Zajímavé dvojice trojúhelníků

Kapitola 2. Zvláštní polohy pólů P a Q

In: Arnošt Niederle (author): Zajímavé dvojice trojúhelníků. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 88–152.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403990

KAPITOLA 2

ZVLÁŠTNÍ POLOHY PÓLŮ P A Q

A. STŘEDY KRUŽNIC UVNITŘ A VNĚ VEPSANÝCH*)

V první kapitole jsme ukázali, že pólem v relacích $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ může být libovolný bod vnitřní či vnější oblasti kružnice opsané $\triangle ABC$. A tu se naskýtá otázka, objeví-li se nějaké nové vztahy, jestliže pólem bude některý ze zvláštních bodů $\triangle ABC$, například střed kružnice vepsané, průsečík výšek, těžiště apod.

Obrátíme nejdříve pozornost ke středům kružnic uvnitř a vně vepsaných, které budeme nadále značit obvyklými znaky S, S_a, S_b a S_c.

Zvláštní poloha středu kružnice $\triangle ABC$ vepsané S vede přímo k vyslovení první věty:

Věta 15. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *kde* S *je střed kružnice* $\triangle ABC$ *uvnitř vepsané, potom vrcholy* $\triangle A_1B_1C_1$ *půlí oblouky kružnice opsané* $\triangle ABC$ *ležící mezi jeho vrcholy.*

Důkaz. Je-li pól S středem kružnice $\triangle ABC$ uvnitř vepsané, potom leží na osách úhlů $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle CAB$ (obr. 58).

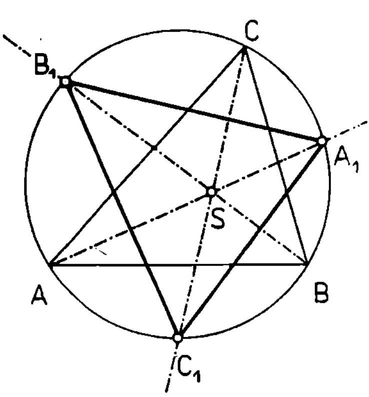
Shodují se proto nejenom úhly $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle BCC_1$, ale i příslušné oblouky $\widehat{AC}_1 = \widehat{BC}_1$. Z cyklických záměn vycházejí i další rovnosti: $\widehat{BA}_1 = \widehat{CA}_1$ a $\widehat{CB}_1 = \widehat{AB}_1$.

*) viz připomínky v úvodu!

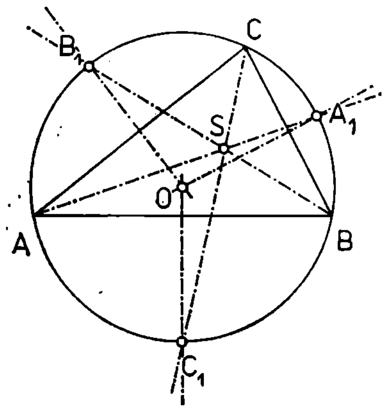
Přímým důsledkem pak je i další věta:

Věta 16. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *potom osy stran* $\triangle ABC$ *procházejí vrcholy* $\triangle A_1B_1C_1$.

Důkaz. Označme O střed kružnice trojúhelníkům $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ opsané (obr. 59).



Obr. 58



Obr. 59

Jestliže se podle věty 15 sobě rovnají oblouky $\widehat{AC}_1 = \widehat{BC}_1$, potom se rovnají i příslušné středové úhly $AOC_1 = \sphericalangle BOC_1$, takže přímka OC_1 je osou úsečky AB, neboť $\triangle AOB$ je rovnoramenný.

Z cyklických záměn plyne dále:

Přímka OB_1 je osou úsečky AC a přímka OA_1 osou úsečky BC.

Větu 16 bychom mohli zřejmě vyslovit i takto:

Je-li $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ *podle* S, *potom osy úhlů* *a osy stran $\triangle ABC$ se protínají na kružnici opsané ve vrcholech $\triangle A_1B_1C_1$.*

Toho využijeme při konstrukcích, neboť:

a) Máme-li sestrojenu kružnici trojúhelníku opsanou, snadno sestrojíme osy jeho vnitřních úhlů, protože kolmice vedené středem kružnice opsané na strany trojúhelníku určují na kružnici opsané body, jimiž procházejí osy jeho vnitřních úhlů.

b) Máme-li naopak střed kružnice trojúhelníku uvnitř vepsané, můžeme sestrojit vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle S, aniž sestrojíme kružnici trojúhelníku opsanou. Stačí sestrojit osy stran a vyhledat jejich průsečíky s osami vnitřních úhlů.

Věta 17. *Mají-li vnitřní úhly trojúhelníků $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ podle S velikosti po řadě α, β, γ a α', β', γ', potom platí:*

$$\alpha' = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

$$\beta' = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 90° - \frac{\beta}{2},$$

$$\gamma' = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Důkaz. Z vlastností obvodových úhlů vyplývá (obr. 58):

$$\sphericalangle CC_1A_1 = \sphericalangle CAA_1 = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\sphericalangle CC_1B_1 = \sphericalangle CBB_1 = \frac{1}{2}\beta,$$

přičemž je

$$\sphericalangle CC_1A_1 + \sphericalangle CC_1B_1 = \sphericalangle A_1C_1B_1 = \gamma',$$

neboli

$$\gamma' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Současně je $(\alpha + \beta) = 180° - \gamma$, takže

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(180° - \gamma) = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Zbývající dvě tvrzení jsou opět záležitostí cyklických záměn.

Bezprostředním důsledkem věty 17 je:

Věta 18. *Jsou-li α', β', γ' velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku $A_1B_1C_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle S, potom jsou všechny tyto tři úhly ostré.*

Důkaz je nasnadě, protože podle věty 17 je

$$\alpha' = 90° - \frac{\alpha}{2} \wedge \beta' = 90° - \frac{\beta}{2} \wedge \gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2}$$

a to jsou vesměs ostré úhly.

Věta 19. *Je-li dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ podle S, potom vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle BSC$, $\triangle CSA$ a $\triangle ASB$.*

Důkaz. Na obr. 60 je v $\triangle SC_1B$ vnitřní úhel $\sphericalangle C_1SB$ vnějším úhlem $\triangle CSB$, kde

$$\sphericalangle SCB \equiv \sphericalangle C_1CB = \frac{\gamma}{2} \wedge \sphericalangle SBC \equiv \sphericalangle B_1BC = \frac{\beta}{2},$$

takže

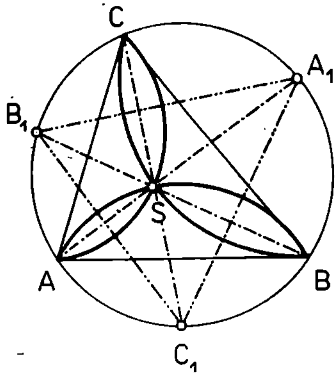
$$\sphericalangle C_1SB = \sphericalangle SCB + \sphericalangle SBC = \frac{1}{2}(\gamma + \beta). \quad (2.1)$$

Dále je

$$\sphericalangle SBC_1 = \sphericalangle SBA + \sphericalangle C_1BA, \quad (2.2)$$

přičemž

$$\sphericalangle SBA = \frac{1}{2}\beta \wedge \sphericalangle C_1BA = \sphericalangle C_1CA = \frac{1}{2}\gamma. \quad (2.3)$$



Obr. 60

Dosadíme-li podle (2.3) do (2.2), bude $\sphericalangle SBC_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \beta)$ a podle (2.1) a (2.3) pak $\sphericalangle C_1SB = \sphericalangle C_1BS$, což znamená, že $\triangle BSC_1$ je rovnoramenný s rameny C_1S a C_1B a podle věty 15 také $C_1B = C_1A$.

Dokázali jsme, že $C_1B = C_1S = C_1A$, takže body B, S, A leží na kružnici opsané kolem středu C_1 poloměrem C_1S. Cyklickými záměnami dojdeme i k dalším dvěma tvrzením:

body C, S, B leží na kružnici opsané kolem středu A_1 poloměrem A_1S,

body C, S, A leží na kružnici opsané kolem středu B_1 poloměrem B_1S.

Věta 20. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *potom jsou vrcholy* $\triangle ABC$ *souměrně sdruženy se středem* S *kružnice* $\triangle ABC$ *vepsané podle stran* $\triangle A_1B_1C_1$, *a to vrchol* A *podle strany* B_1C_1, *vrchol* B *podle strany* A_1C_1 *a vrchol* C *podle strany* A_1B_1.

Důkaz (obr. 60). Jde o přímý důsledek věty 19, podle které je
$$C_1S = C_1A \wedge B_1S = B_1A\,.$$
Podle toho jsou trojúhelníky $\triangle ASC_1$ a $\triangle ASB_1$ rovnoramenné a souměrné podle osy B_1C_1. Totéž platí o trojúhelnících $\triangle BSC_1$ a $\triangle BSA_1$, $\triangle CSA_1$ a $\triangle CSB_1$, kde v prvním případě je osou souměrnosti přímka A_1C_1, ve druhém přímka A_1B_1.

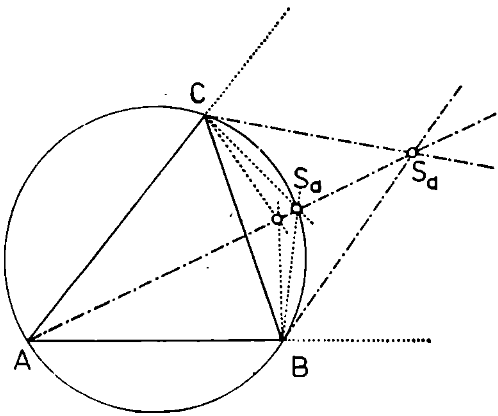
Tím jsme současně dokázali ještě jeden vztah, a protože jde o vztah základní důležitosti, vyjádříme ho samostatnou větou.

Věta 21. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S, *potom osy* AA_1, BB_1 *a* CC_1 *vnitřních úhlů* $\triangle ABC$ *obsahují výšky* $\triangle A_1B_1C_1$ *příslušné po řadě ke stranám* B_1C_1, A_1C_1 *a* A_1B_1, *takže pól* S *je průsečíkem výšek* $\triangle A_1B_1C_1$.

Důkaz byl již proveden, protože jsou-li přímky A_1B_1, B_1C_1 a C_1A_1 po řadě osami úseček CS, AS a BS, jsou na ně kolmé, takže:
$$C_1C \equiv CS \perp A_1B_1 \wedge B_1B \equiv BS \perp A_1C_1 \wedge A_1A = \\ = AS \perp B_1C_1.$$

To znamená, že přímky C_1C, B_1B a A_1A skutečně obsahují výšky $\triangle A_1B_1C_1$ a pól S je jejich průsečík.

K zajímavému výsledku dospějeme, utvoříme-li k relaci $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S relaci $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\boldsymbol{p}}$ podle $\bar{S}$ (viz větu 13). Tato nová relace je středovou souměrností podle středu O kružnice $\triangle ABC$ opsané. Příslušný důkaz je proveden v příkladech na konci této části druhé kapitoly.



Obr. 61

Obraťme nyní svou pozornost ke středům kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných. Zde je třeba si uvědomit, že středy kružnic libovolnému trojúhelníku vně vepsaných leží vždy vně jeho kružnice opsané. Půjde tedy v těchto případech vždy o relaci $\boldsymbol{q}$ podle S_a, nebo S_b či S_c. Tento obecně platný vztah dokážeme, aniž bychom vyslovovali zvláštní větu, a to sporem.

