlu $\sphericalangle BAC$ (obr. 84).



Obr. 84

Zde je

$$\bar{\gamma} = \sphericalangle C_2\bar{C}\bar{B} - \sphericalangle C_2\bar{C}\bar{A} \tag{3.4}$$

a současně

$$C_2\bar{B} = A_2B \Rightarrow \sphericalangle C_2\bar{C}\bar{B} = \sphericalangle A_2B_2B = \\ = 180° - \sphericalangle A_2B_2Q. \tag{3.5}$$

$$C_2\bar{A} = B_2A \Rightarrow \sphericalangle C_2\bar{C}\bar{A} = \sphericalangle B_2A_2A = \\ = \sphericalangle B_2A_2Q. \tag{3.6}$$

Dosadíme-li také zde podle (3.5) a (3.6) do (3.4), bude v $\triangle A_2B_2Q$

$$\bar{\gamma} = 180° - \sphericalangle A_2B_2Q - \sphericalangle B_2A_2Q = \sphericalangle AQB = \gamma' - \gamma .$$

Obdobně je $\bar{\beta} = \beta' - \beta$ a odtud

$$\bar{\alpha} = 180° - (\beta' - \beta) - (\gamma' - \gamma) = 180° - (\beta' + \gamma') + \\ + (\beta + \gamma) = 180° - (180° - \alpha') + (180° - \alpha) = 180° + \\ + (\alpha' - \alpha).$$

Příslušné cyklické záměny shrneme nyní spolu se záměnami vyplývajícími z vět 14 a 44 do přehledné tabulky:

Poloha pólu P nebo Q	Velikosti vnitřních úhlů v $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$		
	$\bar{\alpha} = \sphericalangle\bar{B}\bar{A}\bar{C}$	$\bar{\beta} = \sphericalangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{\gamma} = \sphericalangle\bar{A}\bar{C}\bar{B}$
	velikosti úhlů jim odpovídajících		
	$\sphericalangle CA_0B$	$\sphericalangle AB_0C$	$\sphericalangle BC_0A$
P vnitřní bod $\triangle ABC$	$180° - (\alpha + \alpha')$	$180° - (\beta + \beta')$	$180° - (\gamma + \gamma')$
P v polorovině $\overrightarrow{BCA}$* $\overrightarrow{ACB}$* $\overrightarrow{ABC}$*	$(\alpha + \alpha') - 180°$ $\alpha + \alpha'$ $\alpha + \alpha'$	$\beta + \beta'$ $(\beta + \beta') - 180°$ $\beta + \beta'$	$\gamma + \gamma'$ $\gamma + \beta'$ $(\gamma + \gamma') - 180°$
Q uvnitř $\sphericalangle CAB$ $\sphericalangle ABC$ $\sphericalangle BCA$	$180° + (\alpha - \alpha')$ $\alpha - \alpha'$ $\alpha - \alpha'$	$\beta - \beta'$ $180° + (\beta - \beta')$ $\beta - \beta'$	$\gamma - \gamma'$ $\gamma - \gamma'$ $180° + (\gamma - \gamma')$
Q uvnitř vrcholového úhlu k $\sphericalangle CAB$ $\sphericalangle ABC$ $\sphericalangle BCA$	$180° + (\alpha' - \alpha)$ $\alpha' - \alpha$ $\alpha' - \alpha$	$\beta' - \beta$ $180° + (\beta' - \beta)$ $\beta' - \beta$	$\gamma' - \gamma$ $\gamma' - \gamma$ $180° + (\gamma' - \gamma)$

tab. 3

Poznámka. V záhlaví tabulky jsou vedle velikostí vnitřních úhlů v $\triangle \overline{ABC}$ uvedeny v příslušných rubrikách i velikosti úhlů $\sphericalangle CA_0B$, $\sphericalangle AB_0C$ a $\sphericalangle BC_0A$, o kterých zatím nebyla řeč. Brzy však poznáme, že jde o velikosti vnitřních úhlů v podobných trojúhelnících, takže je výhodné je uvést do jedné společné tabulky. Tabulka nám dobře poslouží při rozvíjení dalších úvah i při řešení úloh.

Nyní již můžeme přikročit k vlastní látce této kapitoly. Začneme definicí:

Definice 3. Mějme dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P nebo $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q, kde póly P nebo Q neleží na žádné straně $\triangle ABC$ ani na žádném jejich prodloužení. Potom množinami $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_{Tc}$ rozumíme po řadě množiny všech trojúhelníků vepsaných do kružnic l_a, l_b a l_c, kde

$$\{B, C, P\} \vee \{B, C, Q\} \subset l_a,$$

$$\{A, C, P\} \vee \{A, C, Q\} \subset l_b,$$

$$\{A, B, P\} \vee \{A, B, Q\} \subset l_c.$$

Připomeňme si, že již v první kapitole jsme se zabývali vlastnostmi kružnicových oblouků procházejících například body A, B, P nebo A, B, Q. Tam šlo o množiny všech pólů P nebo Q předpokládaných vlastností. V definici 3 se teď objevuje celá kružnice l_c obsahující uvedené body jako nositelka vrcholů trojúhelníků z množiny $\boldsymbol{M}_{Tc}$. Jedním prvkem této množiny je také $\triangle ABC_0$, kde C_0 je průsečík přímky CC_1 s kružnicí l_c. Podobně lze utvořit i $\triangle A_0BC$ v kružnici l_a nebo AB_0C v kružnici l_b.

Vlastnosti trojúhelníků tohoto typu vyjadřují další dvě věty:

Věta 45. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* P *a trojici trojúhelníků* $[\triangle A_0BC,\ \triangle AB_0C$ *a* $\triangle ABC_0]$, *kde* A_0 *je průsečík přímky* AP *s kružnicí opsanou* $\triangle PBC$, B_0 *průsečík přímky* BP *s kružnicí opsanou* $\triangle APC$ *a* C_0 *průsečík přímky* CP *s kružnicí opsanou* $\triangle ABP$. *Je-li současně*

$$\triangle ABC\ \mathbf{p} \circ \bar{\mathbf{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } P,$$

potom

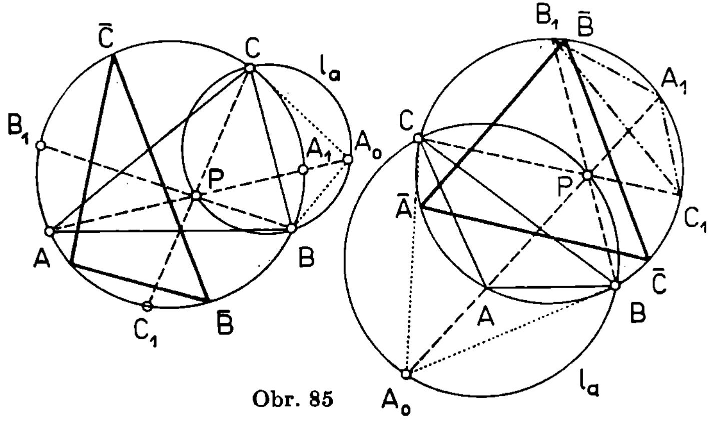
$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Důkaz (obr. 85). Na obr. 85 vlevo je pól P vnitřní bod $\triangle ABC$ a kružnice l_a je opsána $\triangle BCP$.

V kružnici l_a je

$$\sphericalangle BA_0C = 180° - \sphericalangle BPC = 180° - (\alpha + \alpha') \quad (3.7)$$

podle věty 4.



Obr. 85

Dále je

$$\sphericalangle A_0BC = \sphericalangle A_0PC = 180° - \sphericalangle APC =$$
$$= 180° - (\beta + \beta') \tag{3.8}$$

rovněž podle věty 4.

Podle (3.7) a (3.8) mají trojúhelníky $\triangle A_0BC$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ (z relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle P) dva vnitřní úhly shodné, a proto je $\triangle A_0BC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Tento výsledek je v dobrém souladu s údaji v tabulce 3 právě tak jako závěry z cyklických záměn:

$$\triangle AB_0C \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \wedge \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},$$

takže

$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Na obr. 85 vpravo je pól P v polorovině $\overrightarrow{BCA}$*. Zde je $\sphericalangle BA_0C = 180 - \sphericalangle BPC = 180° - [360° - (\alpha + \alpha')]$ podle věty 4 a odtud

$$\sphericalangle BA_0C = (\alpha + \alpha') - 180°. \tag{3.9}$$

Dále je

$$\sphericalangle CBA_0 = \sphericalangle CPA = \beta + \beta' \tag{3.10}$$

a potom i

$$\sphericalangle BCA_0 = \sphericalangle BPA = \gamma + \gamma' \tag{3.11}$$

obojí podle věty 4.

Porovnáme-li (3.9), (3.10) a (3.11) s tabulkou 3, vidíme, že tam uvedené dvojice úhlů jsou skutečně shodné, takže je $\triangle A_0BC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

V kružnici l_b pak je $\sphericalangle AB_0C = \sphericalangle APC = \beta + \beta'$ a také $\sphericalangle B_0AC = \sphericalangle BA_0C = (\alpha + \alpha') - 180°$.

Je proto $\triangle AB_0C \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a obdobně i $\triangle ABC_0 \sim$ $\sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ opět v dobrém souladu s tabulkou 3. Věta 45 proto platí i tehdy, když pól P leží vně $\triangle ABC$.

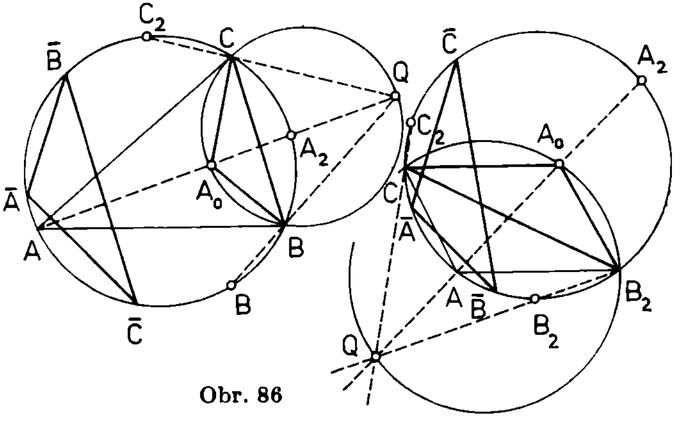
Věta 46. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* Q *a trojici trojúhelníků* $[\triangle A_0BC, \triangle AB_0C$ *a* $\triangle ABC_0]$, *kde* A_0 *je průsečík přímky* AQ *s kružnicí opsanou* $\triangle QBC$, B_0 *průsečík přímky* BQ *s kružnicí opsanou* $\triangle AQB$ *a* C_0 *průsečík přímky* CQ *s kružnicí opsanou* $\triangle ABQ$. *Potom je*

$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},$$

kde $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *je druhá složka ze složené relace* $[\triangle ABC, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \boldsymbol{q} \circ \bar{\boldsymbol{q}}$ *podle* Q.

Důkaz (obr. 86). Na obr. 86 vlevo je pól Q vnitřní bod $\sphericalangle BAC$, a proto:

$$\sphericalangle BA_0C = 180° - \sphericalangle BQC = 180° - (\alpha' - \alpha) =$$
$$= 180° + (\alpha - \alpha'), \tag{3.12}$$



Obr. 86

dále je

$$\sphericalangle A_0BC = \sphericalangle AQC = (\beta - \beta') \tag{3.13}$$

podle věty 5 a obdobně

$$\sphericalangle A_0CB = \sphericalangle AQB = (\gamma - \gamma') \tag{3.14}$$

také podle věty 5. Srovnáme-li tento výsledek s tabulkou 3, zjistíme, že vnitřní úhly $\triangle A_0BC$ jsou shodné s vnitřními úhly $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, takže je $\triangle A_0BC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Z cyklických záměn dále plyne

$$\triangle AB_0C \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \wedge \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

a odtud

$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

b) Na obr. 86 vpravo je pól Q uvnitř úhlu vrcholového k úhlu BAC, a proto:

$$\sphericalangle BA_0C = 180° - \sphericalangle BQC = 180° - (\alpha - \alpha') =$$
$$= 180° + (\alpha' - \alpha),$$

potom

$$\sphericalangle A_0BC = \sphericalangle A_0QC = \sphericalangle AQC = \beta' - \beta$$

a konečně

$$\sphericalangle A_0CB = \sphericalangle A_0QB = \sphericalangle AQB = \gamma' - \gamma.$$

Opět jsme došli k shodnému závěru, že uvažované trojúhelníky mají shodné velikosti vnitřních úhlů a jsou proto podobné. Spolu s cyklickými záměnami pak platí:

$$\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

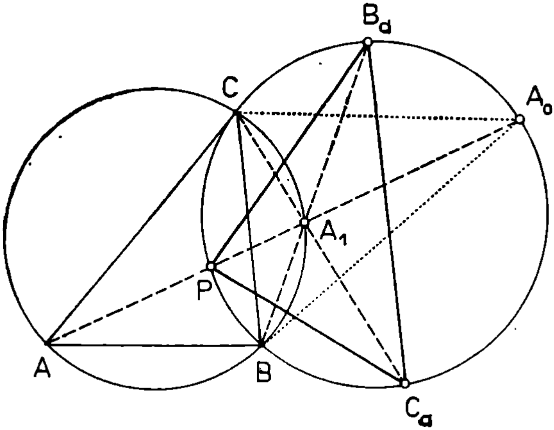
V předcházejících důkazech jsme nejenom prokázali pravdivost vět 45 a 46, ale současně i oprávněnost uspořádání tabulky 3, kde jsme uvedli rovnosti:

$$\bar{\alpha} = \sphericalangle A_0BC, \bar{\beta} = \sphericalangle AB_0C, \bar{\gamma} = \sphericalangle ABC_0.$$

Budeme proto tabulky 3 používat také v souvislosti s vlastnostmi trojúhelníků $\triangle A_0BC \in \boldsymbol{M}_{Ta}$, $\triangle AB_0C \in \boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\triangle ABC_0 \in \boldsymbol{M}_{Tc}$. Přitom je třeba si uvědomit, že je-li dána dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P, nebo dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q, lze kružnice l_a, l_b a l_c narýsovat jediným způsobem, a právě tak i body A_0, B_0 a C_0 jsou jednoznačně určeny. Tím ovšem je dána jednoznačně také trojice trojúhelníků $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$. Jistě je na místě tato úmluva:

Právě popsaný vztah mezi uvažovanými trojúhelníky budeme nadále vyjadřovat takto:

dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ a k ní příslušná tro-



Obr. 87

jice, nebo [$\triangle ABC$, $\triangle A_2B_2C_2$] $\in \boldsymbol{q}$ a k ní příslušná trojice. Téhož obratu použijeme v případě, že bude následovat jenom jeden nebo dva z uvažované trojice trojúhelníků.

V množině $\boldsymbol{M}_{Ta}$ utvořme nyní relaci $\boldsymbol{p} \in (\boldsymbol{M}_{Ta} \times \boldsymbol{M}_{Ta})$, a to [$\triangle A_0BC$, $\triangle PB_aC_a$] $\in \boldsymbol{p}$ podle A_1.

Z obrázku 87 je zřejmé, že body B_a a C_a jsou průsečíky polopřímek BA_1 a CA_1 s kružnicí l_a podle definice 1. Protože jsme relaci $\boldsymbol{p}$ v úvodní kapitole uvedli jako zobrazení, je zřejmé, že pól P zde je obrazem bodu A_0, zatímco bod A_1 převzal úlohu pólu v relaci $\boldsymbol{p}$ v množině $\boldsymbol{M}_{Ta}$.

Obdobné relace pak lze utvořit i v množinách $\boldsymbol{M}_{Tb}$, $\boldsymbol{M}_{Tc}$. Změní se jenom označení vrcholů příslušných trojúhelníků. Tak dostaneme další dvojice trojúhelníků.

$$[\triangle AB_0C,\ \triangle A_bPC_b] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } B_1 \text{ v množině } \boldsymbol{M}_{Tb},$$

$$[\triangle ABC_0,\ \triangle A_cB_cP] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } C_1 \text{ v množině } \boldsymbol{M}_{Tc}.$$

Protože právě zavedená relace je relací $\boldsymbol{p}$ podle P, má všechny dosud popsané vlastnosti této relace. Podle popisu konstrukce jednotlivých bodů je opět zřejmé, že jejich poloha jednoznačně vyplývá z poloh v dané dvojici trojúhelníků [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$. Proto vztáhneme úmluvu z předcházejícího textu i na právě popsanou trojici, takže budeme psát:

dvojice [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle P a k ní příslušná trojice [$\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$, $\triangle A_cB_cP$].

Věta 47. *Mějme dvojici* [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ *podle P a k ní příslušnou dvojici* [$\triangle A_0BC$, $\triangle PB_aC_a$] $\in \boldsymbol{p}$ *podle A_1. Potom je*

$$\triangle PB_aC_a \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

Důkaz. a) Nechť pól P je vnitřní bod $\triangle ABC$ (obr. 87). Potom je v kružnici l_a $\sphericalangle B_aC_aP = \sphericalangle B_aBP$ a v kružnici k je

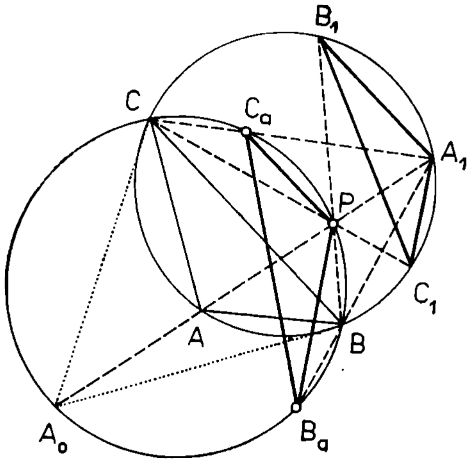
$$\sphericalangle B_aBP \equiv \sphericalangle A_1BB_1 = \sphericalangle A_1C_1B_1 = \gamma'. \quad (3.15)$$

Současně je v kružnici l_a $\sphericalangle C_aB_aP = \sphericalangle C_aCP$ a v kružnici k

$$\sphericalangle C_aCP \equiv \sphericalangle A_1CC_1 = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \beta'. \quad (3.16)$$

Trojúhelníky $\triangle PB_aC_a$ a $\triangle A_1B_1C_1$ mají podle (3.15) a (3.16) dva vnitřní úhly shodné, a proto jsou podobné.

b) Nechť pól P je vnější bod $\triangle ABC$, takže leží například v polorovině $\overrightarrow{BCA}*$ (obr. 88).



Obr. 88

Na první pohled se obrázky 87 a 88 podstatně liší, protože například bod A_1 je zde jednou bodem vnitřní, podruhé bodem vnější oblasti kružnice l_a. Postup důkazu však je v obou případech naprosto stejný, jak je možno se přesvědčit. Nemusíme proto důkaz znovu opakovat. Nesmíme však přehlédnout důsledky vyplývající z právě dokázané věty:

Z cyklických záměn totiž dostáváme

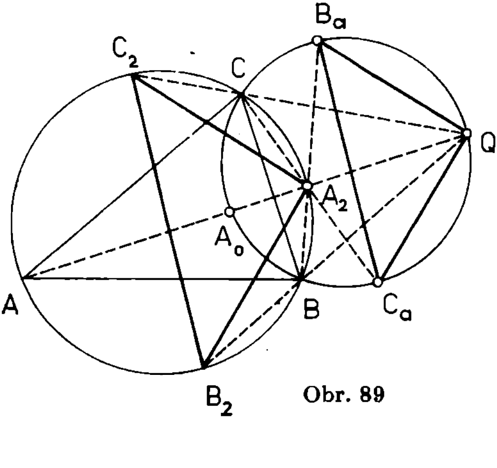
$$\triangle A_bPC_b \sim \triangle A_1B_1C_1 \wedge A_cB_cP \sim \triangle A_1B_1C_1,$$

takže z věty 47 plyne:

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle PB_aC_a \sim \triangle A_bPC_b \sim \triangle A_cB_cP.$$

Věta 48. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* Q *a k ní příslušnou dvojici* $[\triangle A_0BC, \triangle QB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ *nebo* $\boldsymbol{q}$ *podle* A_2. *Potom je*

$$\triangle QB_aC_a \sim \triangle A_2B_2C_2.$$



Obr. 89

Důkaz (obr. 89 a 90). a) Nechť pól Q leží nejdříve uvnitř $\sphericalangle BAC$.

V kružnici l_a je $\sphericalangle QB_aC_a = \sphericalangle QCC_a = 180° - \sphericalangle A_2CC_2$ a v kružnici k je $\sphericalangle A_2CC_2 = 180° - \sphericalangle A_2B_2C_2$, neboli

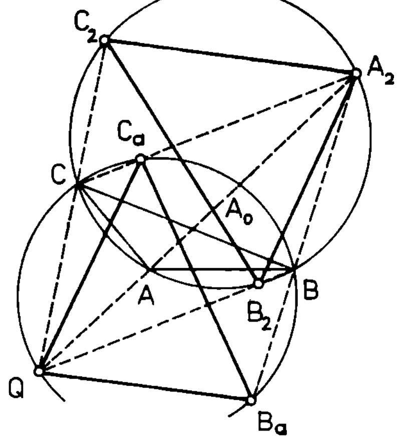
$$\sphericalangle QB_aC_a = \sphericalangle A_2B_2C_2 = \beta'. \qquad (3.17)$$

Současně je v l_a $\sphericalangle QC_aB_a = \sphericalangle QBB_a = 180° - \sphericalangle$ $\sphericalangle A_2BB_2$ a v kružnici k je $\sphericalangle A_2BB_2 = 180° - \sphericalangle A_2C_2B_2$, neboli

$$\sphericalangle QC_aB_a = \sphericalangle A_2C_2B_2 = \gamma'. \qquad (3.18)$$

Trojúhelníky $\triangle QB_aC_a$ a $\triangle A_2B_2C_2$ mají podle (3.17) a (3.18) dva vnitřní úhly shodné, a proto jsou také podobné.

b) Na obr. 90 je pól Q vnitřní bod úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$.



Obr. 90

Zde se opět změnil jenom obrázek, protože bod A_2 tu je bod vnější oblasti kružnice l_a, ale postup důkazu je opět zcela shodný s předchozím s tím rozdílem, že

$$\sphericalangle QCC_a = \sphericalangle A_2B_2C_2 = \beta',$$

$$\sphericalangle QC_aB_a = 180° - \sphericalangle QBB_a = \sphericalangle B_2C_2A_2 = \gamma'.$$

Odtud pak plyne: $\triangle QB_aC_a \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Také zde je třeba vzít v úvahu i cyklické záměny:

$$\triangle A_bQC_b \sim \triangle A_2B_2C_2 \wedge \triangle A_cB_cQ \sim \triangle A_2B_2C_2,$$

takže

$$\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle QB_aC_a \sim \triangle A_bQC_b \sim \triangle A_cB_cQ.$$

Zde je ovšem možné namítnout, že důkazy vět 45—48 nebyly dovedeny až do konce a že jsme snad neoprávněně použili důkazu z analogie, když jsme ze vztahů v kružnici l_a usuzovali, že stejné vztahy nalezneme i v kružnicích l_b a l_c. Formálně je ovšem tato námitka oprávněná. Ukážeme však například postup v části a) důkazu věty 48. Zde v kružnici l_c platí:

$$\sphericalangle QB_cA_c = \sphericalangle QAA_c = \sphericalangle A_2AC_2 = \sphericalangle A_2B_2C_2 = \beta',$$

$$\sphericalangle QA_cB_c = 180° - \sphericalangle QBB_c = \sphericalangle C_2BB_2 =$$
$$= \sphericalangle C_2A_2B_2 = \alpha'.$$

Z tohoto příkladu je zřejmé, že jde skutečně o analogii a příslušné důkazy se hodí spíše do cvičení.

Mnohem zajímavější zde jsou důsledky vět 45—48. Podle věty 45 a 46 je například $\triangle A_0BC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a podle věty 47 a 48 $\triangle PB_aC_a \sim \triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle QB_aC_a \sim \triangle A_2B_2C_2$.

Současně však víme, že je

$$[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } \bar{P}$$

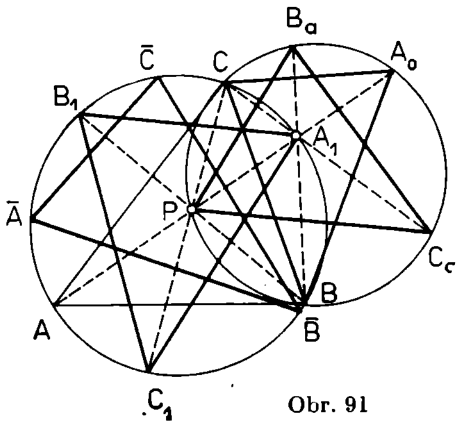
a také

$$[\triangle A_0BC,\ \triangle PB_aC_a] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } A_1.$$

Zřejmě je tedy v podobnosti $\boldsymbol{M}_T \to \boldsymbol{M}_{Ta}$ dvojice $[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{P}$ vzorem a dvojice $[\triangle A_0BC,\ \triangle PB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ podle A_1 jejím obrazem a naopak.

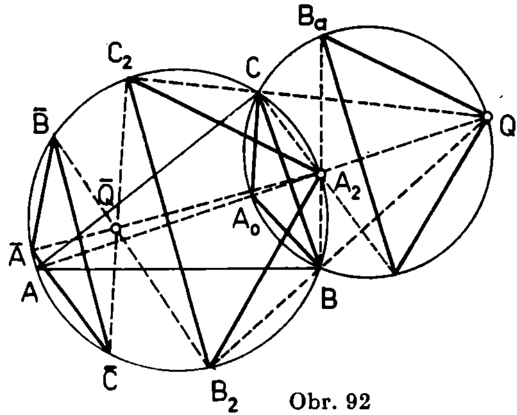
I zde je třeba vzít v úvahu cyklické záměny, takže tyto důsledky vět 45—48 platí i pro podobnosti $\boldsymbol{M}_T \to \boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_T \to \boldsymbol{M}_{Tc}$, přičemž je vždy pól $\bar{P}$ vzorem a póly A_1, B_1 a C_1 jeho obrazy a naopak. Jedno z těchto podobných zobrazení ukazuje obr. 91.

Dodejme ještě, že také dvojice $[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C},\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{Q}$ je vzorem a dvojice $[\triangle A_0BC,\ \triangle QB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$



Obr. 91

podle A_2 jejím obrazem, jak ukazuje obr. 92, a to se všemi dalšími důsledky včetně těch, které jsou vyjádřeny v další větě.



Obr. 92

Věta 49. *Mějme dvojici trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* P *nebo* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \mathbf{q}$ *podle* Q *a k nim příslušné trojice trojúhelníků* $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$ *a* $\triangle A_cB_cP$, *nebo* $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$ *a* $\triangle A_cB_cQ$, *potom*

a) *přímky* A_bA_c, B_aB_c *a* C_aC_b *procházejí póly* P *nebo* Q *a současně je*

b) $$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_1C_1} \text{ nebo } \overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_2C_2},$$
$$\overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_1C_1} \text{ nebo } \overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2},$$
$$\overleftrightarrow{C_aC_b} \parallel \overleftrightarrow{A_1B_1} \text{ nebo } \overleftrightarrow{C_aC_b} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2}.$$

Důkaz zde musíme provést pro čtyři různé polohy pólů P nebo Q.

a) Na obr. 93 je pól P vnitřní bod $\triangle ABC$, a proto: v kružnici l_a je

$$\sphericalangle CC_aP = \sphericalangle CBP, \tag{3.19}$$

v kružnici k pak je

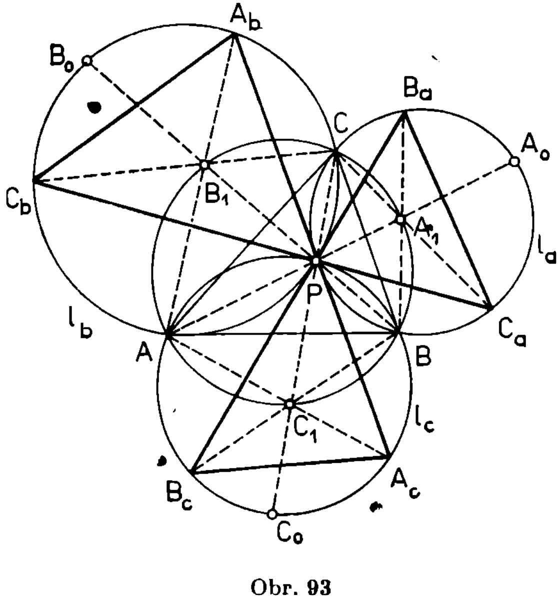
$$\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle CA_1B_1, \tag{3.20}$$

takže podle (3.19) a (3.20) je

$$\sphericalangle CA_1B_1 = \sphericalangle CC_aP, \text{ neboli } A_1B_1 \parallel C_aP. \tag{3.21}$$