Předpokládejme proto, že uvažovaný střed, například

S_a, leží na kružnici opsané nebo uvnitř. V prvním případě bude v tětivovém čtyřúhelníku ABS_aC (obr. 61) platit $\sphericalangle BS_aC = 180° - \alpha$, v druhém případě $\sphericalangle BS_aC >$ $> 180° - \alpha$, neboli

$$\sphericalangle BS_aC \geqq 180° - \alpha . \tag{2.4}$$

Protože střed kružnice trojúhelníku vně vepsané leží na osách vnějších úhlů, v našem případě při vrcholech B a C, bude

$$\sphericalangle S_aCB = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \wedge \sphericalangle S_aBC = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

kde α je velikost vnitřního úhlu při vrcholu A, β při vrcholu B a γ při vrcholu C.

V $\triangle BS_aC$ potom platí:

$$\sphericalangle BS_aC = 180° - (\sphericalangle S_aCB + \sphericalangle S_aBC) =$$

$$= 180° - \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)\right] = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

takže

$$2 . \sphericalangle BS_aC = 180° - \alpha . \tag{2.5}$$

Vidíme hned, že nemůže současně platit (2.4) i (2.5), protože by potom bylo $2 . \sphericalangle BS_aC = \sphericalangle BS_aC$, a proto předpoklad (2.4) je nesprávný. Nemůže tedy střed S_a a v důsledku cyklických záměn ani středy S_b a S_c ležet na kružnici opsané nebo dokonce uvnitř této kružnice.

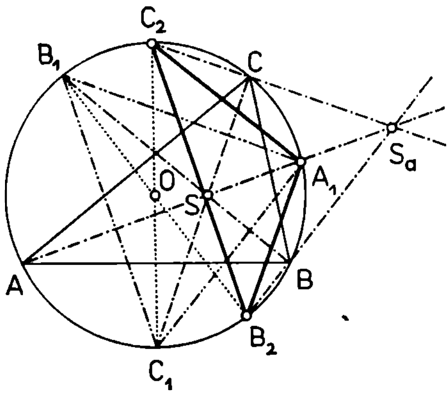
Tím jsme dokázali, že relace podle pólů S_a, S_b a S_c mají vlastnosti relací $\boldsymbol{q}$ podle Q zavedené definicí 2. Současně musíme vzít v úvahu, že střed kružnice trojúhelníku vně vepsané je průsečíkem osy jednoho vnitřního úhlu a os dvou vnějších úhlů. Půjde-li proto například o relaci $\boldsymbol{q}$ podle S_a, musíme vrcholy příslušného trojúhelníku značit A_1, B_2 a C_2, protože vrchol A_1 leží spolu se středem

S kružnice uvnitř vepsané na přímce AS_a, takže dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S a $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in$ $\in \boldsymbol{q}$ podle S_a mají jeden vrchol společný, tj. vrchol A_1. Je proto logické, že tomuto vrcholu ponecháme index 1.

Pro relaci $\boldsymbol{p}$ podle S jsme odvodili věty 15 až 21. Ověřme nyní, platí-li obdobné věty i pro relace $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c!

Věta 22. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a. *Potom vrcholy* $\triangle A_1B_2C_2$ *půlí oblouky kružnice opsané* $\triangle ABC$ *mezi jeho vrcholy.*

Důkaz (obr. 62). Polopřímky CC_1 a CS_a jsou osy vedlejších úhlů, takže $CC_1 \perp CS_a$, neboli $\sphericalangle C_1CS_a =$ $= 90°$. Protože $\sphericalangle C_2CC_1$ je vedlejší úhel k $\sphericalangle C_1CS_a$, je jeho velikost rovněž $90°$ a podle Thaletovy věty přímka C_1C_2 prochází středem O kružnice $\triangle ABC$ opsané. Podle věty



Obr. 62

16 je přímka $OC_1 \equiv OC_2$ osou strany AB $\triangle ABC$, a proto oblouky $\widehat{AC_2}$ a $\widehat{BC_2}$ jsou shodné. Obdobně je i $\widehat{AB_2} = \widehat{CB_2}$ a $\widehat{BA_1} = \widehat{CA_1}$, takže i přímka B_1B_2 prochází středem O.

Právě dokázaného vztahu využijeme s výhodou při konstrukcích tam, kde bude snazší místo $\triangle A_1B_2C_2$ sestrojit $\triangle A_1B_1C_1$ nebo naopak. Připomeňme už jenom, že věta 22 je obdobou věty 15 a její důsledky obdobou věty 16, což znamená, že osy stran $\triangle ABC$ procházejí vrcholy $\triangle A_1B_2C_2$. Rozdíly mezi $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_1B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ podle S a S_a nebo S_b či S_c se projeví, budeme-li hledat věty analogické k větám 17 a 18.

Nejdříve dokážeme platnost věty obdobné větě 17.

Věta 23. *Má-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a *velikosti vnitřních úhlů po řadě* α, β, γ a α', β', γ', *potom o těchto velikostech platí:*

$$\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}, \beta' = \frac{\beta}{2}, \gamma' = \frac{\gamma}{2}.$$

Důkaz (obr. 62). Především uvažme, že $\sphericalangle A_1B_2C_2 = \sphericalangle A_1B_2C_1 - 90°$, protože $\sphericalangle C_2B_2C_1$ je obvodový úhel nad průměrem C_1C_2 podle důsledků věty 21. V tětivovém čtyřúhelníku $A_1B_2C_1B_1$ pak je $\sphericalangle A_1B_2C_1 = 180° - \sphericalangle C_1B_1A_1$. Víme, že $\sphericalangle C_1B_1A_1$ má velikost $90° - \frac{\beta}{2}$, takže $\sphericalangle A_1B_2C_2 = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) - 90° = \frac{\beta}{2}$.

Obdobně dostaneme velikost $\sphericalangle A_1C_2B_2 = \frac{\gamma}{2}$ a konečně i $\sphericalangle C_2A_1B_2 = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Cyklickými záměnami dojdeme k velikostem vnitřních úhlů v $\triangle A_2B_1C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_b, kde

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2}, \beta' = 90° + \frac{\beta}{2}, \gamma' = \frac{\gamma}{2}$$

a v $\triangle A_2B_2C_1$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_c, kde

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2}, \beta' = \frac{\beta}{2}, \gamma' = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

Tím je věta 23 dokázána a zároveň poznáváme, jak se liší od věty 17, což se projeví v jejích důsledcích:

Věta 24. *Je-li $\triangle ABC$ společná první složka v relacích $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c, potom druhé složky, tj. trojúhelníky $\triangle A_1B_2C_2$, $\triangle A_2B_1C_2$ a $\triangle A_2B_2C_1$ jsou trojúhelníky tupoúhlé s tupým úhlem při vrcholu, jehož index je 1.*

Důkaz je opět nasnadě, neboť úhly

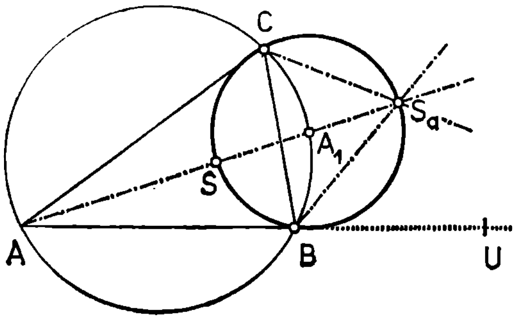
$$\alpha' = 90° + \frac{\alpha}{2}, \beta' = 90° + \frac{\beta}{2}, 90° + \frac{\gamma}{2} = \gamma'$$

jsou vesměs tupé, takže všechny ostatní úhly jsou ostré.

Nyní snadno rozšíříme platnost věty 19 na trojúhelníky z relací $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c.

Věta 25. *Je-li dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S, potom vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ jsou po řadě středy kružnic opsaných čtyřúhelníkům $BSCS_a$, $CSAS_b$ a $ASBS_c$, kde S_a, S_b a S_c jsou středy kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných.*

Důkaz (obr. 63). Musíme dokázat, že například střed S_a leží na kružnici jdoucí body B, C a S. Polopřímky BS a BS_a jsou osy vedlejších úhlů $\sphericalangle ABC$ a $\sphericalangle CBU$, kde U je bod na prodloužení úsečky AB za bod B. $\triangle SBS_a$ je proto pravoúhlý s přeponou SS_a. Přímka SS_a při tom obsahuje bod A_1, který je podle věty 19 středem kružnice opsané $\triangle BSC$. Nutně je i středem přepony SS_a a bod S_a leží rovněž na kružnici opsané $\triangle BSC$. Vše další opět plyne z cyklických záměn.



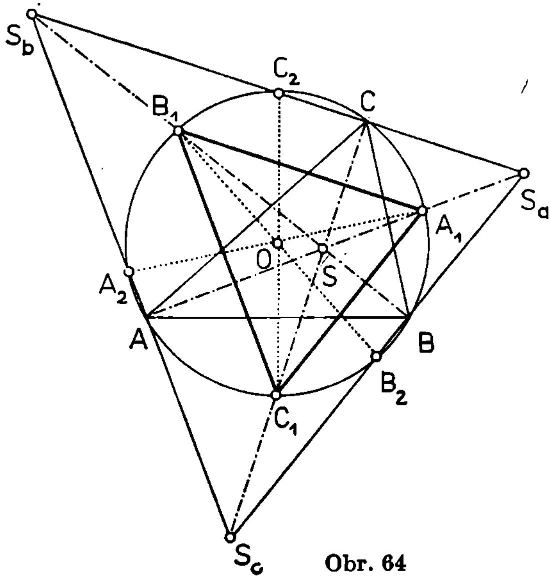
Obr. 63

Důsledkem věty 25 je důležitý vztah mezi trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S a $\triangle A_1B_2C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_a, pokud mají společnou první složku $\triangle ABC$.

Věta 26. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* S *a středy kružnic* $\triangle ABC$ *vně vepsaných* S_a, S_b *a* S_c, *potom trojúhelníky* $\triangle A_1B_1C_1$ *a* $\triangle S_aS_bS_c$ *jsou podobné s poměrem podobnosti* $k = 2$ *a jejich strany jsou rovnoběžné* $(A_1B_1 \parallel S_aS_b,\ B_1C_1 \parallel S_bS_c$ a $C_1A_1 \parallel S_cS_a)$.

Důkaz (obr. 64). Jde o přímý důsledek věty 25, neboť: Je-li

$$\overline{SA_1} = \overline{A_1S_a}, \text{ potom } \overline{SS_a} = 2 . \overline{SA_1},$$
$$\overline{SC_1} = \overline{C_1S_c}, \text{ potom } \overline{SS_c} = 2 . \overline{SC_1},$$



Obr. 64

což znamená, že trojúhelníky $\triangle A_1SC_1$ a $\triangle S_aSS_c$ jsou stejnolehlé podle středu stejnolehlosti S a poměru stejnolehlosti $\varkappa = 2$. Odtud potom plyne rovnoběžnost jejich stran. Obdobně platí $\triangle A_1SC_1 \sim \triangle S_aSS_b$, $\triangle B_1SC_1 \sim \sim \triangle S_bSS_c$ při stejném poměru stejnolehlosti $\varkappa = 2$.

Věta 27. *Je-li $\triangle ABC$ první složkou a $\triangle A_1B_1C_1$ druhou složkou v relaci* **p** *podle S a současně trojúhelníky $\triangle A_1B_2C_2$,*

$\triangle B_1C_2A_2$ a $\triangle C_1A_2B_2$ druhými složkami v relacích q podle pólů S_a, S_b a S_c, potom společná kružnice opsaná těmto trojúhelníkům je Feuerbachovou kružnicí trojúhelníku $S_aS_bS_c$.

Důkaz (obr. 64). Víme, že Feuerbachova kružnice, jinak také zvaná kružnice devíti bodů, obsahuje paty výšek, středy stran a středy úseků výšek mezi vrcholem a průsečíkem výšek.

Podle věty 21 je střed S průsečíkem výšek $\triangle A_1B_1C_1$. Z toho plyne, že přímka obsahující body A, S, A_1 a S_a je kolmá na přímku B_1C_1, a protože tato přímka je podle věty 26 rovnoběžná s přímkou S_bS_c, je $AS_a \perp S_bS_c$ a úsečka AS_a je výškou trojúhelníku $S_aS_bS_c$ příslušnou ke straně S_bS_c. Další dvě výšky pak jsou analogicky úsečky BS_b a CS_c. Tím je důkaz věty 27 proveden, protože stačilo dokázat, že kružnice opsaná $\triangle ABC$ prochází patami výšek $\triangle S_aS_bS_c$, a proto je jeho Feuerbachovou kružnicí. Zbývajících šest bodů na této kružnici lze snadno identifikovat:

Podle věty 25 je $SA_1 = A_1S_a$, $SB_1 = B_1S_b$ a $SC_1 = C_1S_c$. Jinými slovy: Vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$ jsou po řadě středy úseček SS_a, SS_b a SS_c.

Jsou tedy body A_1, B_1 a C_1 po řadě středy úseků výšek $\triangle S_aS_bS_c$ mezi průsečíkem výšek S a jeho vrcholy.

Dále víme podle věty 22, že přímky A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2 procházejí středem kružnice $\triangle ABC$ opsané. Proto jsou $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ souměrně sdruženy podle tohoto středu, takže podle věty 26 platí:

$$A_2B_2 \parallel S_bS_a \wedge B_2C_2 \parallel S_cS_b \wedge C_2A_2 \parallel S_aS_c .$$

Jsou proto úsečky A_2B_2, B_2C_2 a C_2A_2 středními příčkami $\triangle S_aS_bS_c$, neboli body A_2, B_2 a C_2 středy jeho stran.

Ukážeme ještě, že platí věty obdobné větám 20 a 21.

Věta 28. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *potom přímky* A_1S_a, B_2S_a *a* C_2S_a *obsahují výšky trojúhelníku* $A_1B_2C_2$, *přičemž pól* S_a *je průsečíkem těchto výšek.*

Důkaz (obr. 64). Protože přímka C_1C_2 prochází středem O kružnice $\triangle ABC$ opsané, je $\sphericalangle C_2A_1C_1 = 90°$, neboli

$$C_2A_1 \perp A_1C_1. \tag{2.6}$$

Podle věty 26 je současně $A_1C_1 \perp S_aS_c$, takže podle (2.6) je také $C_2A_1 \perp S_aS_c$. Je proto v $\triangle A_1B_2C_2$ výška příslušná ke straně C_2A_1 částí přímky S_aS_c. Obdobně také výška příslušná ke straně B_2A_1 je částí přímky S_aS_b, přičemž průsečík přímek S_aS_c a S_aS_b, tj. pól S_a, je průsečíkem výšek $\triangle A_1B_2C_2$.

Věta 28 je tedy obdobou věty 21.

Věta 29. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* S_a, *potom vrcholy* $\triangle ABC$ *jsou souměrně sdruženy s pólem* S_a *podle stran* $\triangle A_1B_2C_2$, *a to: Vrchol* A *podle strany* B_2C_2, *vrchol* B *podle strany* A_1C_2 *a vrchol* C *podle strany* A_1B_2.

Důkaz (obr. 64). Jde o přímý důsledek předešlé věty. Je-li totiž $C_2A_1 \perp S_aB \equiv S_aS_c$ a současně podle věty 25 $A_1B = A_1S_a$, potom jsou body S_a a B souměrně sdruženy podle přímky C_2A_1. Dále víme, že úsečka S_aA je výškou $\triangle S_aS_bS_c$ příslušnou ke straně S_bS_c a úsečka B_2C_2 je střední příčkou téhož trojúhelníku (viz věta 27). Je tedy také přímka B_2C_2 osou souměrnosti bodů A a S_a.

Zřejmě věta 29 je obdobou věty 20.

Existují ještě některé další vztahy, kterých lze s výhodou využít při konstrukcích. Některé z nich uvedeme v následujících příkladech, jimiž tuto část kapitoly uzavřeme.

Příklad 1. Rozhodněte, zda je pravdivé toto tvrzení: Existuje aspoň jedna trojice trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_1B_2C_2$ takových, že o nich platí $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S a současně $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \in \boldsymbol{q}$ podle S_a, přičemž

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1B_2C_2.$$

Řešení. Takové trojúhelníky neexistují, neboť podle věty 18 je $\triangle A_1B_1C_1$ ostroúhlý a podle věty 24 $\triangle A_1B_2C_2$ tupoúhlý. Proto nemůže být $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_1B_2C_2$.

Příklad 2. Je dána kružnice $k = (O;\ 3{,}5\ \text{cm})$ a na ní body A, B, B_1 takové, že $AB = 4$ cm, $\sphericalangle BAB_1 = 90°$. Určete na kružnici k body C, A_1 a C_1, aby trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ byly v relaci $\boldsymbol{p}$ podle S.

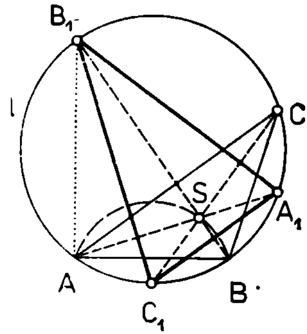
Rozbor. Předpokládejme, že existuje aspoň jedno řešení. Potom je střed menšího oblouku $\widehat{AB}$ již vrcholem C_1 hledaného $\triangle A_1B_1C_1$ a pól S je průsečík přímky BB_1 s kružnicí opsanou kolem bodu C_1 poloměrem C_1A.

Můžeme však usuzovat také takto: Daný bod B_1 je středem oblouku $\widehat{AC}$, takže $B_1A = B_1C$. Tím je určen $\triangle ABC$ a další postup je nasnadě.

Konstrukce je provedena na obr. 65 prvním způsobem. Máme-li střed S, potom přímky AS a C_1S protínají kružnici k v bodech A_1 a C.

Důkaz správnosti vyplývá z pravdivosti použitých vět.

Diskuse. Protože přímka BB_1 a kružnice opsaná kolem bodu C_1 poloměrem C_1A mají jeden bod společný, tj. bod B, mohou mít právě jeden další společný bod, takže úloha má nejvýše jedno řešení. Nutná podmínka ovšem je, aby bod B_1 ležel v polorovině $\overrightarrow{ABC}$, tj. na větším oblouku $\widehat{AB}$ tak, že $AB_1 < BB_1$. Tato podmínka je zde splněna, a proto úloha má právě jedno řešení.

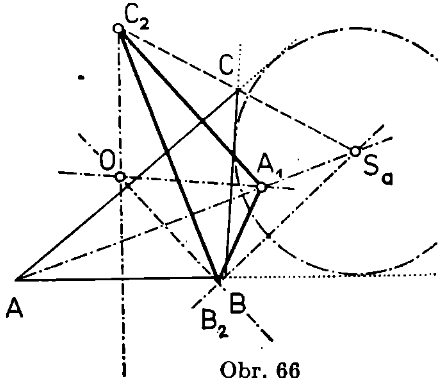


Obr. 65

Příklad 3. Zvolte body A, B, S_a tak, aby neležely v přímce. Nechť body A a B jsou vrcholy $\triangle ABC$ a bod S_a středem kružnice $\triangle ABC$ vně vepsané proti vrcholu A. Sestrojte dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ podle S_a, aniž narýsujete kružnici $\triangle ABC$ opsanou!

Řešení. Kružnice vně vepsaná se dotýká přímky AB. Můžeme ji proto sestrojit, protože máme její střed S_a. Přímky BC a AC pak jsou rovněž tečnami téže kružnice vně vepsané a jejich průsečík je vrchol C $\triangle ABC$. Podle věty 22 je vrchol A_1 hledaného $\triangle A_1B_1C_1$ průsečík přímky AS_a s osou strany BC, vrchol B_2 průsečík přímky BS_a s osou strany AC a vrchol C_2 průsečík přímky CS_a s osou strany AB trojúhelníku ABC.

Diskuse. Úloha bude mít řešení právě tehdy, když pata kolmice vedené bodem S_a na přímku AB padne na prodloužení úsečky AB za bod B. Kdyby padla dovnitř úsečky AB, ležel by střed S_a proti vrcholu C, což není



Obr. 66

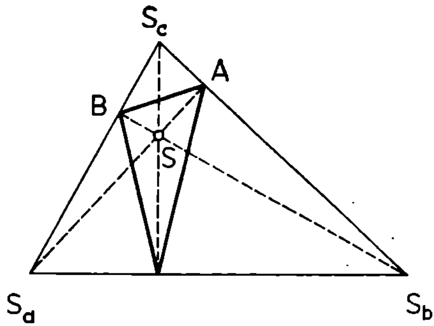
možné. Kdyby padla dokonce na prodloužení úsečky AB za bod A, ležel by bod S_a proti vrcholu B, což rovněž není možné. Další postup konstrukce už je závislý jenom na existenci tečen ke kružnici vepsané vedených body A a B. Protože přímka AB je tečnou této kružnice a ani jeden z bodů A nebo B není bodem dotyku, existují právě dvě další tečny, a to $\overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{BC}$, protože tečna AB je společná. Jde už jenom o to, nejsou-li některé z uvedených tečen navzájem rovnoběžné, a to být nemohou, protože by pak dotykový bod musel ležet mezi body A a B. Bude-li tedy splněna shora uvedená podmínka o poloze bodu S_a vzhledem k úsečce AB, bude mít tato úloha vždy právě jedno řešení.

Příklad 4. Je dán $\triangle S_aS_bS_c = [S_aS_b = 10,\ S_bS_c = 9,\ S_cS_a = 7]$. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby body S_a, S_b a S_c byly středy kružnic trojúhelníku ABC vně vepsaných.

Řešení. Užijeme věty 27. Sestrojíme Feuerbachovu kružnici v trojúhelníku $\triangle S_aS_bS_c$. To se dá provést dvěma způsoby. Nejjednodušší konstrukce spočívá v tom, že narýsujeme výšky tohoto trojúhelníku, jejichž paty jsou vrcholy hledaného $\triangle ABC$. Tato konstrukce je provedena na obr. 67.

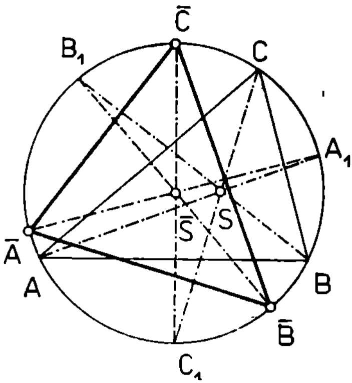
Můžeme ovšem volit i zdlouhavější postup. Vyhledáme středy stran a potom Feuerbachova kružnice jimi prochází a protne strany $\triangle S_aS_bS_c$ v hledaných vrcholech $\triangle ABC$.

Protože v každém trojúhelníku lze sestrojit právě jednu Feuerbachovu kružnici, má tato úloha právě jedno řešení.