Dále je v kružnici l_b

$$\sphericalangle CC_bP = \sphericalangle CAP, \tag{3.22}$$



Obr. 93

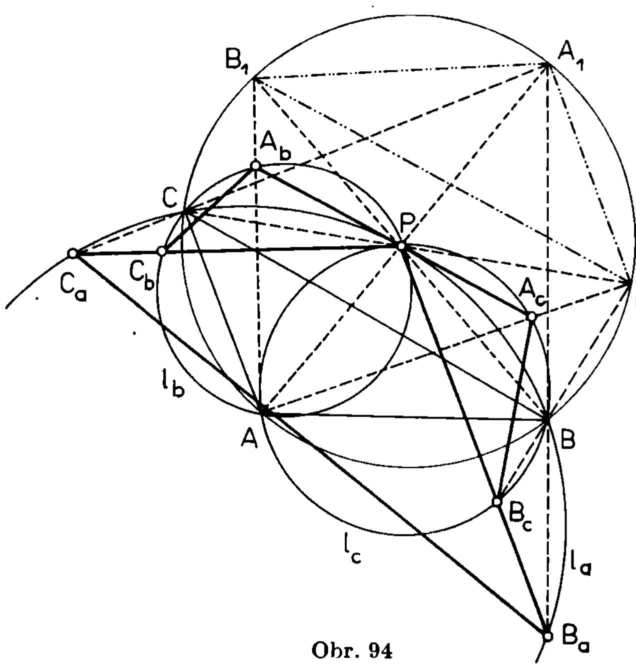
v kružnici k pak je

$$\sphericalangle CAP \equiv \sphericalangle \check{C}AA_1 = \sphericalangle CB_1A_1, \qquad (3.23)$$

takže podle (3.22) a (3.23) je

$$\sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle CC_bP \text{ a odtud } A_1B_1 \parallel C_bP. \qquad (3.24)$$

Podle (3.12) a (3.24) jsou přímky C_aP a C_bP rovnoběžné s přímkou A_1B_1 a tedy i navzájem rovnoběžné. Mají-li současně společný bod P, potom musí splývat a je $P \in C_aC_b$.



Obr. 94

Tím je důkaz proveden pro přímku C_aC_b a z cyklických záměn dostaneme také

$$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_1C_1} \wedge P \in \overleftrightarrow{A_bA_c},$$

$$\overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_1C_1} \wedge P \in \overleftrightarrow{B_aB_c}.$$

b) V případě, že pól P leží vně $\triangle ABC$, je situace poněkud složitější, avšak myšlenkový postup důkazu je stejný jako v případě a), proto zde provedeme jenom stručný zápis důkazu (obr. 94).

V kružnici l_a je $\sphericalangle CC_aP = \sphericalangle CBP$, v k je $\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBB_1 = \sphericalangle CA_1B_1$, a proto

$$\sphericalangle CC_aP = \sphericalangle CA_1B_1 \Rightarrow C_aP \parallel A_1B_1. \qquad (3.25)$$

Dále v l_b je $\sphericalangle CC_bP = \sphericalangle CAP$, v k je $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CAA_1 = 180° - \sphericalangle CB_1A_1$, a proto

$$CC_bP = 180° - \sphericalangle CB_1A_1 \Rightarrow C_bP \parallel A_1B_1. \qquad (3.26)$$

Konečně podle (3.25) a (3.26) je $C_aP \parallel C_bP$, neboli

$$C_aC_b \parallel A_1B_1 \wedge P \in C_aC_b.$$

Obdobně pak platí: $\sphericalangle AA_bP = \sphericalangle ACP = \sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle AB_1C_1$, takže

$$\sphericalangle AA_bP = \sphericalangle AB_1C_1 \Rightarrow A_bP \parallel B_1C_1, \qquad (3.27)$$

$\sphericalangle AA_cP = \sphericalangle ABP = \sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle AC_1B_1$, takže

$$\sphericalangle AA_cP = \sphericalangle AC_1B_1 \Rightarrow A_cP \parallel C_1B_1. \qquad (3.28)$$

A zase podle (3.27) a (3.28) je $A_bP \parallel A_cP$, neboli

$$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_1C_1} \wedge P \in \overleftrightarrow{A_bA_c} \qquad (3.29)$$

Tím je dokázáno i třetí tvrzení, neboť z podobnosti trojúhelníků $\triangle PB_aC_a \triangle \sim A_bPC_b \triangle \sim A_cB_cP$ vyplývá

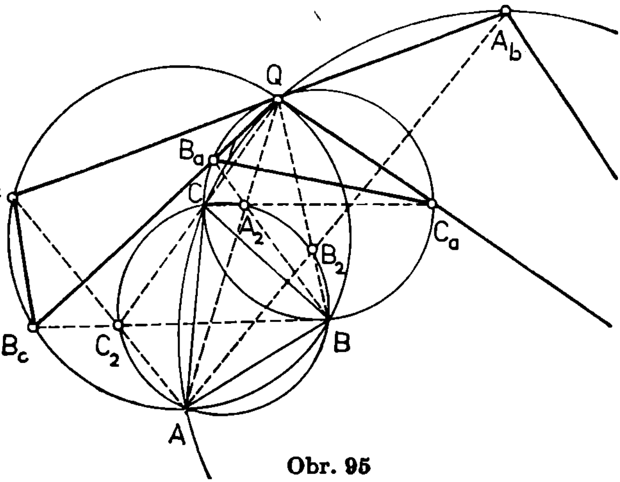
$$\sphericalangle C_aPB_a = \sphericalangle C_bPB_c, \text{ takže } PB_c \equiv PB_a. \qquad (3.30)$$

c) Na obr. 95 leží pól Q uvnitř úhlu BAC.

Protože i zde jde o zcela shodný myšlenkový postup, použijeme ještě stručnějšího zápisu:

$$\sphericalangle AA_cQ = 180° - \sphericalangle AC_2B_2 \Rightarrow A_cQ \parallel C_2B_2, \tag{3.31}$$

$$\sphericalangle AA_bQ = \sphericalangle AB_2C_2 \Rightarrow A_bQ \parallel C_2B_2. \tag{3.32}$$



Obr. 95

Ze (3.31) a (3.32) plyne

$$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{B_2C_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{A_bA_c}, \tag{3.33}$$

$$\sphericalangle BB_aQ = 180° - \sphericalangle BA_2C_2 \Rightarrow B_aQ \parallel A_2C_2, \tag{3.34}$$

$$\sphericalangle BB_cQ = \sphericalangle BC_2A_2 \Rightarrow B_cQ \parallel A_2C_2. \tag{3.35}$$

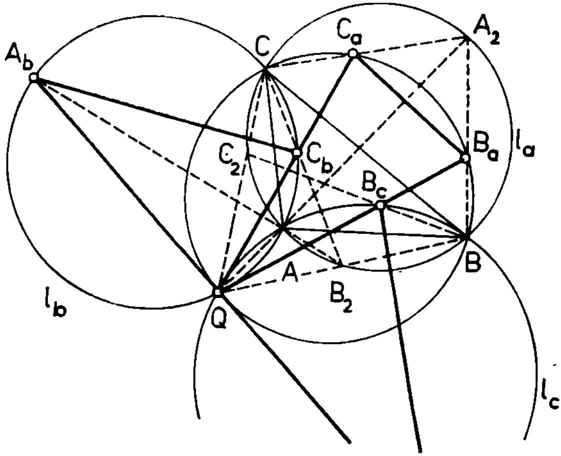
Ze (3.34) a (3.35) plyne

$$\overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{A_2C_2}. \tag{3.36}$$

Obdobně jako v případě b) můžeme i zde z (3.33) a (3.36) usuzovat z podobnosti na pravdivost tvrzení třetího, tj.

$$\overleftrightarrow{C_aC_b} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{C_aC_b}. \tag{3.37}$$

d) Zbývá už jenom případ, kdy pól Q leží uvnitř úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$, jak ukazuje obr. 96.



Obr. 96

Zde je $\sphericalangle AA_b.Q = \sphericalangle ACQ = \sphericalangle ACC_2 = \sphericalangle AB_2C_2$, takže $\sphericalangle AA_bQ = \sphericalangle AB_2C_2 \Rightarrow A_bQ \parallel C_2B_2$, a také $\sphericalangle AA_cQ = \sphericalangle ABQ = \sphericalangle ABB_2 = \sphericalangle AC_2B_2$, takže $\sphericalangle AA_cQ = \sphericalangle AC_2B_2 \Rightarrow A_cQ \parallel C_2B_2$ a odtud

$$\overleftrightarrow{A_bA_c} \parallel \overleftrightarrow{C_2B_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{A_bA_c}. \tag{3.38}$$

Současně je $\sphericalangle BB_aQ = \sphericalangle BA_2C_2 \Rightarrow B_aQ \parallel A_2C_2$, dále $\sphericalangle BB_cQ = 180° - \sphericalangle BC_2A_2 \Rightarrow B_cQ \parallel A_2C_2$ a odtud

$$\overleftrightarrow{B_aB_c} \parallel \overleftrightarrow{A_2C_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{B_aB_c}. \qquad (3.39)$$

Podobně jako v předchozích dvou důkazech vyplývá z (3.38) a (3.39) také třetí tvrzení, a to:

$$\overleftrightarrow{C_aC_b} \parallel \overleftrightarrow{A_2B_2} \wedge Q \in \overleftrightarrow{C_aC_b}. \qquad (3.40)$$

Tím jsme získali dostatečnou představu o obecných vlastnostech podobných zobrazení z množiny $\boldsymbol{M}_T$ do množin $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_{Tc}$ a naopak, takže můžeme opět na několika příkladech ukázat řešení konstrukčních úloh užitím příslušných vět.

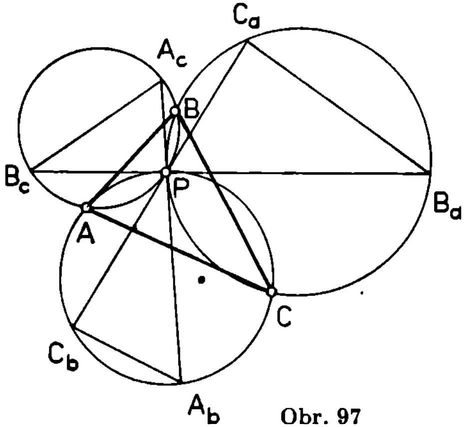
Příklad 1. Je dán trojúhelník PB_aC_a [$PB_a = 7$; $B_aC_a = 6$; $C_aP = 4$], o němž víme, že je největší z trojice trojúhelníků $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$ a $\triangle A_cB_cP$ příslušné k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] z relace $\boldsymbol{p}$ podle P. Sestrojte $\triangle ABC$, víte-li, že pól P je jeho vnitřní bod a velikosti trojúhelníků z dané trojice jsou v poměru 5 : 4 : 3.

Řešení (obr. 97). Především uvažme, že za nejmenší z uvažované trojice trojúhelníků můžeme považovat buď $\triangle A_bPC_b$ nebo $\triangle A_cB_cP$. Zde provedeme pouze druhý případ.

Potom je podle zadání poměr podobnosti prvých dvou trojúhelníků $k_1 = 4 : 5$ a poměr podobnosti druhého a třetího $k_2 = 3 : 4$. Můžeme proto zjistit konstrukcí nebo výpočtem i velikosti stran druhého a třetího trojúhelníku, a to:

$$A_bP = 5{,}6;\ PC_b = 4{,}8;\ C_bA_b = 3{,}2;$$
$$A_cB_c = 4{,}2;\ B_cP = 3{,}6;\ PA_c = 2{,}4.$$

Sestrojíme-li daný $\triangle PB_aC_a$, máme již polohy přímek $B_aB_c \equiv PB_a$ a $C_aC_b \equiv PC_a$, které podle věty 49 procházejí pólem P. Naneseme-li na příslušné polopřímky od pólu P úsečky PA_b, PC_b a PB_c, dostaneme chybějící vrcholy hledané trojice trojúhelníků. Tím je úloha vyřešena.



Obr. 97

K vlastní *konstrukci* je třeba dodat, že nebude vždy možné získat výpočtem přesné velikosti chybějících rozměrů, a proto raději užijeme vhodných redukčních úhlů k sestrojení požadovaných velikostí. K sestrojení přímky A_bA_c pak je nutno uvážit, že podle věty 49 je

$$\sphericalangle A_bPC_b = \sphericalangle PB_aC_a.$$

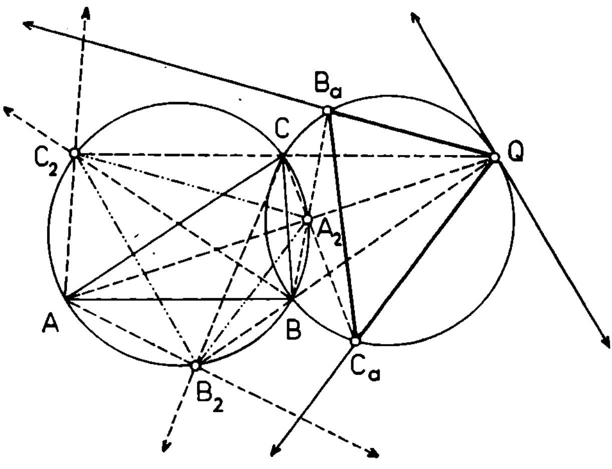
Diskuse. Řešení existuje nepochybně tehdy, když kružnice opsané uvažované trojici trojúhelníků se protnou po dvou ve dvou různých bodech, z nichž jeden je pól P. To musí ovšem nastat vždy, protože v případě, že by kterékoliv dvě kružnice vedle pólu P neměly další společný bod, musely by se dotýkat právě v tomto pólu, a to při seskupení trojúhelníků odpovídajícím větě 49 nemůže nastat.

Bude mít proto takto daná úloha vždy právě jedno řešení. V našem případě, jak jsme uvedli v rozboru, je zadání dvojznačné, a proto úloha má dvě řešení.

Příklad 2. Jsou dány velikosti strany AB a poloměru kružnice opsané trojúhelníku ABC i poloha pólu Q. Určete polohu třetího vrcholu C v $\triangle ABC$ tak, aby trojúhelníky $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$ a $\triangle A_cB_cQ$ byly rovnoramenné a tvořily trojici příslušnou k $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in$ $\in \boldsymbol{q}$ podle Q.