Obr. 67

Příklad 5. K danému trojúhelníku ABC sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ z relace $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\boldsymbol{p}}$ podle S. Dokažte, že pól $\bar{S}$ je středem kružnice $\triangle ABC$ opsané a relace $\bar{\boldsymbol{p}}$ je středovou souměrností.



Obr. 68

Řešení. Popsaná konstrukce je provedena na obr. 68. Podle věty 14 mají vnitřní úhly $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ velikosti

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha'), \bar{\beta} = 180° - (\beta + \beta'),$$
$$\bar{\gamma} = 180° - (\gamma + \gamma'). \qquad (2.7)$$

Dále je podle věty 17 $\alpha' = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\beta' = 90° - \frac{\beta}{2}$, $\gamma' = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Dosadíme-li tyto hodnoty do (2.7), dostaneme po úpravě:

$$\bar{\alpha} = 90° - \frac{\alpha}{2}, \bar{\beta} = 90° - \frac{\beta}{2}, \bar{\gamma} = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

Jsou tedy vnitřní úhly trojúhelníků $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ shodné, a protože jde o trojúhelníky vepsané do téže kružnice, jsou tyto trojúhelníky shodné. Současně pak podle věty 13 procházejí přímky $A_1\overline{A}$, $B_1\overline{B}$ a $C_1\overline{C}$ týmž bodem, takže jde o středovou souměrnost se středem $\overline{S} \equiv O$.

Příklad 6. Je dána dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}$ podle S a středy kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných S_a, S_b, S_c.

Dokažte, že

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle S_aS_bS_c \sim \triangle S_aBC \sim \triangle AS_bC \sim \triangle ABS_c\,.$$

Řešení. První část tvrzení dokazovat nemusíme, vyplývá z věty 26.

Podle věty 27 jsou vrcholy $\triangle ABC$ patami výšek v $\triangle S_aS_bS_c$. Jsou proto trojúhelníky $\triangle S_aAS_b$ a $\triangle S_bCS_c$ podobné, protože oba jsou pravoúhlé a mají jeden další úhel, totiž $\sphericalangle S_aS_bS_c$, společný. Velikosti jejich stran jsou tedy úměrné a platí:

$$S_aS_b : S_bA = S_cS_b : S_bC\,,$$

neboli

$$S_aS_b : S_bS_c = S_bA : S_bC\,. \tag{2.8}$$

Také trojúhelníky $\triangle S_aS_bS_c$ a $\triangle AS_bC$ mají společný $\sphericalangle S_aS_bS_c$. Podle (2.8) jsou jejich strany co do velikosti úměrné, takže podle věty *sus* o podobnosti trojúhelníků je $\triangle S_aS_bS_c \sim \triangle AS_bC$.

Cyklickými záměnami dojdeme k dalším dvěma vztahům:

$$\triangle S_bS_cS_a \sim \triangle BS_cA \text{ a } \triangle S_cS_aS_b \sim \triangle CS_aB\,.$$

Příklad 7. Má-li $\triangle ABC$ vnitřní úhly velikostí $\alpha > > \beta > \gamma$, potom vrcholy trojúhelníků $\triangle A_1B_2C_2$, $\triangle A_2B_1C_2$, $\triangle A_2B_2C_1$ z relací q podle S_a, S_b a S_c leží na společné kružnici opsané tak, že platí:

bod A_2 odděluje body S_b, A,
bod B_2 odděluje body S_a, B,
bod C_2 odděluje body S_a, C.

Dokažte a vypište všechny obměny pro různé vzájemné velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$.

Řešení. Dokážeme každé ze tří tvrzení zvlášť.

a) Bod A_2 odděluje body S_b, A:

Především víme, že tečna kružnice $\triangle ABC$ opsané sestrojená v bodě A tvoří se stranou AB úhel velikosti γ (úsekový úhel). Podle výsledku příkladu 6 je

$$\triangle S_bAC \sim \triangle B_1A_1C_1$$

a také

$$\sphericalangle S_bAC = \sphericalangle B_1A_1C_1 = \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \qquad (2.9)$$

podle věty 17.

Podle předpokladu je $\beta > \gamma$ tedy i $\beta + \beta > \gamma + \beta$, neboli

$$\beta > \frac{1}{2}(\gamma + \beta). \qquad (2.10)$$

Máme proto podle (2.9) a (2.10) $\beta > \sphericalangle S_bAC$ a přímka S_bA protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ mezi body A a S_b. (2.11)

b) Bod B_2 odděluje body S_a, B:

Tečna v bodě B tvoří se stranou BC úsekový úhel velikosti α. Současně je $\sphericalangle S_aBC = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$.

Podle předpokladu je $\alpha > \gamma$ a odtud $\alpha > \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, neboli $\sphericalangle S_aBC < \alpha$ a bod B_2 padne mezi body S_a, B. (2.12)

c) Bod C_2 odděluje body S_a, C:

Také tečna kružnice opsané $\triangle ABC$ vedená v bodě C tvoří se stranou AC úhel velikosti β a $\sphericalangle S_bCA = \sphericalangle B_1C_1A_1 = \frac{1}{2}(\beta + \alpha)$.

Podle předpokladu je $\alpha > \beta$ a odtud $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \sphericalangle S_bCA < \beta$, takže přímka S_bC protne kružnici opsanou $\triangle ABC$ až za bodem C, čili C_2 odděluje body S_a a C. (2.13)

Shrneme-li (2.11), (2.12) a (2.13), je důkaz úplný. Požadované obměny zapíšeme do tabulky:

Předpoklad:	Tvrzení o pořadí bodů na přímkách S_aA, S_aB, S_aC			
$\alpha > \beta > \gamma$	S_aB_2B	S_aC_2C	S_bA_2A	
$\alpha > \gamma > \beta$	S_aC_2C	S_aB_2B	S_cA_2A	
$\beta > \alpha > \gamma$	S_bA_2A	S_bC_2C	S_aB_2B	
$\beta > \gamma > \alpha$	S_bC_2C	S_bA_2A	S_cB_2B	(obr. 64)
$\gamma > \alpha > \beta$	S_cA_2A	A_cB_2B	S_aC_2C	
$\gamma > \beta > \alpha$	S_cB_2B	S_cA_2A	S_bC_2C	

Příklad 8. Je dána dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}$ podle S. Aniž narýsujete středy kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných, sestrojte trojúhelníky $\triangle A_1B_2C_2$, $\triangle A_2B_1C_2$ a $\triangle A_2B_2C_1$ z relací $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c a potom dokažte, že

a) tětivový šestiúhelník $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ má každé dvě protější strany rovnoběžné,

b) trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ jsou v relaci $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle $S \equiv O$, kde O je střed kružnice $\triangle ABC$ opsané.

Řešení (obr. 64). Při konstrukci užijeme poznatku, že přímky A_1A_2, B_1B_2 a C_1C_2 procházejí středem O (viz např. důkaz věty 22). Odtud také vyplývá, že čtyřúhelníky $A_1C_2A_2C_1$, $C_2B_1C_1B_2$ a $B_1A_2B_2A_1$ jsou obdélníky, takže je

$$A_1C_2 \parallel A_2C_1 \wedge C_2B_1 \parallel C_1B_2 \wedge B_1A_2 \parallel B_2A_1.$$

Tím je důkaz a) proveden,

Druhý důkaz vyplývá z věty 26, neboť, jsou-li úsečky A_1B_1 a S_bS_a rovnoběžné, jsou rovnoběžné i úsečky A_1B_1 a C_2C, protože úsečka C_2C je částí úsečky S_bS_a. To však znamená, že čtyřúhelník A_1CC_2B a obdobně i čtyřúhelníky $B_1A_2AC_1$ a $C_1B_2BA_1$ jsou lichoběžníky vepsané do kružnice, a proto rovnoramenné. Z toho plyne

$$A_1C = C_2B_1 \wedge B_1A_2 = AC_1 \wedge C_1B_2 = BA_1.$$

To znamená, že podle věty 13 jsou trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ v relaci $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle $S \equiv O$.

Cvičení

1. Sestrojte libovolný trojúhelník a opište mu kružnici. Potom bez použití kružítka sestrojte vrcholy trojúhelníku z relace $\boldsymbol{p}$ podle S.

2. K libovolně zvolenému trojúhelníku EFG sestrojte trojúhelník $E_1F_1G_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S, aniž narýsujete kružnici $\triangle EFG$ opsanou.
3. Velikosti vnitřních úhlů daného $\triangle ABC$ jsou v poměru $\alpha : \beta : \gamma = 5 : 6 : 7$.
   a) Určete velikosti těchto úhlů a velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S.
   b) Jaký je poměr velikostí vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$?
   c) Udejte obecný vzorec pro přímé stanovení poměru velikostí vnitřních úhlů druhé složky z relace $\boldsymbol{p}$ podle S.
4. Velikosti vnitřních úhlů druhé složky z relace $\boldsymbol{p}$ podle S jsou ve stejném poměru jako velikosti vnějších úhlů první složky. Dokažte!
5. Velikosti vnitřních úhlů v $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S jsou $\alpha' = 57°48'$, $\beta' = 78°36'$. Určete velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$.
6. Odvoďte vzorec pro výpočet velikostí úhlů $\sphericalangle ASB$, $\sphericalangle BSC$ a $\sphericalangle CSA$ v trojúhelníku ABC se středem S kružnice uvnitř vepsané, jsou-li velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ po řadě α, β, γ.
7. Výsledku úlohy 6 užijte při řešení této úlohy: Sestrojte $\triangle EFG$ $[EF = 7;\ \sphericalangle EGF = 40°;\ \varrho = 2]$, kde ϱ je velikost poloměru kružnice uvnitř vepsané.
8. Sestrojte trojúhelník, je-li dána velikost poloměru kružnice opsané $r = 3{,}5$, velikost poloměru kružnice uvnitř vepsané $\varrho = 1{,}5$ a velikost jednoho vnitřního úhlu $\alpha = 70°$.
9. Je dána kružnice $k = (O;\ 36)$, na ní vrchol A $\triangle ABC$ a vrchol A_1 $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S. Sestrojte oba trojúhelníky, víte-li, že $AB = 42$.
10. Do kružnice $k = (O;\ 28)$ vepište dvojici $[\triangle KLM,\ \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S, víte-li, že $KL = 42$, $L_1M_1 = 30$.
11. Je dán $\triangle AB_1C_1$ $[AB_1 = 3;\ AC_1 = 4;\ \sphericalangle B_1AC_1 = 120°]$. Narýsujte $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle S.
12. Do kružnice opsané danému $\triangle EFG$ vepište $\triangle KLM$ tak, aby bylo $KE \perp LM$, $LF \perp KM$ a $MG \perp LK$.
13. Je dán $\triangle ABC$ a kružnice jemu opsaná. Bez použití kružítka sestrojte střed kružnice vně vepsané proti vrcholu A.
14. K danému $\triangle ABC$ sestrojte druhou složku $\triangle A_2B_1C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle S_b, aniž narýsujete bod S_b.
15. Velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_2B_2C_1$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{q}$ $\boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_1$ podle S_a jsou v poměru $2 : 3 : 13$. Určete velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ a jejich poměr.

16. Je-li první složkou v relacích **q** podle S_a, S_b a S_c trojúhelník rovnoramenný, potom právě jedna ze tří druhých složek je opět rovnoramenný trojúhelník. Dokažte a uveďte, který.

17. Zvolte libovolný trojúhelník ABA_1 a na jeho straně AA_1 určete bod S takový, aby úsečka AB byla stranou první složky $\triangle ABC$ a bod A_1 vrcholem druhé složky $\triangle A_1B_1C_1$ z relace **p** podle S. Proveďte diskusi vzhledem k velikosti stran zvoleného trojúhelníku.

18. Zvolte libovolný trojúhelník EFG a opište mu kružnici. K sestrojení středů kružnice uvnitř vepsané a vně vepsané proti vrcholu E stačí narýsovat jedinou přímku a jedinou kružnici. Proveďte!

19. Narýsujte ostroúhlý trojúhelník HJK a sestrojte průsečík jeho výšek. Potom narýsujte kružnice:
$k_1 = (H; \overline{HV})$, $k_2 = (J; \overline{JV})$ a $k_3 = (K; \overline{KV})$. Tyto kružnice se po dvou protínají na kružnici opsané $\triangle HJK$. Odůvodněte!

20. Narýsujte různostranný tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jehož vnitřní úhly při vrcholech A a C jsou pravé. Střed kružnice opsané označte M. Ukažte, že body A, B, C, D a M je jednoznačně určena dvojice $[\triangle ACE, \triangle A_1C_1E_1]$ a dvojice $[\triangle ACE, \triangle A_2C_2M]$ z relací **p** podle B a **q** podle D, kde B a D jsou středy kružnic uvnitř a vně vepsaných. Narýsujte a odůvodněte!

21. Sestrojte ostroúhlý různostranný trojúhelník EFG a průsečík jeho výšek označte V. Paty výšek jsou po řadě E_0, F_0, G_0. Trojúhelníku $E_0F_0G_0$ opište kružnici. Tato kružnice má se stranami $\triangle EFG$ ještě další tři společné body, a to středy stran. Narýsujte a odůvodněte!

22. Opakujte úlohu 21 pro různostranný tupoúhlý trojúhelník!

23. Známe-li $AB = 7$ velikost strany $\triangle ABC$ a velikost úhlu $20° = \sphericalangle AS_aB$, kde S_a je střed kružnice vně vepsané $\triangle ABC$ proti vrcholu A, potom můžeme řešit tyto úlohy:
    a) Určit velikosti úhlů γ a γ' v dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in$ **p** podle S.
    b) Narýsovat množinu všech středů S_a.
    c) Vypočítat velikosti všech dalších úhlů v trojúhelnících z relací **p** podle S a **q** podle S_a, je-li známa ještě velikost dalšího úhlu, například $\alpha = 80°$.

24. Jak se změní řešení úlohy 23, bude-li místo daného úhlu $\sphericalangle AS_aB$ známa velikost $\sphericalangle AS_cB = 20°$?

25. Trojúhelník $A_2B_1C_2$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_1C_2$ podle S_b má velikosti vnitřních úhlů v poměru 2 : 9 : 4. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \in \boldsymbol{p}$ podle S.

26. Zvolte tři body A, B_1 a C_2, které neleží v přímce. Jaká musí být vzájemná poloha těchto tří bodů, aby jednoznačně určovaly $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S, jakož i trojúhelníky z relací $\boldsymbol{q}$ podle S_a, S_b a S_c?

27. Je dán $\triangle C_1S_aS_b$ $[C_1S_a = 7; S_aS_b = 10; C_1S_b = 9]$. Sestrojte příslušný $\triangle ABC$, víte-li, že C_1 je vrchol $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle S a body S_a, S_b středy kružnic $\triangle ABC$ vně vepsaných.

28. Je dán $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ $[\bar{A}\bar{B} = 7{,}2; \bar{B}\bar{C} = 6{,}7; \sphericalangle \bar{C}\bar{B}\bar{A} = 70°]$ z trojice $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle S. Narýsujte tuto trojici!

29. Na dané kružnici $k = (O; 3{,}8)$ zvolte tři navzájem různé body A, B_1, $\bar{C}$ a sestrojte trojici trojúhelníků $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle S!

30. Sestrojte $\triangle ABC$ z relace $\triangle ABC\ \bar{\boldsymbol{p}} \circ \boldsymbol{p}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle S, je-li dán $\triangle A_1B_2C_2$ s tupým úhlem při vrcholu A_1.

31. Vyšetřete množinu všech pólů Q sdružených s póly S, když vrchol C daného trojúhelníku ABC probíhá kružnici tomuto trojúhelníku opsanou. Patří do této množiny střed S_a kružnice vně vepsané?

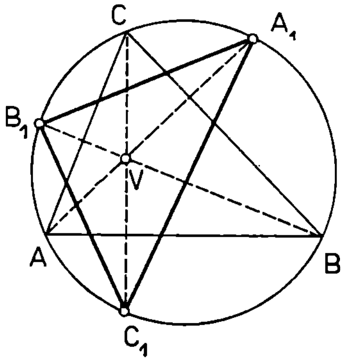
B. PRŮSEČÍK VÝŠEK

Tuto část druhé kapitoly věnujeme dvojicím trojúhelníků z relací **p** nebo **q** utvořeným podle průsečíku výšek daného $\triangle ABC$, který budeme nadále značit vždy znakem V.

Musíme ovšem přes toto jednotné značení rozlišovat mezi trojúhelníky ostroúhlými a tupoúhlými, neboť u ostroúhlých půjde vždy o relaci **p** podle V, u tupoúhlých o relaci **q** podle V. Trojúhelníky pravoúhlé zde nepřipadají v úvahu, protože podle definic 1 a 2 nemohou póly P ani Q ležet na kružnici trojúhelníku opsané.

Pro zkoumání vlastností relací **p** nebo **q** podle V má základní význam věta, jejíž platnost teď dokážeme:

Věta 30. *Je-li $\triangle ABC$ první složkou a $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ druhou složkou v relaci **p** nebo **q** podle V, je pól V středem kružnice*



Obr. 69

a) *uvnitř vepsané* $\triangle A_1B_1C_1$, *když* $\triangle ABC$ *je ostroúhlý,*
b) *vně vepsané* $\triangle A_2B_2C_2$, *když* $\triangle ABC$ *je tupoúhlý.*

Důkaz provedeme pro každý typ trojúhelníku zvlášť.
a) Nechť tedy $\triangle ABC$ je ostroúhlý (obr. 69).
Především je $CC_1 \perp AB \wedge BB_1 \perp AC$, a proto $\sphericalangle AA_1C_1 = \sphericalangle ACC_1 = 90° - \alpha$, $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle ABB_1 = 90° - \alpha$, takže $\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle AA_1C_1$, čili

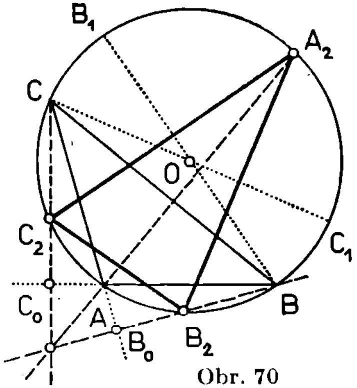
$$\text{přímka } AA_1 \text{ je osou úhlu } B_1A_1C_1. \qquad (2.14)$$

Z cyklických záměn pak plyne:

$$\text{přímka } BB_1 \text{ je osou } \sphericalangle A_1B_1C_1, \qquad (2.15)$$

$$\text{přímka } CC_1 \text{ je osou } \sphericalangle A_1C_1B_1. \qquad (2.16)$$

Pól V, kterým přímky AA_1, BB_1 a CC_1 procházejí, je podle (2.14), (2.15) a (2.16) středem kružnice uvnitř vepsané $\triangle A_1B_1C_1$, takže je $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle ABC] \in \boldsymbol{p}$ podle S.



Obr. 70

b) Nechť $\triangle ABC$ je tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu A (obr. 70).

Označme O střed kružnice $\triangle ABC$ opsané a průsečíky přímek BO a CO s touto kružnicí po řadě B_1 a C_1; dále pak paty výšek $\triangle ABC$ na stranách AB a AC po řadě C_0 a B_0.

Protože přímky BB_1 a CC_1 procházejí středem O, je čtyřúhelník BCB_1C_1 obdélník, a proto

$$\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle B_1BC. \tag{2.17}$$

Podle Thaletovy věty jsou trojúhelníky $\triangle B_1B_2B$ a $\triangle C_1C_2C$ pravoúhlé, takže je

$$B_1B_2 \perp BV \wedge CB_0 \perp BV \Rightarrow B_1B_2 \parallel CB_0,$$
$$C_1C_2 \perp CV \wedge BC_0 \perp CV \Rightarrow C_1C_2 \parallel BC_0. \tag{2.18}$$

Podle (2.18) jsou čtyřúhelníky B_1B_2AC a C_1C_2AB lichoběžníky, a protože jsou vepsány do kružnice, jsou rovnoramenné; odtud dostáváme přímo:

$$AC_2 = BC_1 = CB_1 = AB_2 \Rightarrow \sphericalangle AA_2B_2 = \\ = \sphericalangle AA_2C_2, \tag{2.19}$$

a také

$$\sphericalangle AA_2B_2 = \sphericalangle BCC_1 \wedge \sphericalangle AA_2C_2 = \sphericalangle CBC_1.$$

Současně je $AA_2 \perp BC$, tedy podle (2.19) také

$$A_2B_2 \perp CC_1 \text{ a } A_2C_2 \perp BB_1 \tag{2.20}$$

Přímky BB_1 a CC_1 procházejí středem O, a proto podle (2.20) jsou body B_1 a C_1 středy oblouků $\widehat{A_2C_2}$ a $\widehat{A_2B_2}$, neboli: polopřímky B_2B_1 a C_2C_1 jsou osami vnitřních úhlů $\triangle A_2B_2C_2$.

Protože je současně $B_1B_2 \perp BV$ a $C_1C_2 \perp CV$, jsou přímky BV a CV osami vnějších úhlů $\triangle A_2B_2C_2$.

Dokázali jsme, že $[\triangle A_2B_2C_2, \triangle ABC] \in \boldsymbol{q}$ podle $S_a \equiv$ $\equiv V$.

Význam právě dokázané věty 30 spočívá v tom, že vlastnosti relace $\boldsymbol{p}$ podle V nebo $\boldsymbol{q}$ podle V můžeme zkoumat na základě již známých vlastností relace $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ podle S, S_a, S_b či S_c. Toho dále využijeme.

Věta 31. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* V *nebo dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* V, *potom vrcholy* $\triangle ABC$ *půlí oblouky kružnice* $\triangle ABC$ *opsané mezi vrcholy* $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle A_2B_2C_2$.

Důkaz. Užijeme-li věty 30 a podle ní zaměníme indexy u vrcholů trojúhelníků podle vět 15 a 22, dostaneme přímo tvrzení obsažená ve větě 31.

Tato věta pak má zajímavý důsledek:
Utvořme k danému $\triangle ABC$ trojúhelník $A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle V a k němu $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ z relace $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle V. Snadno zjistíme, že složená relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle V je identitou, neboť $V \equiv \bar{V}$.
Pohleďme například na obr. 69. Podle vět 13 a 31 je $C_1A = B_1A \wedge C_1\bar{A} = B_1\bar{A}$, takže $A \equiv \bar{A}$ a obdobně i $B \equiv \bar{B}$ a $C \equiv \bar{C}$, neboli $\triangle ABC \equiv \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Věta 32. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* V *nebo dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *podle* V, *potom osy stran trojúhelníků* $\triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle A_2B_2C_2$ *procházejí vrcholy* $\triangle ABC$.

Důkaz. Také zde stačí provést záměnu indexů ve větě 16, popřípadě 22.