Rozbor. Zvolme například $AB = 6$ cm; $r = 3{,}5$ cm; $AQ = 12$ cm, $BQ = 6{,}5$ cm (viz obr. 98).

Protože je dána kružnice opsaná $\triangle ABC$ i pól Q, mů-



Obr. 98

žeme na dané kružnici určit polohy bodů A_2 a B_2. Podle věty 48 pak bude například $\triangle QB_aC_a$ podobný $\triangle A_2B_2C_2$, takže řešení úlohy spočívá v tom, že musíme určit polohou C_2 tak, aby $\triangle A_2B_2C_2$ byl rovnoramenný. To lze provést celkem čtyřmi způsoby. První dva trojúhelníky dostaneme, když za hlavní vrchol zvolíme body A_2 nebo B_2, druhé dva, když hlavním vrcholem bude bod C_2. Zde provedeme jednu z druhých dvou možností, a to tu, kde $\triangle A_2B_2C_2$ je ostroúhlý. Spojnice vrcholu C_2 s Q určí na opsané kružnici polohu třetího vrcholu C. Nyní již známe všechny prvky potřebné k sestrojení hledané trojice trojúhelníků. Ve zvoleném případě však se setkáváme s jistými potížemi, protože některé důležité body leží mimo nákresnu. A tu je dobrá příležitost k tomu, abychom využili všech poznaných vlastností této trojice podle dokázaných vět.

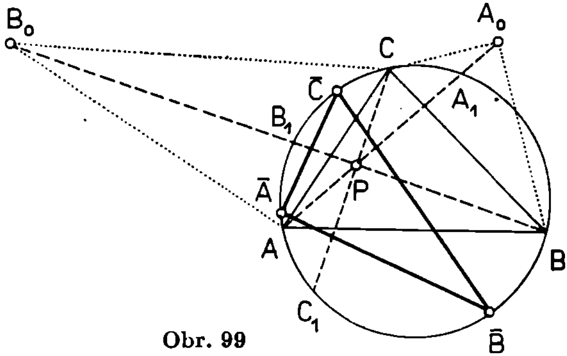
Diskuse. Z rozboru je zřejmé, že úloha může mít až čtyři řešení. To ovšem za předpokladu, že pól Q neleží na žádné straně $\triangle ABC$ ani na jejím prodloužení. Současně ovšem musí být $AB \leqq 2r$.

Příklad 3. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 7$ cm; $BC = 6$ cm; $CA = 5$ cm]. Určete polohu pólu P tak, aby $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu $\bar{A}$ a ostrým úhlem velikosti 30° při vrcholu $\bar{B}$.

Řešení. Užijeme-li důsledků věty 14, můžeme velikosti úhlů α', β' a γ' určit ze vztahů $\alpha + \alpha' + \bar{\alpha} = 180°$, $\beta + \beta' + \bar{\beta} = 180°$ a $\gamma + \gamma' + \bar{\gamma} = 180°$. Potom už sestrojíme $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. To je ovšem postup dosti zdlouhavý, zvláště když musíme uvažované úhly sčítat graficky.

Zde se však nabízí řešení mnohem jednodušší (obr. 99). Užijeme vlastností trojice $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$, o níž víme, že podle věty 45 a podmínek v zadání úlohy má vnitřní úhly velikostí po řadě 90°, 30° a 60°. Narýsujeme-li aspoň dva z této trojice trojúhelníků, například $\triangle A_0BC$ a $\triangle AB_0C$, potom se přímky AA_0 a BB_0 protnou v bodě P, který je hledaným pólem.

Konstrukce je vlastně již popsána v rozboru, jenom připomeňme, že $\sphericalangle BCA_0 = 60°$, $\sphericalangle CBA_0 = 30°$, $\sphericalangle ACB_0 = 60°$ a konečně $\sphericalangle CAB_0 = 90°$.



Obr. 99

Příklad 4. K dané dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P $[AB = 5;\ BC = 5{,}5;\ CA = 6{,}5;\ AP = 4;\ BP = 2{,}5]$ sestrojte trojici k ní příslušných trojúhelníků $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$ a $\triangle A_cB_cP$, avšak tak, že nenarýsujete kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABP$, $\triangle BCP$ a $\triangle ACP$.

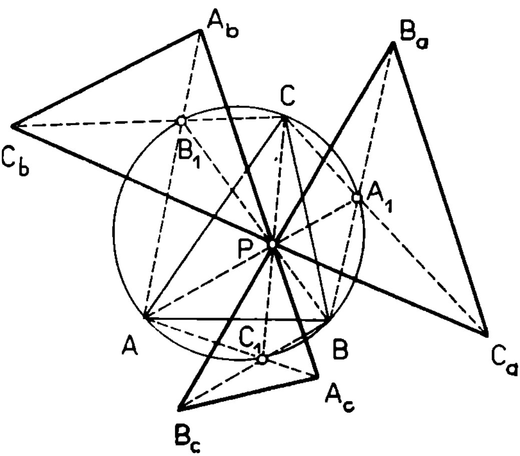
Řešení. Užijeme opět věty 49. Nejdříve narýsujeme přímky, které procházejí pólem P a jsou po řadě rovnoběžné se stranami $\triangle A_1B_1C_1$, a to $C_aC_b \parallel A_1B_1$, $A_bA_c \parallel B_1C_1$ a $B_aB_c \parallel A_1C_1$ (obr. 100).

Chybějících šest vrcholů hledané trojice trojúhelníků nyní již snadno sestrojíme, neboť:

vrchol A_b leží na polopřímce $\overrightarrow{AB_1}$,

vrchol A_c na polopřímce $\overrightarrow{AC_1}$,

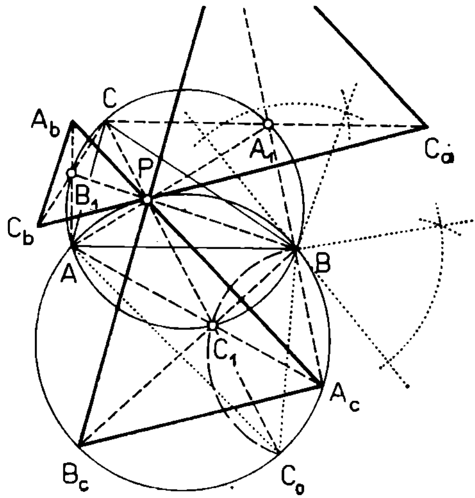
B_a na $\overrightarrow{BA_1}$, C_a na $\overrightarrow{CA_1}$, B_c na $\overrightarrow{BC_1}$, C_b na $\overrightarrow{CB_1}$.



Obr. 100

Příklad 5. Je dán $\triangle ABC_0$ příslušný k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] z relace $\boldsymbol{p}$ podle P. Jeho strany mají velikosti $AB = 6$ cm, $BC_0 = 5{,}4$ cm, $AC_0 = 7{,}8$ cm. Sestrojte příslušnou trojici $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$ a $\triangle A_cB_cP$, víte-li, že jde o trojici rovnostranných trojúhelníků.

Rozbor (obr. 101). Ze zadání vyplývá, že v množině $\boldsymbol{M}_{Tc}$ předpokládáme existenci dvojice $[\triangle ABC_0, \triangle A_cB_cP] \in \boldsymbol{p}$ podle C_1 v souladu s důsledky věty 46



Obr. 101

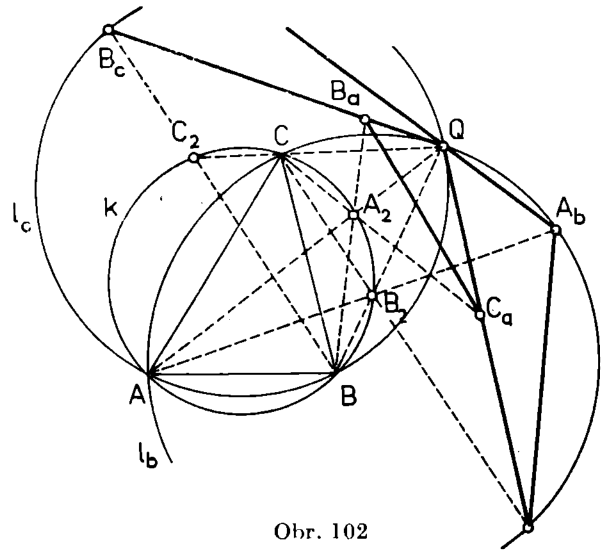
(viz obr. 87). Řešení dané úlohy tedy bude spočívat v tom, že v kružnici l_c opsané danému $\triangle ABC_0$ sestrojíme takový pól C_1, aby obraz $\triangle ABC_0$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle C_1 byl rovnostranný trojúhelník. Podle věty 4 takový trojúhelník dovedeme sestrojit.

Konstrukce. Především opíšeme $\triangle ABC_0$ kružnici l_c a s pomocí úsekových úhlů sestrojíme kružnicové oblouky $\widehat{AC_1B}$ a $\widehat{BC_1C_0}$ s obvodovými úhly velikostí $\sphericalangle AC_1B = \sphericalangle AC_0B + 60°$, $\sphericalangle BC_1C_0 = \sphericalangle BAC_0 + 60°$. Tyto oblouky se protínají v hledaném bodě C_1. Opíšeme-li nyní kružnici k trojúhelníku ABC_1, protne přímka C_0C_1 kružnici l_c v bodě P a kružnici k v bodě C. Známe-li $\triangle ABC$ a hledaný pól P, snadno sestrojíme i $\triangle A_1B_1C_1$ a tři hledané trojúhelníky. Kružnice l_b a l_a ani rýsovat nemusíme (viz příklad 4).

Příklad 6. Do kružnice $k = (O; 3{,}5 \text{ cm})$ vepište $\triangle ABC$ [$AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm] a určete polohu pólu Q tak, aby o rozměrech trojúhelníků z dvojice [$\triangle ABC$, $\triangle A_2B_2C_2$] $\in \boldsymbol{q}$ podle Q a k ní příslušné trojice $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$ a $\triangle A_cB_cQ$ platilo:

$$\overline{B_2C_2} : \overline{QC_b} : \overline{B_cQ} = 7 : 12 : 11.$$

Řešení. Podle věty 48 je $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A_bQC_b \sim$



Obr. 102

$\sim \triangle A_cB_cQ$, takže rozměry těchto trojúhelníků mají velikosti úměrné. Platí-li to o stranách těchto trojúhelníků, platí to také o velikostech poloměrů kružnic jim opsaných. Je tedy podle zadání

$$r : r_b : r_c = 7 : 12 : 11 = 35 : 60 : 55,$$

protože je $r = 35$ poloměr kružnice opsané $\triangle A_2B_2C_2$. Známe tedy velikosti $r_b = 60$ mm, $r_c = 55$ mm.

Konstrukce (obr. 102). Narýsujeme nejdříve kružnici l_b, která prochází body A a C a má poloměr velikosti 60 mm, potom kružnici l_c poloměrem 55 mm tak, aby procházela body A a B. Tyto kružnice se protínají v hledaném pólu Q.

Diskuse. Kružnice l_b a l_c lze narýsovat ve čtyřech odlišných polohách, takže úloha má čtyři řešení. Zde jsme však uvedli jenom jedno z nich.

Cvičení

1. K danému $\triangle ABC$ [$AB = 7$; $BC = 5$; $\sphericalangle ABC = 90°$] sestrojte trojici $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$, $\triangle A_cB_cP$ příslušnou k dvojici z relace **p** podle P, leží-li pól P uvnitř $\triangle ABC$ tak, že $\sphericalangle BCP = \sphericalangle CBP = 30°$.
2. Opakujte cvičení 1, avšak tak, že pól P umístíte vně $\triangle ABC$ tak, že $\sphericalangle CAP = \sphericalangle ACP = 15°$.
3. Je dán $\triangle KLM$ [$KL = 9$; $LM = 5$; $KM = 7$] a pól Q, který leží v polorovině $\overrightarrow{KLM}$ na tečně sestrojené v bodě L ke kružnici $\triangle KLM$ opsané, přičemž $LQ = 4$. Sestrojte trojici $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$, $\triangle A_cB_cQ$ příslušnou k dvojici z relace **q** podle Q.
4. Do kružnice o poloměru $r = 3{,}5$ cm vepište pravoúhlý rovnoměrný $\triangle EFG$ s pravým úhlem při vrcholu F. Na prodloužení výšky příslušné ke straně EG určete bod Q tak, aby FQ mělo velikost této výšky. Potom sestrojte trojici $\triangle ABC_0$, $\triangle AB_0C$, $\triangle A_0BC$ i trojici $\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$, $\triangle A_cB_cQ$ příslušné k dvojici z relace **q** podle Q.

K přesnému sestrojení jednotlivých bodů využijte známých pomocných konstrukcí.

5. Jsou dány velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle P nebo Q (když střední složka je $\triangle A_2B_2C_2$). Zjistěte velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků z trojice $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle ABC_0$ příslušné k dané trojici. Podle výsledku udejte polohu příslušného pólu.

a) $\alpha = 58°, \beta = 73°, \alpha' = 49°, \beta' = 28°, \bar{\gamma} = 28°$;
b) $\alpha = 12°, \beta = 115°, \alpha' = 21°, \beta' = 135°, \bar{\gamma} = 77°$;
c) $\alpha = 69°, \beta = 54°, \alpha' = 13°, \beta' = 23°, \bar{\gamma} = 93°$;
d) $\alpha = 81°, \beta = 44°, \alpha' = 55°, \beta' = 42°, \bar{\gamma} = 152°$;

6. Je dán $\triangle MNZ$ $[MN = 5;\ NZ = 6;\ ZM = 7]$. Sestrojte pól P tak, aby rozměry trojúhelníků v trojici $\triangle M_0NZ$, $\triangle MN_0Z$ a $\triangle MNZ_0$ příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle P byly v poměru 3 : 4 : 6. Stanovte nejdříve počet řešení a potom některé sestrojte.

7. Opakujte úlohu 6 pro pól Q a poměr velikostí stran uvažovaných trojúhelníků 2 : 6 : 7.

8. Narýsujte libovolnou dvojici trojúhelníků z relace $\boldsymbol{p}$ podle pólu P, který leží uvnitř zvolené dvojice, a současně i trojúhelník z relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle téhož pólu P.
   a) Označte první složku relace $\triangle ABC$ a na $\triangle PBC_1$ ověřte pravdivost tvrzení:
   $$\alpha + \alpha' + \bar{\alpha} = \beta + \beta' + \bar{\beta} = \gamma + \gamma' + \bar{\gamma},$$
   kde užité znaky mají význam podle textu.
   b) V narýsovaném obrázku vyhledejte další trojúhelníky podobné $\triangle PBC_1$.

9. Je dán $\triangle A_cB_cP$ $[A_cB_c = 8;\ PA_c = 6;\ PB_c = 5]$ z trojice příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle P. Sestrojte zbývající dva trojúhelníky z této trojice, víte-li, že $PB_a = 4$, $PA_b = 7$. Narýsujte i $\triangle A_1B_1C_1$, avšak kružnici jemu opsanou nerýsujte!

10. Je dána úsečka $A_bA_c = 11$ cm, jejíž krajní body jsou vrcholy trojúhelníků z trojice příslušné k relaci podle pólu Q s první složkou $\triangle ABC$. Pól Q dělí úsečku A_bA_c tak, že $A_bQ = 7$ cm a bod B_a půlí úsečku QB_c. Dále je známa velikost vnitřního úhlu $\sphericalangle B_2A_2C_2 = 120°$ příslušného rovnoramenného $\triangle A_2B_2C_2$. Sestrojte $\triangle ABC$!

11. Na kružnici $k = (O;\ 3{,}5)$ jsou dány body A a B [$AB = 4{,}5$] a body B_1, C_1 [$AB_1 = 6$; $AC_1 = 2$]. Pól P je hlavním vrcholem rovnoramenného $\triangle A\overline{A}P$, kde $\overline{A}$ je vrchol $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle P. Sestrojte $\triangle ABC$ a $\triangle ABC_0$ příslušný k dvojici z relace $\boldsymbol{p}$ podle P.

12. Je dán $\triangle K_1L_1M_1$ [$K_1L_1 = 7$; $L_1M_1 = 5{,}5$; $\sphericalangle K_1L_1M_1 = 60°$] a velikosti úseček $K\overline{K} = L\overline{L} = 2$, kde $\sphericalangle K_1L_1M_1$ je druhá složka z relace $\boldsymbol{p}$ podle P a $\overline{K}$, $\overline{L}$ vrcholy $\triangle \overline{K}\overline{L}\overline{M}$ z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle P. Narýsujte trojici trojúhelníků $\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$, $\triangle A_cB_cP$ příslušnou k těmto relacím, aniž narýsujete kružnice hledané trojici opsané.

13. Je dán $\triangle U_1V_1Z_1$ [$U_1V_1 = 6{,}5$; $V_1Z_1 = 7$; $r = 3{,}8$] a velikosti úseček $U_1Z = U_1\overline{V} = 3$, kde $\overline{V}$ je vrchol $\triangle \overline{U}\overline{V}\overline{Z}$ z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$. Sestrojte trojici $\triangle U_0VZ$, $\triangle UV_0Z$, $\triangle UVZ_0$, aniž narýsujete kružnice jim opsané.

14. Je dán $\triangle EFG$ [$EF = 4{,}5$; $FG = 6$; $GE = 6{,}5$] a dva vnitřní úhly $\sphericalangle EF_0G = 45°$ a $\sphericalangle EG_0F$ trojúhelníků z trojice příslušné k relaci [$\triangle EFG$, $\triangle E_1F_1G_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle P. Sestrojte tuto trojici i trojici $\triangle PF_eG_e$, $\triangle E_fPG_f$, $\triangle E_gF_gP$, aniž narýsujete kružnice těmto trojicím opsané.

15. Opakujte úlohu 14, avšak s úhly velikostí $\sphericalangle EF_0G = 135°$, $\sphericalangle GE_0F = 25°$. Zdůvodněte, proč v tomto případě nelze užít relace $\boldsymbol{p}$ podle P, ale relace $\boldsymbol{q}$ podle Q. Potom sestrojte $\triangle E_fQG_f$.

16. K libovolně zvolenému $\triangle ABC$ sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle pólu P, který leží uvnitř $\triangle ABC$. Potom pokládejte $\triangle A_1B_1C_1$ za první složku v relaci [$\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ABC$] $\in \boldsymbol{p}$ podle P a sestrojte k ní příslušný trojúhelník $A_1B_1C_0'$ a v kružnici jemu opsané $\triangle A_c'B_c'P$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle pólu C. Dokažte, že je $\triangle A_c'B_c'P \sim \triangle ABC$.

17. Úlohu 16 opakujte pro pól P ležící vně $\triangle ABC$.

18. Úlohu 16 opakujte pro pól Q ležící uvnitř $\sphericalangle BAC$.

19. Úlohu 16 opakujte pro pól Q ležící v úhlu vrcholovém k $\sphericalangle BAC$.

20. K zvolenému $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle P sestrojte první složku $\triangle ABC$, víte-li, že k této dvojici příslušné trojúhelníky $\triangle ABC_0$, $\triangle AB_0C$, $\triangle A_0BC$ jsou rovnostranné.

21. Uvažte, lze-li úlohu 20 za stejných podmínek řešit i pro vnější pól Q.

22. Vně libovolného $\triangle ABC$ narýsujte trojúhelníky $\triangle ABC_0 \sim \sim \triangle AB_0C \sim \triangle A_0BC$ takové, že $\overline{AB} : \overline{BC_0} : \overline{C_0A} = 5 : 6 : 7$. Přímky AA_0, BB_0 a CC_0 procházejí jedním bodem. Dokažte! O který bod jde?

23. Je dána dvojice $[\triangle A_bPC_b, \triangle AB_0C] \in \boldsymbol{p}$ podle B_1 příslušná k dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P: $A_bP = 7{,}3$; $C_bP = 6{,}2$; $\sphericalangle A_bPC_b = 43°$; $AC = 5{,}8$; $\sphericalangle B_0AC = 67°$.
a) Určete velikosti stran a vnitřních úhlů $\triangle ABC$.
b) Sestrojte a proveďte přibližnou kontrolu měřením!

24. Je dán $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ $[\bar{A}\bar{B} = 4{,}8;\ \sphericalangle \bar{B}\bar{A}\bar{C} = 72°;\ \sphericalangle \bar{C}\bar{B}\bar{A} = 65°]$ a některé rozměry trojúhelníků k této dvojici příslušných, a to: $AB_0 = 6$; $BC_0 = 7{,}4$; $CA_0 = 5{,}2$. Narýsujte všechny v textu uvedené trojúhelníky.

25. Zvolte libovolný $\triangle EFG$, jeho vnitřní bod označte P a sestrojte dvojici $\triangle EFG\ \boldsymbol{p}\ \triangle E_1F_1G_1$ podle P a k ní příslušné trojice $[\triangle ABC_0, \triangle AB_0C, \triangle A_0BC]$, $[\triangle A_cB_cP, \triangle A_bPC_b, \triangle PB_aC_a]$, aniž narýsujete kružnice těmto trojicím opsané l_a, l_b, l_c.

26. Opakujte úlohu 25 pro relaci $[\triangle KLM, \triangle K_2L_2M_2] \in \boldsymbol{q}$ podle Q.

27. Zvolte libovolný $\triangle ABC$ a vnější pól Q na tečně vedené v bodě B ke kružnici $\triangle ABC$ opsané. Potom narýsujte dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2$ podle Q a trojice trojúhelníků k ní příslušné.

28. Úlohu 27 opakujte s tím rozdílem, že pól Q bude průsečíkem tečen vedených ke kružnici $\triangle ABC$ opsané v jeho vrcholech B a C.

B. ZVLÁŠTNÍ PŘÍPADY PODOBNÝCH ZOBRAZENÍ

Ve druhé kapitole jsme shledali, že zvláštním polohám pólů P nebo Q odpovídají zvláštní vlastnosti dvojic trojúhelníků podle nich utvořených. Můžeme proto právem předpokládat, že se tyto zvláštní vlastnosti projeví i u trojic trojúhelníků k nim příslušných, tj. [$\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle ABC_0$] a [$\triangle PB_aC_a$, $\triangle A_bPC_b$, $\triangle A_cB_cP$] nebo [$\triangle QB_aC_a$, $\triangle A_bQC_b$, $\triangle A_cB_cQ$].

Ukažme nejdříve, jaké důsledky z toho plynou pro dvojice utvořené podle středů kružnic danému trojúhelníku vepsaných.

Věta 50. *Mějme dvojici* [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *kde* S *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané, a k ní příslušné trojice* [$\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$, $\triangle ABC_0$] *a* [$\triangle SB_aC_a$, $\triangle A_bSC_b$, $\triangle A_cB_cS$]. *Potom platí:*

a) $\triangle A_0BC \cong \triangle SB_aC_a$, $\triangle AB_0C \cong \triangle A_bSC_b$, $\triangle ABC_0 \cong \triangle A_cB_cS$,

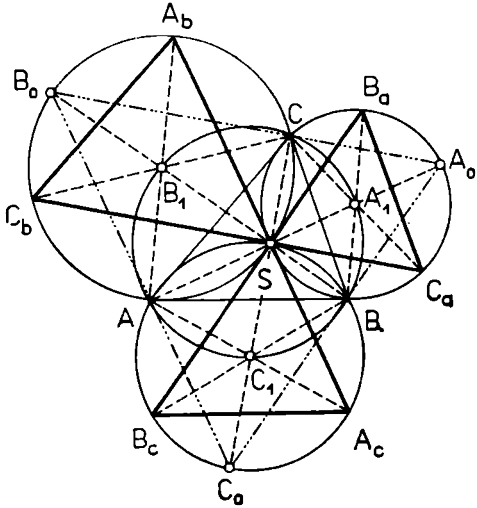
b) $\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle A_1B_1C_1$,

c) *Vrcholy* A_0, B_0 *a* C_0 *jsou středy kružnic* $\triangle ABC$ *vně vepsaných.*

Důkaz. Všechna tvrzení uvedená v této větě vyplývají přímo z dříve dokázaných vět. Stačí je jenom připomenout podle obr. 103.

a) Podle věty 19 jsou body A_1, B_1 a C_1 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům $\triangle SBC$, $\triangle ASC$ a $\triangle ABS$. Protože tyto vrcholy jsou póly v relacích $\boldsymbol{p}$ podle A_1, B_1 a C_1, jde o středovou souměrnost v množinách $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_{Tc}$ a uvažované dvojice jsou shodné. (3.41)

b) Podle věty 47 je například $\triangle SB_aC_a \sim \triangle A_1B_1C_1$ a současně podle (3.41) $\triangle SB_aC_a \cong \triangle A_0BC$, takže je také $\triangle A_0BC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Obdobně pak $\triangle AB_0C \sim \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ABC_0 \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Obr. 103

c) Zde podle věty 25 je například přímka $\overleftrightarrow{AA_0}$ osou $\sphericalangle BAC$ a střed S_a leží na kružnici opsané $\triangle BSC$, takže je $S_a \equiv A_0$ a obdobně také $S_b \equiv B_0$ i $S_c \equiv C_0$.

Právě dokázaná věta má ještě další důsledky, z nichž nejdůležitější jsou:

1. O velikostech vnitřních úhlů v trojúhelnících $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$ platí

$$\bar{\alpha} = \alpha' = 90° - \frac{\alpha}{2}, \bar{\beta} = \beta' = 90° - \frac{\beta}{2},$$

$$\bar{\gamma} = \gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2};$$

2. Ze středové souměrnosti v množinách $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$, $\boldsymbol{M}_{Tc}$ vyplývá:

$$\overleftrightarrow{A_cB_c} \parallel \overleftrightarrow{AB} \wedge \overline{A_cB_c} = \overline{AB}, \overleftrightarrow{B_aC_a} \parallel \overleftrightarrow{BC} \wedge \overline{B_aC_a} = \overline{BC},$$

$$\overleftrightarrow{C_bA_b} \parallel \overleftrightarrow{CA} \wedge \overline{C_bA_b} = \overline{CA};$$

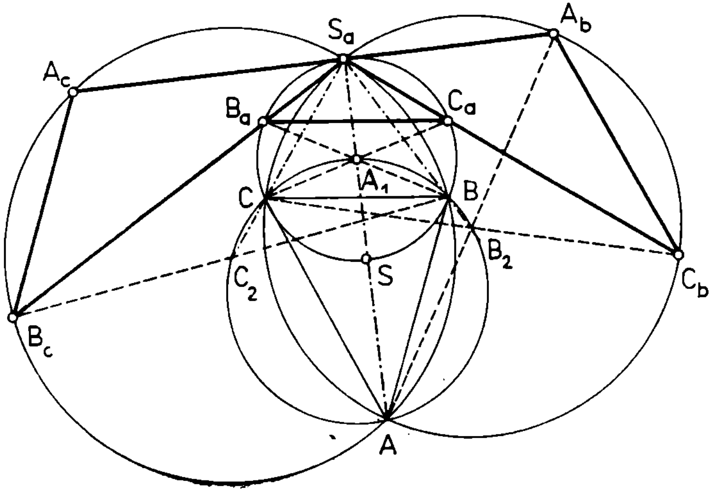
3. Vrcholy A_0, B_0 a C_0 jsou vrcholy trojúhelníku, v němž kružnice opsaná $\triangle ABC$ je kružnicí Feuerbachovou (viz větu 27).

Věta 51. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1A_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *kde* S_a *je střed kružnice vně vepsané* $\triangle ABC$ *proti vrcholu* A *a k této dvojici příslušné trojice* $[\triangle A_0BC, \triangle AB_0C, \triangle ABC_0]$ *a* $[S_aB_aC_a, \triangle A_bS_aC_b, \triangle A_cB_cS_a]$.
Potom platí:
a) $\triangle A_0BC \cong \triangle S_aB_aC_a$, $\triangle AB_0C \cong \triangle A_bS_aC_b$, $\triangle ABC_0 \cong \triangle A_cB_cS_a$;
b) $\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle A_1B_2C_2$;
c) *Vrchol* A_0 *je středem kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané.*

Důkaz (obr. 104). Z věty 25 opět vyplývá, že bod A_1 je středem kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle A_0BC$ a $\triangle S_aB_aC_a$, takže příslušná relace $\boldsymbol{p}$ podle A_1 v množině $\boldsymbol{M}_{Ta}$ je středovou souměrností. To však pro důkaz věty 51 nestačí, neboť musíme ještě dokázat, že bod B_2 je středem kružnice opsané $\triangle ABS_a$ a bod C_2 středem kružnice opsané $\triangle ACS_a$.