Věta 33. *Je-li dvojice ostroúhlých trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ v relaci* **p** *podle* V, *platí o velikostech vnitřních úhlů* α, β, γ, $\triangle ABC$ *a* α', β', γ' $\triangle A_1B_1C_1$*:*

$$\alpha' = 180° - 2\alpha,\ \beta' = 180° - 2\beta,\ \gamma' = 180° - 2\gamma.$$

Důkaz. Jestliže podle věty 30 je $\triangle ABC$ v relaci **p** podle S s $\triangle A_1B_1C_1$, potom podle věty 17 je

$$\alpha = 90° - \frac{\alpha'}{2} \text{ a po úpravě } \alpha' = 180° - 2\alpha,$$

$$\beta = 90° - \frac{\beta'}{2} \text{ a po úpravě } \beta' = 180° - 2\beta,$$

$$\gamma = 90° - \frac{\gamma'}{2} \text{ a po úpravě } \gamma' = 180° - 2\gamma.$$

Věta 34. *Je-li tupoúhlý $\triangle ABC$ první složkou v relaci* **p** *podle V s úhly velikostí $\alpha > 90°$, β, γ a $\triangle A_2B_2C_2$ druhou složkou v této relaci s vnitřními úhly velikostí α', β' a γ', potom platí:*

$$\alpha' = 2\alpha - 180°,\ \beta' = 2\beta,\ \gamma' = 2\gamma.$$

Důkaz. Užijeme opět vět 30 a 23, podle kterých je:

$$\alpha = 90° + \frac{\alpha'}{2} \text{ a po úpravě } \alpha' = 2\alpha - 180°,$$

$$\beta = \frac{\beta'}{2} \text{ a po úpravě } \beta' = 2\beta,$$

$$\gamma = \frac{\gamma'}{2} \text{ a po úpravě } \gamma' = 2\gamma.$$

Věta 35. *Je-li $\triangle ABC$ první složkou a $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ druhou složkou v relaci* **p** *nebo* **q** *podle V, potom* *vrcholy $\triangle ABC$ jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům $\triangle B_1VC_1$, $\triangle C_1VA_1$ a $\triangle A_1VB_1$, popřípadě $\triangle B_2VC_2$, $\triangle C_2VA_2$ a $\triangle A_2VB_2$.*

Důkaz. Pravdivost tvrzení vyplývá opět z věty 30, jestliže podle ní upravíme texty vět 19 a 25.

Věta 36. *Jsou-li dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1]$ nebo $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2]$ z relací* **p** *nebo* **q** *podle V, potom vrcholy trojúhelníků $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ jsou souměrně sdruženy s pólem V podle stran $\triangle ABC$ a to:*
vrchol A_1 (A_2) podle strany BC,
vrchol B_1 (B_2) podle strany AC,
vrchol C_1 (C_2) podle strany AB.

Důkaz. Také zde stačí obměnit užitím věty 30 texty vět 20 a 29. Pro naše úvahy má ovšem tato věta zvláštní význam. Dokázali jsme pravdivost tvrzení věty, která byla v úvodu připomenuta jako příklad důkazové úlohy, na niž lze navázat obsáhlou diskusi. Dospěli jsme v této diskusi k závěru druhé části druhé kapitoly, kterou opět uzavřeme několika příklady a dalšími úlohami.

Příklad 1. Sestrojte $\triangle ABC$ z dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in$ **p** podle S, kde $\triangle A_1B_1C_1$ je rovnoramenný trojúhelník vepsaný do kružnice o poloměru velikosti 32 mm s jedním vnitřním úhlem velikosti 30°. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ však nerýsujte!

Rozbor. Hledaný trojúhelník je podle věty 30 v relaci **p** podle V s daným $\triangle A_1B_1C_1$. Protože podle zadání nelze zjistit, je-li $\triangle A_1B_1C_1$ ostroúhlý nebo tupoúhlý, jsou tyto dvě možnosti, pokud jde o velikost jeho vnitřních úhlů:
a) 30°, 30°, 120°.
b) 30°, 75°, 75°.

V prvním případě budou velikosti vnitřních úhlů v $\triangle ABC$ podle věty 34:

$2 . 30° = 60°, 2 . 30° = 60°, 2 . 120° - 180° = 60°$, takže hledaný trojúhelník je rovnostranný.

V druhém případě jsou velikosti vnitřních úhlů $180° - 2 . 30° = 120°$, $180° - 2 . 75° = 30°$ a třetí úhel ovšem rovněž $30°$.

Vidíme hned, že podmínkám úlohy vyhovuje jenom případ druhý, protože v prvním případě příslušný trojúhelník je rovnostranný, takže $\triangle A_1B_1C_1$ by musel být rovněž rovnostranný. K označení vrcholů jsme při řešení této úlohy nepřihlédli.

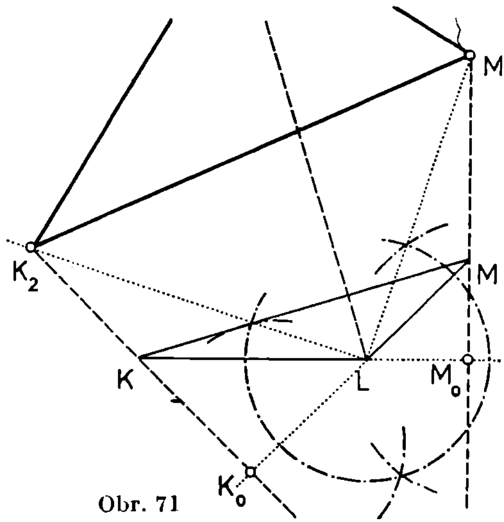
Příklad 2. Je dán $\triangle KLM$ [$KL = 4$ cm; $LM = 2{,}5$ cm; $\sphericalangle KLM = 135°$]. Sestrojte $\triangle K_2L_2M_2$ z relace $\triangle KLM\ q\ \triangle K_2L_2M_2$ podle V, aniž narýsujete kružnici oběma trojúhelníkům opsanou. Konstrukci umístěte tak, aby průsečík výšek $\triangle KLM$ padl mimo nákresnu!

Rozbor. Předpokládejme, že hledaný trojúhelník existuje. Potom podle věty 36 je vrchol M_2 souměrně sdružený podle přímky KL a vrchol K_2 souměrně sdružený podle přímky LM s průsečíkem výšek V. Protože však podle zadání leží průsečík výšek mimo nákresnu, sestrojíme nejdříve paty výšek M_0 na straně KL a K_0 na straně LM, jakož i výšku na stranu KM včetně jejího prodloužení za vrchol L. Přeneseme-li nyní $\sphericalangle M_0LV =$ $= \sphericalangle M_0LM_2$ do poloroviny $\overrightarrow{KLM}$ a úhel $\sphericalangle K_0LV =$ $= \sphericalangle K_0LK_2$ do poloroviny MLK (obr. 71), protnou ramena takto přemístěných úhlů přímky MM_0 a KK_0 po řadě v bodech M_2 a K_2. Pokud bude nepřístupný i bod L_2, můžeme narýsovat snadno aspoň části stran M_2L_2 a K_2L_2. Stačí si uvědomit, že podle věty 34 je

$\sphericalangle K_2M_2L_2 = 2 \,.\, \sphericalangle KML$ a také $\sphericalangle M_2K_2L_2 = 2 \,.\, \sphericalangle MKL$.

Konstrukce je provedena na obr. 71 a její popis je obsažen v rozboru.

Diskuse. Úlohy tohoto typu mají vždy právě jedno řešení, protože určení pólu V je jednoznačné.

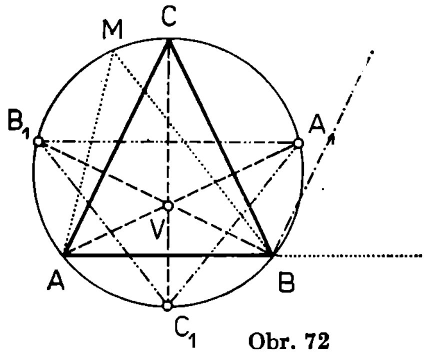


Obr. 71

Příklad 3. Do kružnice o poloměru velikosti 3,5 cm vepište dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V tak, aby platilo: $AB = B_1C_1 = 5{,}5$ cm.

Rozbor a popis *konstrukce*. Známe-li velikost poloměru kružnice opsané a velikost jedné strany trojúhelníku, můžeme graficky zjistit velikost protilehlého úhlu. V našem případě to bude $\gamma = \alpha'$. Podle věty 17 pak platí $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$. Tento úhel snadno sestrojíme (obr. 72).

Kolem bodu A opíšeme oblouk poloměrem $AB = B_1C_1 = 5{,}5$ cm. Tento oblouk protne kružnici opsanou v bodě M, takže $\sphericalangle MBA = \gamma$. Úhel vedlejší k $\sphericalangle MBA$ má velikost $180° - \gamma$. Rozpůlíme jej a bodem A vedeme rovnoběžku s jeho osou. Rovnoběžka protne kružnici opsanou v bodě C.



Obr. 72

Z konstrukce vyplývá, že úhel $\sphericalangle CAB$ má velikost $90° - \frac{\gamma}{2}$. Potom už obvyklým způsobem sestrojíme $\triangle A_1B_1C_1$.

Diskuse. Úhel $90° - \frac{\gamma}{2}$ je ostrý, takže naposledy sestrojená rovnoběžka protne kružnici opsanou v bodě jediném. Úloha má právě jedno řešení.

Příklad 4. Je dán $\triangle KLM$ [$KL = 10$ cm; $LM = 5$ cm; $MK = 6$ cm]. Aniž provedete příslušné konstrukce, zjistěte, zda existuje k danému trojúhelníku $K_1L_1M_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ nebo $\triangle K_2L_2M_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle V

a jaké je pořadí vrcholů těchto trojúhelníků na přímkách VK, VL a VM.

Řešení. Nejdříve zjišťujeme, že $\overline{KL}^2 > \overline{LM}^2 + \overline{MK}^2$, neboť $10^2 > 5^2 + 6^2$.

Podle toho je daný trojúhelník tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu M. Existuje proto $\triangle K_2L_2M_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ podle V.

Užitím kosinové věty zjistíme přibližně velikosti vnitřních úhlů $\triangle KLM$ a to:

$$\sphericalangle LMK = 113° = \alpha, \quad \sphericalangle KLM = 27° = \beta,$$
$$\sphericalangle MKL = 40° = \gamma.$$

Potom mají podle věty 34 vnitřní úhly $\triangle K_2L_2M_2$ velikosti

$$\sphericalangle K_2 = \gamma' = 2\gamma = 80°, \quad \sphericalangle L_2 = \beta' = 2\beta = 54°,$$
$$\sphericalangle M_2 = \alpha' = 2\alpha - 180° = 46°.$$

Je proto $\gamma' > \beta' > \alpha'$ a podle tabulky u příkladu 7 v první části této kapitoly je pořadí bodů

na polopřímce $\overrightarrow{VK}$: VK_2K,

na polopřímce $\overrightarrow{VL}$: VL_2L,

na polopřímce $\overrightarrow{VM}$: VMM_2.

Příklad 5. Mějme dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V takovou, že velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí d. Potom vnitřní úhly $\triangle A_1B_1C_1$ tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $2d$.

Dokažte a proveďte diskusi vzhledem k parametru d!

Řešení. Podle zadání jsou velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ po řadě α, $\alpha + d$, $\alpha + 2d$.

Z věty 33 pak plyne: Rozdíl:

$\alpha' = (180° - 2\alpha)$	
$\beta' = 180° - 2(\alpha + d) = (180° - 2\alpha) - 2d$	$2d$
$\gamma' = 180° - 2(\alpha + 2d) = (180° - 2\alpha) - 4d$	$2d$

Velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$ skutečně tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí $|2d|$.