Především je podle věty 5 $\sphericalangle CS_aB = \alpha' - \alpha$. Dosadíme-li sem podle věty 23 a $\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}$, dostaneme

$$\sphericalangle CS_aB = 90° + \frac{\alpha}{2} - \alpha = 90° - \frac{\alpha}{2}. \qquad (3.42)$$



Obr. 104

Dále je v kružnici k $\sphericalangle CC_2B = \sphericalangle CAB = \alpha$, takže v $\triangle C_2BS_a$ $\sphericalangle C_2BS_a = 180° - \sphericalangle CS_aB - \sphericalangle CC_2B$ a potom podle (3.42)

$$\sphericalangle C_2BS_a = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha = 90° - \frac{\alpha}{2}. \qquad (3.43)$$

Porovnáme-li (3.42) a (3.43), zjistíme, že $\triangle C_2S_aB$ má dva úhly shodné a je rovnoramenný, čili $\overline{C_2S_a} = \overline{C_2B}$. Rovnost $\overline{C_2A} = \overline{C_2B}$ plyne z věty 22, a proto body A, B a S_a leží na kružnici opsané kolem středu C_2. Cyklickou záměnou dostaneme i další rovnosti

$$\overline{B_2A} = \overline{B_2C} = \overline{B_2S_a}.$$

Tím jsme současně dokázali, že relace $\boldsymbol{p}$ podle A_1, B_2 a C_2 v množinách $\boldsymbol{M}_{Ta}$, $\boldsymbol{M}_{Tb}$ a $\boldsymbol{M}_{Tc}$ jsou středovými souměrnostmi a odtud plyne shodnost dvojic trojúhelníků uvedených v tvrzení a) věty 51.

Tvrzení b) snadno odvodíme z věty 48, protože podle této věty je například $\triangle S_aB_aC_a \sim \triangle A_1B_2C_2$ a současně podle tvrzení a) věty 51 $\triangle A_0BC \cong \triangle S_aB_aC_a$, takže je $\triangle A_0BC \sim \triangle A_1B_2C_2$ a z cyklických záměn pak plyne: $\triangle AB_0C \sim \triangle A_1B_2C_2$, $\triangle ABC_0 \sim \triangle A_1B_2C_2$.

Tvrzení c) je jako u věty 50 důsledkem věty 25, neboť je $A_0 \equiv S$.

Nežli uvedeme důsledky právě dokázané věty, je třeba vzít v úvahu ještě cyklické záměny pro póly S_b a S_c, protože věta 51 byla vyslovena pouze ve vztahu k pólu S_a.

Tyto záměny ovšem uvedeme bez důkazu:

Je-li pólem střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu B, bude

a) $\triangle AB_0C \cong \triangle A_bS_bC_b$, $\triangle ABC_0 \cong \triangle A_cB_cS_b$,
$\triangle A_0BC \cong \triangle S_bB_aC_a$;

b) $\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle A_2B_1C_2$;

c) Vrchol B_0 je středem kružnice $\triangle ABC$ uvnitř vepsané.

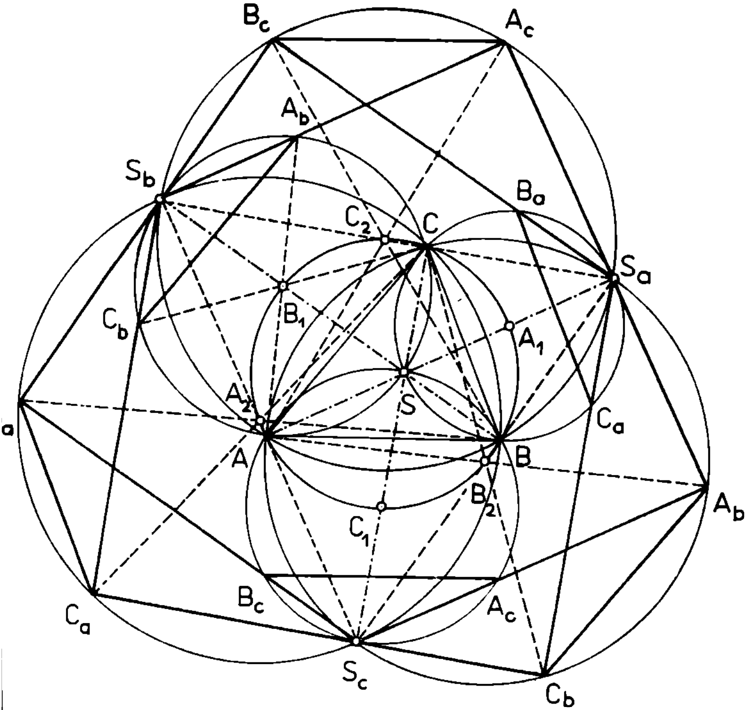
Je-li pólem střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu C, bude

a) $\triangle ABC_0 \cong \triangle A_cB_cS_c$, $\triangle A_0BC \cong \triangle B_aC_aS_c$,
$\triangle AB_0C \cong \triangle A_bS_cC_b$;

b) $\triangle A_0BC \sim \triangle AB_0C \sim \triangle ABC_0 \sim \triangle A_2B_2C_0$;

c) Vrchol C_0 je středem kružnice $\triangle ABC$ uvnitř vepsané.

Na obr. 105 jsou v jednom obrázku zakresleny všechny tři trojice trojúhelníků příslušných k dvojicím uvedeným ve větě 51 a jejích důsledcích podle cyklických záměn. Z obrázku lze snadno zjistit, že se některé vrcholy zobrazených trojúhelníků navzájem kryjí a mimoto se jejich označení vyskytuje ještě jednou v jiné trojici. Najdeme proto každou z dvojic $[A_cB_c]$, $[B_aC_a]$ a $[C_bA_b]$



Obr. 105

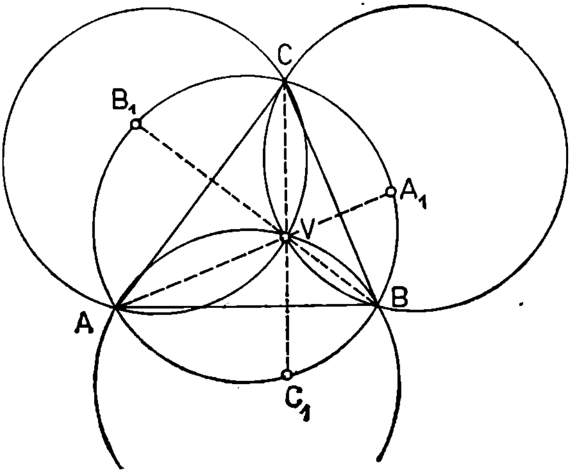
v obrazci třikrát. Současně pak některé vrcholy splývají, a to:
$S_a \equiv B_0 \equiv C_0$, $A_0 \equiv S_b \equiv C_0$, $A_c \equiv B_c \equiv S_0$. Ovšem také $S \equiv A_0 \equiv B_0 \equiv C_0$, kde S je střed kružnice uvnitř vepsané $\triangle ABC$.

Z téhož obrázku lze vyčíst i další důsledky věty 51 zcela obdobné důsledkům uvedeným za větou 50. Není nutné je proto opakovat. Jsou tu však ještě další, z nichž uveďme aspoň jeden:
V šestiúhelníku $A_bC_bC_aB_aB_cA_c$ lze nalézt několik čtyřúhelníků pravoúhlých, jako například $A_cA_bS_cS_b$ nebo také $AS_aA_bS_c$ a podobně. Že jde o pravoúhlé čtyřúhelníky, není nutno dokazovat, vyplývá to z Thaletovy věty, nebo z věty 27, podle níž je kružnice opsaná $\triangle ABC$ Feuerbachovou kružnicí $\triangle S_aS_bS_c$. Také dvojice $[A_cB_c]$, $[B_aC_a]$ a $[C_bA_b]$, které se v obr. 105 opakují, jsou vrcholy obdélníků, jak dokážeme v příkladech připojených na konci této části kapitoly.

Věta obecné platnosti, kterou nyní uvedeme, zahajuje úvahy o vlastnostech trojic trojúhelníků odvozených z relace p nebo q podle průsečíku výšek $\triangle ABC$.

Věta 52. *Je-li bod V průsečíkem výšek daného $\triangle ABC$, potom kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle VBC$, $\triangle AVB$, $\triangle ABV$ a $\triangle ABC$ jsou navzájem shodné.*

Důkaz (obr. 106). Připomeňme si větu 36. Podle ní je například vrchol A_1 $\triangle A_1B_1C_1$ z relace p podle V souměrně sdružený podle osy BC s pólem V. Je tedy $\triangle VBC \cong \triangle A_1BC$ a odtud plyne, že i kružnice opsané těmto dvěma trojúhelníkům jsou navzájem shodné. Obdobně platí $\triangle AVC \cong \triangle AB_1C$ a také $\triangle ABV \cong$ $\cong \triangle ABC_1$, takže všechny čtyři uvažované kružnice jsou navzájem shodné. Bude-li trojúhelník ABC pravoúhlý, potom neexistují trojúhelníky $\triangle VBC$, $\triangle AVB$, $\triangle ABV$ a nemá smyslu uvažovat, zda věta 52 platí i pro takový trojúhelník. Bude-li však tupoúhlý, platí věta 36 a tudíž i věta 52.



Obr. 106

Věta 53. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* V *nebo dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* V *takové, že žádný vnitřní úhel* $\triangle ABC$ *není pravý a* V *je průsečík výšek* $\triangle ABC$.

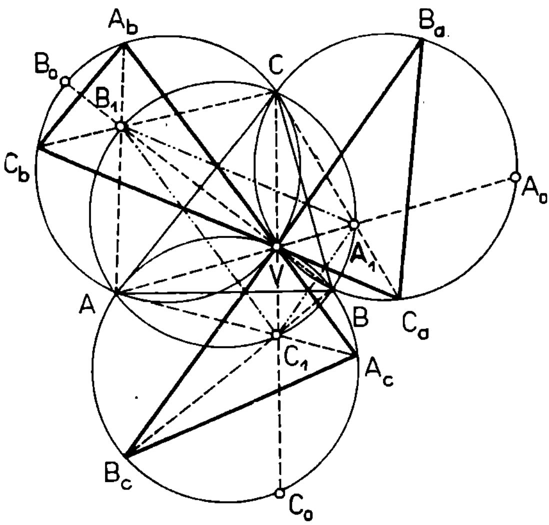
Potom o trojúhelnících z trojic příslušných k dané dvojici platí:

a) $\triangle A_0BC \cong \triangle AB_0C \cong \triangle ABC_0 \cong \triangle ABC$.

b) *Trojúhelníky* $\triangle VB_aC_a$, $\triangle A_bVC_b$ *a* $\triangle A_cB_cV$ *jsou souměrně sdruženy s* $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle A_2B_2C_2$ *podle stran* $\triangle ABC$.

c) *Body A_1, B_1, C_1 nebo A_2, B_2, C_2 jsou po řadě průsečíky výšek v trojúhelnících $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$, současně pak středy kružnic vepsaných trojúhelníkům $\triangle VB_aC_a$, $\triangle A_bVC_b$ a $\triangle A_cB_cV$.*

Důkaz (obr. 107). a) Na obr. 107 je $\triangle ABC$ ostroúhlý. Podle věty 36, jak jsme již připomněli, je přímka BC osou úsečky VA_1 a podle věty 52 i osou souměrnosti kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle VBC$ a $\triangle A_1BC$. Přímka VA_1 proto protíná tyto kružnice v bodech souměrně sdružených podle osy BC, takže trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_0BC$ jsou rovněž souměrně sdruženy podle



Obr. 107

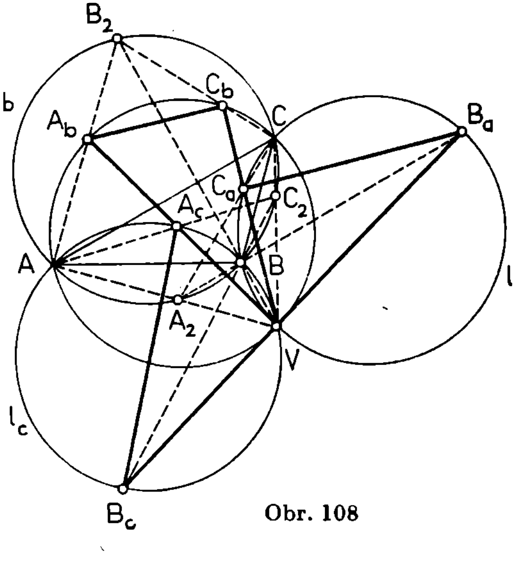
osy BC a jsou shodné. Doplníme-li tento výsledek cyklickými záměnami, dostáváme:

$$\triangle A_0BC \cong \triangle AB_0C \cong \triangle ABC_0 \cong \triangle ABC.$$

b) Protože v popsané osové souměrnosti je bod A_1 obrazem bodu V, je dvojice $[\triangle A_0BC, \triangle VB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ podle A_1 obrazem dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.

c) Z toho dále plyne, že body A_1, B_1 a C_1 jsou průsečíky výšek v trojúhelnících $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$. To však podle věty 30 současně znamená, že tyto body jsou středy kružnic vepsaných trojúhelníkům $\triangle VB_aC_a$, $\triangle A_bVC_b$ a $\triangle A_cB_cV$.

Tím je důkaz věty 53 podán pouze pro trojúhelník ostroúhlý. Z obr. 108 však je zřejmé, že tato věta platí



Obr. 108

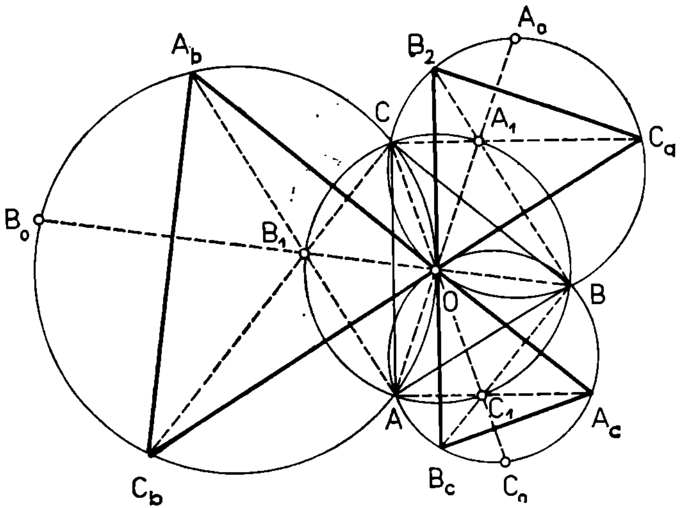
i v trojúhelníku tupoúhlém, neboť rozdíly jsou právě jenom v indexech, jak je možno se přesvědčit.

Pozornému čtenáři jistě neušla skutečnost, že se tu projevují důsledky vět 45 a 46 týkajících se podobných dvojic z množin M_T, M_{Ta}, M_{Tb} a M_{Tc}. Ukažme ještě, jak se to projeví v relacích podle středu kružnice $\triangle ABC$ opsané nebo podle jeho těžiště.

Věta 54. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* O, *kde* O *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *opsané. Potom o trojicích trojúhelníků k ní příslušných platí:*

Vrcholy A_1, B_1 *a* C_1 *jsou po řadě*

a) *středy kružnic uvnitř vepsaných trojúhelníkům* $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ *a* $\triangle ABC_0$,



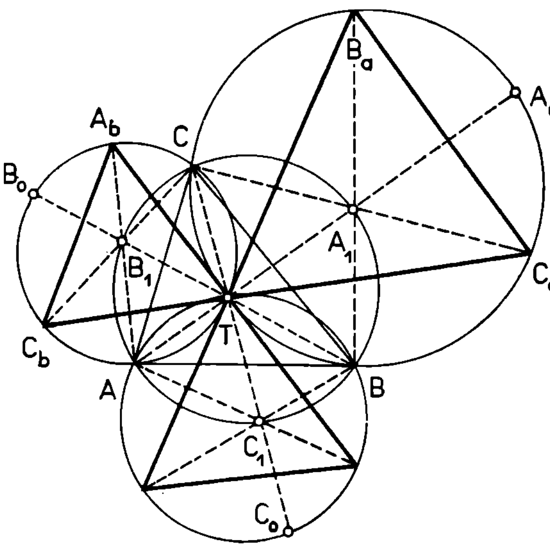
Obr. 109

b) *průsečíky výšek trojúhelníků* $\triangle OB_aC_a$, $\triangle A_bOC_b$ *a* $\triangle A_cB_cO$.

Důkaz (obr. 109). Pravdivost věty vyplývá přímo z vět 38 a 45. Srovnáme-li totiž obr. 91 a 92 s obr. 109, vidíme, že na obr. 109 je například bod A_1 obrazem pólu $\bar{O}$ v podobnosti $[\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{O} \sim [\triangle A_0BC, \triangle OB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ podle A. V této podobnosti pak platí jak tvrzení a), tak i tvrzení b).

K zcela obdobnému výsledku dospějeme, bude-li pólem těžiště T daného $\triangle ABC$.

Věta 55. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle*



Obr. 110

T, kde T je těžiště $\triangle ABC$. Potom o trojici k ní příslušných trojúhelníků platí:

Vrcholy A_1, B_1 a C_1 jsou po řadě těžišti trojúhelníků $\triangle A_0BC$, $\triangle AB_0C$ a $\triangle ABC_0$.

Důkaz (obr. 110). Podobně jako předcházející věta i tato věta plyne přímo z dříve dokázaných vět, a to věty 41 a 45. Podle věty 41 totiž víme, že v relaci

$$[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } \bar{T}$$

je pól $\bar{T}$ těžištěm $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, takže z podobnosti $[\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{T} \sim [\triangle A_0BC, \triangle TB_aC_a] \in \boldsymbol{p}$ podle A_1 přímo vyplývá, že bod A_1 je obrazem pólu $\bar{T}$, tedy těžištěm $\triangle A_0BC$. Dále pak podle cyklických záměn je B_1 těžištěm $\triangle AB_0C$, C_1 těžištěm $\triangle ABC_0$.

Na závěr této kapitoly si ještě ukážeme, že užitím vlastností relace $\boldsymbol{p}$ podle T je možno řešit úlohu z příkladu 6 v první kapitole. Tam byly dány tři úsečky velikostí a, b, c. Úsečku c jsme měli rozdělit na dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru $a^2 : b^2$. Zde je možno tuto úlohu řešit dvěma způsoby, z nichž jeden ukážeme v příkladech po odvození příslušné věty:

Věta 56. *Mějme dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T takovou, že těžnice $\triangle ABC$ mají velikosti t_a, t_b a t_c. Dále nechť na stranách $\triangle A_1B_1C_1$ leží body*

$$A^+ = (AA_1 \cap B_1C_1);\ B^+ = (BB_1 \cap A_1C_1);$$
$$C^+ = (CC_1 \cap A_1B_1).$$

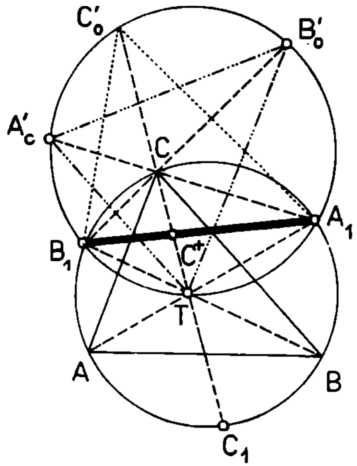
Potom je:

$$A_1C^+ : B_1C^+ = t_b^2 : t_a^2,\ B_1A^+ : C_1A^+ = t_c^2 : t_b^2,$$
$$A_1B^+ : C_1B^+ = t_c^2 : t_a^2.$$

Důkaz (obr. 111). Na obr. 111 je l'_c kružnice opsaná $\triangle A_1B_1T$, C'_0 průsečík této kružnice s přímkou C_1C a konečně C^+ průsečík přímky CT s přímkou A_1B_1.

V kružnici l'_c je $\sphericalangle C'_0B_1A_1 = \sphericalangle C'_0TA_1 = 180° - (\beta + \beta')$, protože $\sphericalangle A_1TC_1 = \beta + \beta'$ podle věty 4.

Obdobně pak $\sphericalangle C'_0A_1B_1 = 180° - (\alpha + \alpha')$.



Obr. 111

Trojúhelník $A_1B_1C'_0$ podle toho má dva úhly shodné s trojúhelníkem $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle $\overline{T}$, jak vyplývá z věty 14. Jsou proto uvažované trojúhelníky podobné: $\triangle A_1B_1C'_0 \sim \triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Vezmeme-li současně v úvahu větu 42, bude

$$A_1C'_0 : B_1C'_0 = t_b : t_a. \tag{3.44}$$

Dále z podobnosti $\triangle A_1B_1T \sim \triangle BAT$ plyne

$$A_1T : B_1T = BT : AT = t_b : t_a. \qquad (3.45)$$

Ze vztahů (3.44) a (3.45) utvořme součin v rovnosti

$$\frac{A_1C_0'}{B_1C_0'} \cdot \frac{A_1T}{B_1T} = \frac{t_b^2}{t_a^2} \qquad (3.46)$$

a levou stranu násobme výrazem

$$\frac{\frac{1}{2}\sin|\sphericalangle C_0'A_1T|}{\frac{1}{2}\sin|\sphericalangle C_0'B_1T|},$$

který se rovná jedné, protože jde o siny protějších úhlů v tětivovém čtyřúhelníku $C_0'A_1TB_1$.

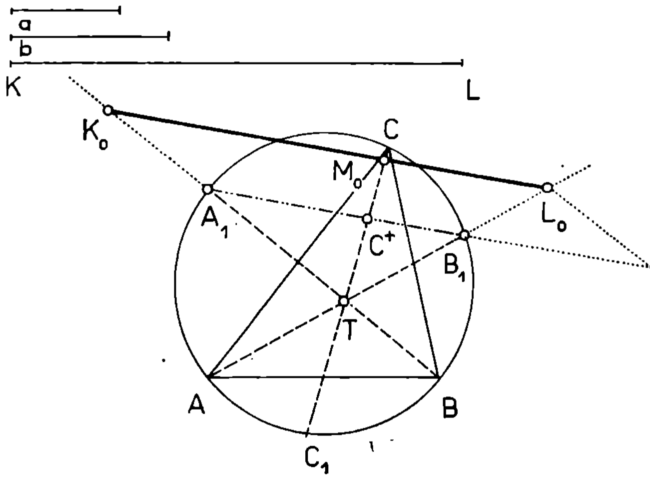
Po vynásobení bude mít (3.46) tento tvar: $\frac{P_1}{P_2} = \frac{t_b^2}{t_a^2}$, kde P_1 je velikost obsahu $\triangle C_0'A_1T$, P_2 pak velikost obsahu $\triangle C_0'B_1T$. Tím se důkaz značně zkrátí, protože obsahy P_1 a P_2 jsou přímo úměrné velikostem úseček A_1C^+, B_1C^+.

Platí proto $A_1C^+ : B_1C^+ = t_b^2 : t_a^2$ a podle cyklických záměn také zbývající dva vztahy z věty 56.

Jak této věty využijeme při řešení zmíněné úlohy, ukažme hned na příkladu:

Příklad 1. Danou úsečku $KL = 12$ cm rozdělte na dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru $a^2 : b^2$, kde $a > b$ jsou velikosti libovolně zvolených úseček.

Konstrukci provedeme užitím věty 56. Zvolíme libovolnou úsečku menší, než je součet daných dvou úseček, tak, že lze sestrojit $\triangle ABT$, kde $\overline{AT} = a$, $\overline{BT} = b$, AB je vhodně zvolená třetí strana $\triangle ABT$ (obr. 112).



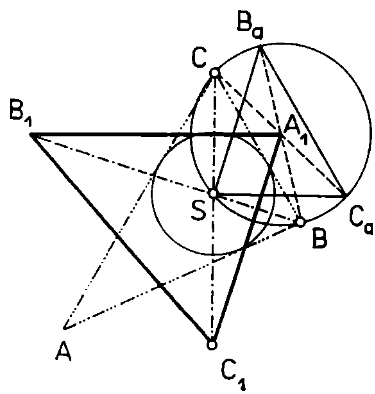
Obr. 112

Nyní určíme bod C tak, aby bod T byl těžištěm $\triangle ABC$. Na prodloužení úsečky AT za bod T určíme bod A^+ tak, že $TA^+ = \frac{1}{2}\,a$, na prodloužení úsečky BT za bod T určíme bod B^+ tak, že $TB^+ = \frac{1}{2}\,b$. Polopřímky BA^+ a AB^+ se protnou v hledaném bodě C.

Trojúhelníku ABC opíšeme kružnici a její průsečík s přímkou AT označíme A_1, průsečík s přímkou BT pak B_1. Podle věty 56 přímka CT dělí úsečku A_1B_1 v požadovaném poměru. K rozdělení dané úsečky KL v tomtéž poměru užijeme například stejnolehlosti, jako je tomu na obr. 112.

Příklad 2. Je dán $\triangle SB_aC_a$ [$SB_a = 4$; $SC_a = 3{,}5$; $B_aC_a = 4{,}5$] příslušný k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in$ $\in \boldsymbol{p}$ podle S. Sestrojte tuto dvojici, je-li S střed kružnice uvnitř vepsané $\triangle ABC$.

Řešení (obr. 113). Víme, že vrchol A_1 je středem kružnice opsané danému $\triangle SB_aC_a$ (věta 19). Dále je strana BC $\triangle ABC$ souměrně sdružená podle středu A_1 se stranou B_aC_a daného trojúhelníku (věta 50). Sestrojíme-li úsečku BC, můžeme narýsovat i kružnici vepsanou $\triangle ABC$, protože známe střed kružnice jemu vepsané a jednu stranu. Zbývající dvě strany pak leží na tečnách vedených z bodů B a C ke kružnici vepsané. Vrchol A je potom jejich průsečík. Můžeme ovšem vrchol A sestrojit

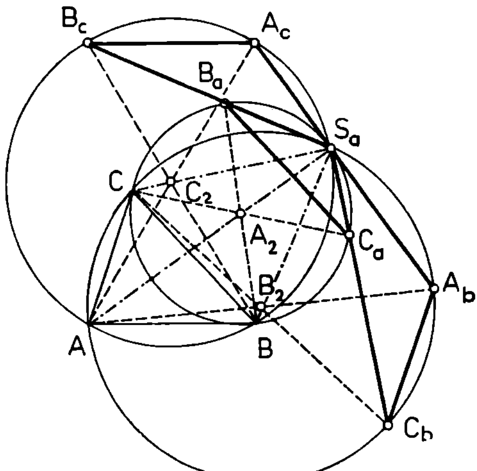


Obr. 113

také tak, že přeneseme úhly $\sphericalangle CBS$ a $\sphericalangle BCS$ do polorovin opačných k polorovinám $\overrightarrow{CBS}$ a $\overrightarrow{BCS}$.

Příklad 3. Je dána strana AB $\triangle ABC$ a střed S_a kružnice jemu vně vepsané proti vrcholu A [$AB = 4{,}5$ cm; $AS_a = 8$ cm; $BS_a = 5$ cm]. Sestrojte trojici trojúhelníků $\triangle S_aB_aC_a$, $\triangle A_bS_aC_b$ a $\triangle A_cB_cS_a$, aniž narýsujete kružnici opsanou $\triangle ABC$.

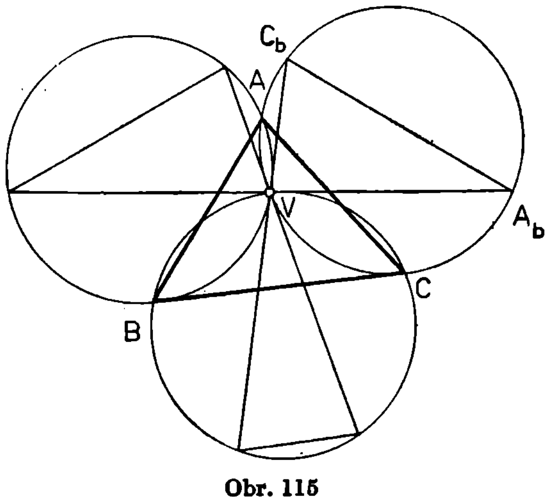
Řešení (obr. 114). Přímka AS_a je osou vnitřního úhlu $\triangle ABC$ při vrcholu A a přímka BS_a osou vnějšího úhlu při vrcholu B. Můžeme tedy sestrojit polopřímky $\overrightarrow{AC}$ a $\overrightarrow{BC}$, které se protnou ve vrcholu C. Opíšeme kružnice



Obr. 114

l_a, l_b a l_c trojúhelníkům $\triangle S_aBC$, $\triangle AS_aC$ a $\triangle ABS_a$. Víme, že středem kružnice opsané $\triangle S_aBC$ je bod A_1 a polopřímky BA_1 a CA_1 protnou kružnici l_a ve vrcholech B_a a C_a jednoho z hledaných trojúhelníků $S_aB_aC_a$. Potom polopřímka S_aC_a protne kružnici l_b ve vrcholu C_b a polopřímka S_aB_a kružnici l_c ve vrcholu B_c. Zbývající dva vrcholy, totiž A_b a A_c, sestrojíme užitím podobnosti $\triangle S_aB_aC_a \sim \triangle A_bS_aC_b \sim \triangle A_cB_cS_a$, například přenesením vnitřních úhlů v $\triangle S_aB_aC_a$.