Sečteme-li velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$, dostaneme rovnici

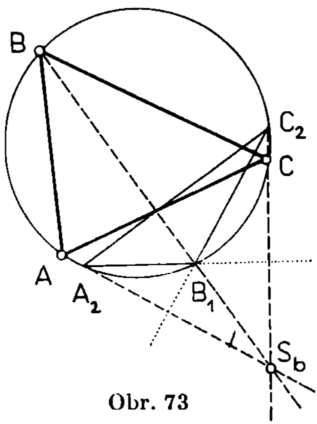
$3\alpha + 3d = 180°$ a odtud $\alpha = 60° - d$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60° + d$.

Dosadíme-li tyto hodnoty podle věty 33, dostaneme: $\alpha' = 60° + 2d$, $\beta' = 60°$, $\gamma' = 60° - 2d$.

Předpokládejme, že je $d > 0$. Potom úhel velikosti $60° - 2d$ je nejmenší úhel a nutně je

$$60° - 2d > 0 \Rightarrow d > 30°.$$

Příklad 6. Je dán $\triangle A_2B_1C_2[A_2B_1 = 3\text{ cm},\ B_1C_2 =$



Obr. 73

$= 4$ cm, $\sphericalangle A_2B_1C_2 = 120°$]. Sestrojte trojúhelník ABC z relace

$$[\triangle ABC, \triangle A_2B_1C_2] \in \boldsymbol{q} \text{ podle } S_b.$$

Rozbor. Podle věty 30 je $[\triangle A_2B_1C_2, \triangle ABC] \in \boldsymbol{q}$ podle V, kde $V \equiv S_b$

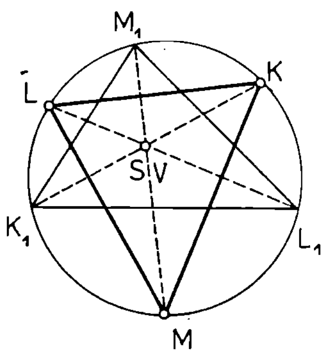
Konstrukce (obr. 73). Sestrojíme průsečík výšek $\triangle A_2B_1C_2$ a kružnici jemu opsanou k. Potom přímka VA_2 protne kružnici k v bodě A, přímka VB_1 v bodě B a přímka VC_2 v bodě C.

Diskuse. Protože $\triangle A_2B_1C_2$ je tupoúhlý, má úloha právě jedno řešení.

Příklad 7. K danému trojúhelníku $K_1L_1M_1$ [$K_1L_1 = 7$; $L_1M_1 = 6$; $M_1K_1 = 5$] sestrojte $\triangle KLM$ z relace $[\triangle KLM, \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.

Řešení (obr. 74). Užijeme opět věty 30, podle níž je

$$[\triangle A_1B_1C_1, \triangle ABC] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } S, \text{ kde } S \equiv V.$$



Obr. 74

Zde sestrojíme nejdříve střed kružnice vepsané $\triangle A_1B_1C_1$, potom kružnici jemu opsanou a na ní nám přímky A_1S, B_1S a C_1S určí body A, B a C hledaného trojúhelníku.

Cvičení

1. K danému trojúhelníku narýsujte druhou složku z relace p podle průsečíku výšek V.

   a) $\triangle ABC\ [AB = 43;\ BC = 57;\ \sphericalangle BAC = 75°]$,
   b) $\triangle DEF\ [DE = 52;\ EF = 35;\ \sphericalangle DEF = 105°]$.

2. Je dán $\triangle K_1L_1M_1$ z dvojice $[\triangle KLM,\ \triangle K_1L_1M_1] \in p$ podle $V[K_1L_1 = L_1M_1 = 6{,}2;\ K_1M_1 = 4{,}5]$. Narýsujte $\triangle KLM$.
3. K libovolně zvolenému tupoúhlému $\triangle E_1F_1G_1$ sestrojte $\triangle EFG$ z dvojice $[\triangle EFG,\ \triangle E_1F_1G_1] \in p$ podle V.
4. $\triangle A_2B_2C_2\ [A_2B_2 = 4;\ B_2C_2 = 5;\ A_2C_2 = 6]$ je z dvojice $[\triangle ABC,\ \triangle A_2B_2C_2] \in q$ podle V. Narýsujte $\triangle ABC$!
5. Do kružnice $k = (O;\ 33)$ vepište dvojici tupoúhlých trojúhelníků $[\triangle MNZ,\ \triangle M_1N_1Z_1] \in p$ podle V, víte-li, že úhel při vrcholu Z je tupý, dále $M_2Z_2 = 60°$ a $\sphericalangle Z_2M_2N_2 = 45°$.
6. Pokud jste v úlohách 2, 3, 5 rýsovali osy úhlů, opakujte konstrukce bez použití kružítka!
7. Vnitřní úhly daného trojúhelníku mají velikosti v poměru 2 : 3 : 4. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů druhé složky z relace p podle V k danému trojúhelníku.
8. Vnitřní úhly trojúhelníku mají velikosti v poměru $u : v : t$, kde u, v, t jsou kladná čísla. Vyslovte podmínky pro to, aby trojúhelník byl ostroúhlý, tupoúhlý nebo pravoúhlý.
9. Úlohu 7 řešte obecně a výsledky porovnejte.
10. Velikosti vnitřních úhlů první složky v relaci p podle V jsou v poměru 21 : 4 : 5. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů druhé složky a výsledek porovnejte s výsledkem 9. úlohy!
11. Poměr velikostí vnitřních úhlů druhé složky z relace q podle V je 7 : 8 : 25. Určete velikosti vnitřních úhlů první složky.
12. Na libovolně zvolené kružnici zvolte tři navzájem různé body X, Y, Z a kolem těchto bodů opište takové kružnice, které se po dvou protnou na dané kružnici a mimoto mají

společný ještě jeden další bod ve vnitřní nebo vnější oblasti zvolené kružnice.

13. Je dán trojúhelník FGH. Určete takový bod M, aby kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle FMG$, $\triangle FMH$, $\triangle GMH$ byly navzájem shodné.

14. Zvolte polopřímku $\overrightarrow{AM}$, bod V, který na ní neleží, a úsečku velikosti r. Sestrojte $\triangle ABC$, jehož strana AB leží na polopřímce $\overrightarrow{AM}$, bod V je průsečíkem jeho výšek a úsečka r poloměrem jeho kružnice opsané.

15. Zvolte polopřímku B_1M, bod V mimo ni ležící a úsečku velikosti r. Sestrojte dvojici $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ podle V tak, že strana B_1C_1 padne na polopřímku B_1M, bod V bude průsečíkem výšek $\triangle ABC$ a r velikost poloměru společné kružnice opsané této dvojici.

16. Úsečka $AB = 6$ cm je stranou $\triangle ABC$, $r = 3{,}5$ cm velikost poloměru kružnice jemu opsané a $OV = 1{,}5$ cm vzdálenost průsečíku výšek od středu kružnice opsané. Sestrojte dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.

17. Sestrojte dvojici $[\triangle KLM, \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{q}$ podle V, víte-li, že $KL = 5{,}8$ cm, poloměr společné kružnice opsané $r = 3{,}4$ cm a vzdálenost průsečíku výšek V od středu opsané kružnice $OV = 5$ cm.

18. Na kružnici $k = (O; r)$ zvolte bod A a jeden bod vnitřní oblasti této kružnice označte V. Ukažte, že tyto tři prvky určují jednoznačně dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V.

19. Opakujte úlohu 18 s tím rozdílem, že bod V zvolíte vně kružnice.

20. Je dána kružnice $k = (O; r)$, její bod vnitřní oblasti V a úsečka $c < 2r$. Sestrojte dvojici $[\triangle FGH, \triangle F_1G_1H_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V tak, aby bylo $FG = c$.

21. Opakujte úlohu 20 s tím rozdílem, že bod V bude ve vnější oblasti kružnice k.

22. Libovolný vnitřní bod zvolené kružnice $k = (O; r)$ označte V. Potom zvolte přímku h. Sestrojte dvojici $[\triangle KLM, \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V tak, aby strana LM $\triangle KLM$ byla rovnoběžná s přímkou h a bod V byl příslušným pólem.

23. Do kružnice o poloměru $r = 3$ cm vepište dvojici $[\triangle KLM, \triangle K_1L_1M_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V tak, aby byl $\sphericalangle KVL = 120°$ a $\sphericalangle K_1VM_1 = 140°$.

24. Sestrojte dvojici $[\triangle EFG, \triangle E_2F_2G_2] \in \boldsymbol{q}$ podle V tak, aby $E_2F_2 = 6{,}5$ cm, $\sphericalangle E_2G_2F_2 = 25°$ a $\sphericalangle EFG = 35°$.

25. Zvolte tři navzájem různé body A, B, C, které neleží v přímce. Potom sestrojte trojúhelník KLM, v němž zvolené body A, B, C jsou po řadě patami výšek na strany KL, LM, MK.

26. Na dané kružnici $k = (O;\ 3{,}8)$ zvolte body A, B, A_1 a sestrojte dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle V. Udejte podmínky řešitelnosti!

27. Na kružnici $k = (O; 4{,}2)$ umístěte body A, A_1, B_1 a sestrojte dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle V. Udejte podmínky řešitelnosti!

28. V dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle V známe poloměr kružnice opsané $r = 4{,}2$ cm, $\sphericalangle ABC = \beta = 48°$, $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \alpha' = 64°$. Narýsujte!

29. Je dána kružnice $k = (O;\ 3{,}6)$, na ní bod C_1 a přímka h, která je rovnoběžná se stranou AB trojúhelníku ABC z dvojice $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle V. Sestrojte tuto dvojici tak, aby $\sphericalangle BAC = \alpha = 60°$.

30. Vyšetřete množinu všech pólů Q sdružených s průsečíkem výšek V trojúhelníku ABC, když vrchol C probíhá oblouk kružnice $\triangle ABC$ opsané!

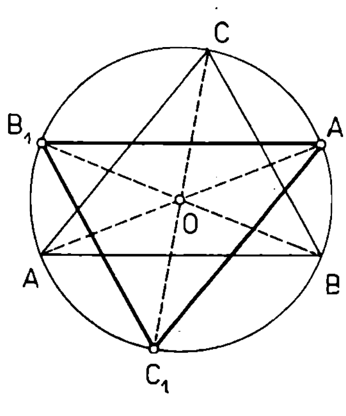
C. STŘED KRUŽNICE OPSANÉ A TĚŽIŠTĚ

Bude-li pólem střed kružnice danému trojúhelníku opsané nebo jeho těžiště, půjde v obou případech o relaci **p** podle definice 1. To proto, že jak střed kružnice trojúhelníku opsané, tak i těžiště jsou prvky podmnožiny, kterou jsme v úvodní kapitole označili K'.

Velmi jednoduché jsou vztahy mezi trojúhelníky z dvojice

$[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle O, kde O je střed kružnice oběma trojúhelníkům opsané.

Věta 37. *Jsou-li trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ v relaci **p** podle O, kde O je střed společné kružnice oběma trojúhelníkům opsané, je tato relace středovou souměrností se středem O.*



Obr. 75

Důkaz (obr. 75). Podle definice 1 procházejí v daném případě přímky AA_1, BB_1 a CC_1 středem kružnice $\triangle ABC$ opsané. Je tedy

$$AO = OA_1 \wedge BO = OB_1 \wedge CO = OC_1,$$

takže trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou souměrně sdruženy podle středu O. Bezprostředním důsledkem toho je jejich shodnost $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, z čehož pak vyplývají další vlastnosti relace $\boldsymbol{p}$ podle O:

a) rovnost stran: $AB = A_1B_1$; $BC = B_1C_1$; $CA = C_1A_1$,

b) rovnoběžnost stran: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$,

c) shodnost úhlů: $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$,

d) $\sphericalangle AOB = 2\gamma$, je-li $\gamma \leqq 90°$, nebo $\sphericalangle AOB = 360° - 2\gamma$, je-li $\gamma > 90°$ (s cyklickými obměnami pro úhly α a β).