Příklad 4. Řešte co nejjednoduššími prostředky úlohu: Je dán $\triangle A_bVC_b$ [$VA_b = 65$ mm, $VC_b = 35$ mm, $A_bC_b = 70$ mm] příslušný k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in$ $\in \boldsymbol{p}$ podle V, kde V je průsečík výšek $\triangle ABC$. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle V a zbývající dva trojúhelníky z trojice k této relaci příslušné.



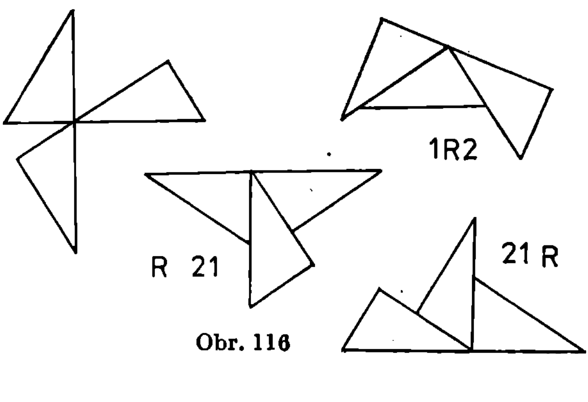
Obr. 115

Řešení. Danému trojúhelníku opíšeme kružnici l_b a sestrojíme střed kružnice uvnitř vepsané B_1. Osa úsečky VB_1 protne kružnici l_b v bodech C a A. Tím je úloha vyřešena, protože zbývající tři kružnice, tj. k, l_a a l_c, jsou shodné s l_b, takže je $AO = CO$, $B_1B \perp AC$ atd. Celá konstrukce je provedena na obr. 115.

Příklad 5. O trojici shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami velikosti 6 cm a 3,6 cm víme, že přísluší k dvojici z relace $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ podle V. Rozhodněte, kolika způsoby lze tuto trojici umístit tak, aby vyhovovala uvedené podmínce, a potom sestrojte jednu z těch možností, kde první trojúhelník v uvažované dvojici je tupoúhlý.

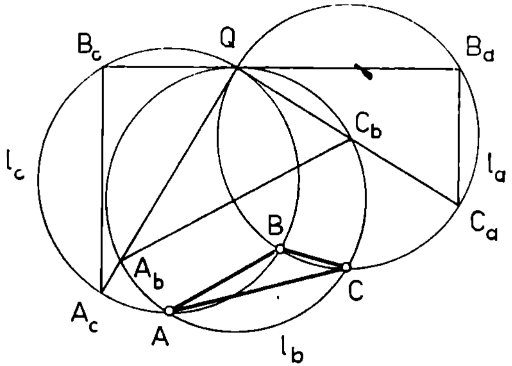
Řešení. Nepřihlédneme-li k označení vrcholů dané trojice trojúhelníků, existují právě čtyři možnosti, jak je umístit vzhledem k daným podmínkám. Tyto čtyři způsoby jsou zobrazeny na obr. 116.

Jestliže první v dvojici trojúhelníků má být ostroúhlý, existuje právě jedno uspořádání, neboť v bodě V,



Obr. 116

který je společným vrcholem daných tří trojúhelníků, se musí krýt vrcholy těchto trojúhelníků tak, že bod V je vrcholem pravého úhlu v jednom trojúhelníku, vrcholem menšího ostrého úhlu ve druhém a většího ostrého ve třetím trojúhelníku.



Obr. 117

Nejinak je tomu v případě, že půjde o trojúhelník tupoúhlý. Zde však existují tři možnosti, které se liší pořadím těchto úhlů v trojici tvořící úhel přímý. Označíme-li pravý úhel R a ostré číslicemi 1 a 2, existují tato tři různá uspořádání: 1 R 2, R 1 2, 1 2 R. Zbývající tři možnosti 2 R 1, 2 1 R, R 2 1 vedou k shodným řešením.

Případ 1 2 R je proveden na obr. 117.

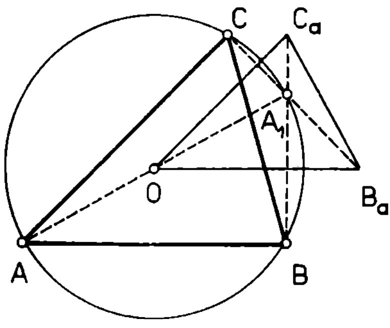
Postup *konstrukce* je zde velmi jednoduchý. Narýsujeme zvolené seskupení dané trojice trojúhelníků a opíšeme jim kružnice l_a, l_b a l_c. Tak dostaneme přímo vrcholy hledaného trojúhelníku. Na obrázku to jsou:

A průsečík kružnic l_b a l_c.
B průsečík ružnic l_a a l_c.
C průsečík kružnic l_a a l_b.

Příklad 6. Daný trojúhelník OB_aC_a [$OB_a = 5{,}5$; $B_aC_a = 4$; $OC_a = 5$] přísluší k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \in \boldsymbol{p}$ podle O, kde O je střed kružnice opsané $\triangle ABC$. Sestrojte $\triangle ABC$.

Řešení. Víme, že podle věty 54 je průsečík výšek v $\triangle OB_aC_a$ vrcholem A_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle O. Sestrojíme-li tedy tento průsečík, získáme i velikost poloměru kružnice opsané $\triangle ABC$. Je to velikost úsečky A_1O. Opíšeme-li tuto kružnici, je vrchol A její průsečík s přímkou A_1O, vrchol C její průsečík s přímkou C_aA_1 a konečně vrchol B její průsečík s přímkou B_aA_1.

Konstrukce je provedena na obr. 118.



Obr. 118

Příklad 7. Je dán obdélník $S_aS_bC_aC_b$ [$S_aS_b = 96$ mm, $S_bC_a = 64$ mm] a na jeho straně S_aS_b bod C takový, že $S_aC = 36$ mm. Bod C je vrchol $\triangle ABC$ a body S_a, S_b středy kružnic jemu vně vepsaných. Body C_a a C_b jsou vrcholy trojúhelníků z trojic příslušných k dvojicím z relací q podle S_c nebo S_a a S_b. Narýsujte $\triangle ABC$ a uvedené trojice trojúhelníků.

Řešení. Podle věty 49 leží pól S_c na přímce C_aC_b a podle věty 27 je úsečka CS_c výškou v trojúhelníku $S_aS_bS_c$. Další dva vrcholy $\triangle ABC$ jsou patami výšek v témž trojúhelníku. Tím je úloha vyřešena. Konstrukci zde neuvádíme, jde o opakování situace na obr. 105.

Cvičení

1. K danému $\triangle ABC$ [$AB = 60$; $BC = 52$; $AC = 67$] sestrojte trojici trojúhelníků $\triangle SB_aC_a$, $\triangle A_bSC_b$, $\triangle A_cB_cS$ příslušnou k relaci p podle S.
2. Je dán $\triangle DEF$ [$DE = 50$; $\sphericalangle FDE = 70°$; $\sphericalangle FED = 50°$] a relace q podle S_f, kde S_f je střed kružnice $\triangle DEF$ vně vepsané. Sestrojte trojici $\triangle S_fE_dF_d$, $\triangle D_eS_fF_e$, $\triangle D_fE_fS_f$.
3. K danému $\triangle KLM$ [$KL = 45$; $LM = 55$; $\sphericalangle KLM = 60°$] sestrojte trojici $\triangle VL_kM_k$, $\triangle K_1VM_1$, $\triangle K_mL_mV$ příslušnou k relaci p podle V.
4. Je dán $\triangle ZMN$ [$ZM = 58$; $MN = 40$; $\sphericalangle ZMN = 110°$] a relace q podle V. Sestrojte k ní příslušnou trojici $\triangle VM_zN_z$, $\triangle Z_mVN_m$, $\triangle Z_nM_nV$.
5. Je dán $\triangle ABC_0$ z trojice příslušné k relaci [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in p$ podle S [$AB = 70$; $BC_0 = 80$; $AC_0 = 85$]. Sestrojte dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$].
6. O daném $\triangle BCS$ [$BC = 50$; $\sphericalangle BCS = 25°$; $\sphericalangle CBS = 30°$] víme, že je částí $\triangle ABC$ a bod S je středem kružnice tomuto trojúhelníku vepsané. Sestrojte střed S_a kružnice $\triangle ABC$ vně vepsané proti vrcholu A a trojice trojúhelníků příslušných k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in p$ podle S_a.
7. Trojúhelník ACB_0 [$AC = 60$; $\sphericalangle ACB_0 = 50°$; $\sphericalangle CAB_0 = 60°$] je z trojice trojúhelníků příslušných k relaci [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in p$ podle V. Sestrojte zbývající dva trojúhelníky z této trojice.
8. K danému $\triangle EFG_0$ [$EF = 65$; $\sphericalangle EFG_0 = 30°$; $\sphericalangle FEG_0 = 80°$] sestrojte trojici $\triangle OF_eG_e$, $\triangle E_fOG_f$, $\triangle E_gF_gO$ příslušnou k relaci p podle O.

9. Daný $\triangle KLM_0$ [$KL = 5$; $KM_0 = 6$; $LM_0 = 7$] je z trojice příslušné k dvojici [$\triangle KLM$, $\triangle K_1L_1M_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle T. Sestrojte tuto dvojici i trojici $\triangle TB_aC_a$, $\triangle A_bTC_b$, $\triangle A_cB_cT$.
10. Vrcholy $\triangle A_0B_0C_0$ [$A_0B_0 = 12$; $B_0C_0 = 10$; $C_0A_0 = 15$] jsou vrcholy trojice trojúhelníků příslušné k relaci [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle S. Sestrojte co nejjednodušším způsobem $\triangle ABC$.
11. Sestrojte $\triangle ABC$ k danému $\triangle SB_aC_a$ [$B_aC_a = 55$, $SC_a = 60$; $SB_a = 45$] z trojice příslušné k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle S.
12. Trojúhelník A_bVC_b [$A_bC_b = 70$; $VA_b = 80$; $VC_b = 45$] je příslušný k dvojici [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle V. Sestrojte tuto dvojici.
13. Sestrojte dvojici [$\triangle EFG$, $\triangle E_2F_2G_2$] $\in \boldsymbol{q}$ podle S_g, je-li $\triangle E_gF_gS_g$ [$E_gS_g = 45$; $F_gS_g = 30$; $\sphericalangle E_gS_gF_g = 130°$] z trojice příslušné k relaci $\boldsymbol{q}$ podle S_g.
14. Víte-li, že $\triangle A_cB_cO$ [$A_cB_c = 6$; $A_cO = 6{,}5$; $B_cO = 4{,}5$] je z trojice trojúhelníků příslušných k relaci [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in \boldsymbol{p}$ podle O, sestrojte $\triangle ABC$.
15. Zvolte trojici bodů E, F, G takových, že neleží v přímce. Dokažte, že v rovině EFG existuje aspoň jeden bod M, který spolu s body E, F, G určuje tři shodné kružnice.
16. Zvolte libovolný trojúhelník a kolem jeho vrcholů opište kružnice l_1, l_2, l_3 takové, aby procházely jedním bodem a po dvou určovaly společné tětivy, jejichž velikosti jsou shodné.
17. Daný trojúhelník DEF má velikosti stran v poměru 6 : 7 : 8 a víme o něm, že patří do trojice trojúhelníků příslušných k relaci $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ podle neurčeného pólu. Máme sestrojit první složku z těchto relací, kterou je $\triangle ABC$ a daný trojúhelník přísluší

    a) k relaci $\boldsymbol{p}$ podle S,
    b) k relaci $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ podle V,
    c) k relaci $\boldsymbol{q}$ podle S_a,
    d) k relaci $\boldsymbol{p}$ podle O.
18. Do kružnice $k = (O;\ 3{,}8)$ vepište $\triangle ABC$, jehož vnitřní úhly mají velikosti v poměru 5 : 6 : 7, a sestrojte trojice trojúhelníků příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle T.
19. Kružnice l_a, l_b a l_c opsané trojici trojúhelníků $\triangle SB_aC_a$, $\triangle A_bSC_b$, $\triangle A_cB_cS$ příslušné k relaci $\boldsymbol{p}$ podle S se dotýkají přímek $\overleftrightarrow{A_bA_c}$, $\overleftrightarrow{B_aB_c}$ a $\overleftrightarrow{C_aC_b}$. Dokažte!

20. Narýsujte trojici $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ **p** $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle T a sestrojte pól $\overline{T}$. Potom pokládejte $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ za první složku v relaci **p** ∘ $\overline{\boldsymbol{p}}$ a sestrojte k ní příslušnou trojici v kružnicích opsaných $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{T}$, $\triangle\overline{A}\overline{T}\overline{C}$ a $\triangle\overline{T}\overline{B}\overline{C}$. Výsledek zhodnoťte!

21. V dvojici trojúhelníků z relace **p** podle S a k ní příslušných trojicích známe velikosti úhlů $\sphericalangle A_bSC_b = 49°53'18''$; $\sphericalangle CA_0B = 62°13'46''$; $\sphericalangle ACB = 73°29'14''$. Určete velikosti všech zbývajících úhlů.

22. V $\triangle S_aB_aC_a$ je $\sphericalangle S_aB_aC_a = 15°26'19''$; $\sphericalangle B_aS_aC = 143°42'11''$. Určete velikosti úhlů v příslušném $\triangle ABC$.

23. Je dán $\triangle ABC_0$ $[AB = 4{,}6;\ VC_0 = 5{,}4;\ C_0A = 6{,}8]$ příslušný k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in$ **p** podle T. Sestrojte tuto dvojici!

24. Opakujte úlohu 23 pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in$ **p** podle O!

25. Opakujte úlohu 23 pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in$ **p** podle S!

26. Opakujte úlohu 23 pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in$ **p** podle V!

27. Trojúhelník ABC_0 $[AB = 8{,}5;\ \sphericalangle C_0AB = 15°;\ \sphericalangle C_0BA = 20°]$ přísluší k dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in$ **q** podle S_a. Narýsujte tuto dvojici!

28. Opakujte úlohu 27 pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in$ **q** podle V!