K zajímavému důsledku dojdeme, utvoříme-li k relaci $\boldsymbol{p}$ podle O relaci $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle O.

Věta 38. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle* O *a dvojice* $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\boldsymbol{p}}$ *podle* O, *potom příslušný pól* $\bar{O}$ *je průsečíkem výšek* $\triangle A_1B_1C_1$ *a středem kružnice vepsané* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ *a to:*

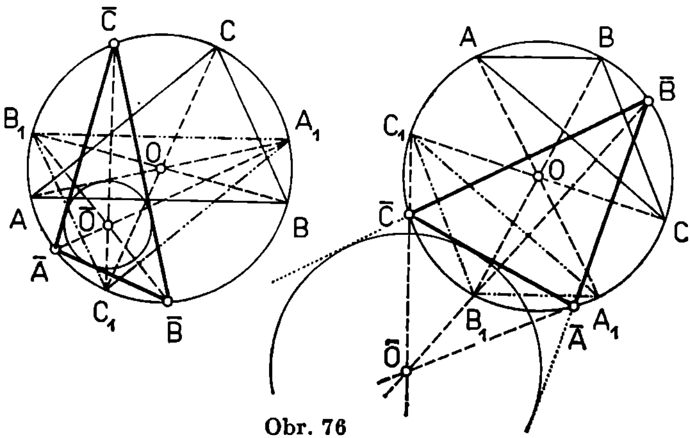
a) *uvnitř* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, *je-li* $\triangle ABC$ *ostroúhlý,*

b) *vně* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, *je-li* $\triangle ABC$ *tupoúhlý.*

Důkaz. a) Na obr. 76 vlevo je $\triangle ABC$ ostroúhlý. Protože přímky AA_1, BB_1 a CC_1 procházejí středem O kružnice $\triangle ABC$ opsané, jsou trojúhelníky $\triangle AA_1\bar{A}$, $\triangle BB_1\bar{B}$ a $\triangle CC_1\bar{C}$ podle věty Thaletovy pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech $\bar{A}$, $\bar{B}$ a $\bar{C}$.

Je tedy $A_1\bar{A} \perp A\bar{A}$ a současně podle věty 13 $A\bar{A} \parallel B_1C_1$, takže $\bar{A}A_1 \perp B_1C_1$ a obdobně i $\bar{B}B_1 \perp A_1C_1$; $\bar{C}C_1 \perp A_1B_1$.

Podle věty 13 však přímky $\bar{A}A_1$, $\bar{B}B_1$ a $\bar{C}C_1$ procházejí pólem $\bar{O}$, čímž je dokázáno, že pól $\bar{O}$ je průsečíkem výšek $\triangle A_1B_1C_1$, ale také podle věty 30 je středem kružnice vepsané $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.



Obr. 76

b) Na obr. 76 vpravo je $\triangle ABC$ tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu A. Ukázali jsme již v důkazu věty 13, že přímky $\bar{A}A_1$, $\bar{B}B_1$ a $\bar{C}C_1$ procházejí týmž bodem, který však v tomto případě leží vně kružnice $\triangle ABC$ opsané. Podle věty 10 je tu nutnou a postačující podmínkou, aby trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ byly opačného smyslu. Dokažme, že tomu tak skutečně je. Z vlastností středové souměrnosti vyplývá, že trojúhelníky $\triangle ABC$

a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou téhož smyslu. Protože podle předpokladu jsou úhly $\sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle B_1A_1C_1$ tupé, odděluje přímka AA_1 bod B od bodu C, jakož i bod B_1 od bodu C_1, a to tak, že B_1 leží v polorovině $\overrightarrow{AA_1C}$ a bod C_1 v polorovině $\overrightarrow{AA_1B}$. Dále je podle věty 13

$$A\bar{A} \parallel B_1C_1 \parallel BC,$$

takže bod $\bar{A}$ leží v polorovině $\overrightarrow{BCA}$. Proto i přímka $\bar{A}A_1$ odděluje shora uvedené dvojice bodů. Uvidíme dále, že přímky $B\bar{B}$ a $C\bar{C}$ se navzájem protínají na přímce $\bar{A}A_1$. Proto při konstrukci podle věty 13 padne bod $\bar{B}$ do poloroviny $\overrightarrow{\bar{A}A_1C}$, kde leží i bod B_1, a bod $\bar{C}$ do poloroviny $\overrightarrow{\bar{A}A_1B}$, kde leží i bod C_1. Jsou tedy trojúhelníky $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a $\triangle A_1B_1C_1$ opačného smyslu a podle věty 10 se polopřímky $\bar{B}B_1$, $\bar{C}C_1$ a ovšem i $\bar{A}A_1$ protínají vně kružnice $\triangle ABC$ opsané. Jejich průsečík je na obr. 76 vpravo označen $\bar{O}$.

Nyní už jenom musíme dokázat, že bod $\bar{O}$ je průsečík výšek $\triangle A_1B_1C_1$.

Postup bude stejný jako v části a) důkazu:

Také zde je $C\bar{C} \perp \bar{C}C_1 \Rightarrow \bar{C}C_1 \perp B_1A_1$, protože je $C\bar{C} \parallel B_1A_1$.

Obdobně je $\bar{B}B_1 \perp C_1A_1$ a tedy i $\bar{O}A_1 \perp B_1C_1$.

Bod $\bar{O}$ je proto průsečíkem výšek v $\triangle A_1B_1C_1$ a podle věty 30 současně středem kružnice vně vepsané $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, a to proti vrcholu $\bar{A}$.

Poznámka 1. Trojúhelníky v právě popsané složené relaci $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ podle pólu O mají ještě některé další vlastnosti, které stojí za zmínku. Na obr. 76 vpravo je průsečík polopřímek $B_1\bar{B}$ a $C\bar{C}$ (nevyznačený) středem kružnice vepsané trojúhelníku $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Pravdivost tohoto tvrzení vyplývá přímo z konstrukce:

$$B\bar{B} \parallel A_1C_1 \parallel CA \Rightarrow AB = C\bar{B}, \text{ protože}$$

$$\text{čtyřúhelník } \bar{B}BAC \text{ je lichoběžník.} \qquad (2.21)$$

$$A\bar{A} \parallel C_1B_1 \parallel BC \Rightarrow AB = \bar{A}C, \text{ protože také}$$

$$\text{čtyřúhelník } \bar{A}CBA \text{ je lichoběžník.} \qquad (2.22)$$

$$\text{Podle (2.21) a (2.22) je potom } C\bar{B} = C\bar{A},$$

$$\text{neboli } \sphericalangle\bar{B}\bar{C}C = \sphericalangle\bar{A}\bar{C}C, \text{ takže polopřímka } \bar{C}C$$

$$\text{je osou } \sphericalangle\bar{A}\bar{C}\bar{B}. \qquad (2.23)$$

Obdobně je v lichoběžníku $ABC\bar{C}$ $AC = B\bar{C}$ a v lichoběžníku $\bar{A}CBA$ $AC = B\bar{A}$, odkud pak plyne $B\bar{C} = B\bar{A}$,

$$\text{což znamená, že } \sphericalangle\bar{A}\bar{B}B_1 = \sphericalangle C\bar{B}\bar{B}_1 \text{ a polopřímka}$$

$$\bar{B}B_1 \text{ je osou } \sphericalangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}. \qquad (2.24)$$

Podle (2.23) a (2.24) se polopřímky $C\bar{C}$ a $\bar{B}B_1$ protnou v jednom bodě, a to ve středu S kružnice vepsané $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Přímým důsledkem toho pak je, že $CC_1 \perp \bar{A}\bar{B}$, $AA_1 \perp \bar{B}\bar{C}$, $BB_1 \perp \bar{C}\bar{A}$.

Podle předchozích úvah jsou body B a C po řadě středy oblouků $\bar{A}\bar{C}$ a $\bar{A}\bar{B}$, takže například přímka CC_1, která prochází středem O kružnice opsané $\triangle ABC$, je osou tětivy $\bar{A}\bar{B}$ a obdobně přímka BB_1 osou tětivy $\bar{A}\bar{C}$. Potom ovšem i přímka AA_1 je osou tětivy $\bar{B}\bar{C}$.

Poznámka 2. Zde je třeba ještě připomenout, že věta 38, jak ostatně vyplývá z jejího textu, neplatí pro trojúhelník pravoúhlý. To proto, že k pravoúhlému trojúhelníku lze sestrojit $\triangle A_1B_1C_1$ v relaci $\boldsymbol{p}$ podle O, avšak nikoliv $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ v relaci $\bar{\boldsymbol{p}}$ podle O. Má-li totiž $\triangle ABC$ pravý úhel například při vrcholu A, potom body $\bar{B}$ a $\bar{C}$ splynou.

Nyní obrátíme svou pozornost k vlastnostem relace $\boldsymbol{p}$ podle pólu T, kde T je těžiště daného trojúhelníku. Ukažme nejdříve, že v tom případě stojí za zmínku především zvláštní rozmístění vrcholů uvažovaných trojúhelníků na kružnici jim opsané.

Věta 39. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ *podle pólu* T, *kde* T *je těžiště* $\triangle ABC$, *jehož strany mají velikosti* $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. *Potom vrcholy uvažovaných trojúhelníků leží na společné kružnici opsané tak, že je*

$$A_1B : A_1C = b : c,\ B_1C : B_1A = c : a,$$
$$C_1A : C_1B = a : b.$$

Důkaz (obr. 77). Na obr. 77 je T těžiště $\triangle ABC$ a A^+ střed strany BC. Z podobnosti $\triangle A_1BA^+ \sim \triangle CAA^+$ vyplývá

$$A_1B : BA^+ = CA : AA^+$$

a odtud

$$A_1B = \frac{CA \,.\, BA^+}{AA^+} = \frac{b \,.\, a}{2t_a},$$

dosadíme-li $CA = b$, $BA^+ = \frac{a}{2}$, $AA^+ = t_a$, kde t_a je těžnice příslušná ke straně BC. (2.25)

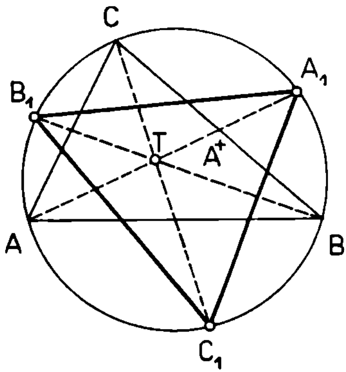
Obdobně pak z podobnosti $\triangle A_1CA^+ \sim \triangle BAA^+$ plyne

$$A_1C : CA^+ = BA : AA^+$$

a odtud

$$A_1C = \frac{BA . CA^+}{AA^+} = \frac{c . a}{2t_a}, \qquad (2.26)$$

když $BA = c$, $CA^+ = \frac{a}{2}$, $AA^+ = t_a$.



Obr. 77

Ze (2.25) a (2.26) už dostaneme dělením a po úpravě krácením:

$$A_1B : A_1C = b : c.$$

Zbývající dva vztahy jsou výsledkem cyklických záměn.

Protože důkaz se opírá o rovnost úseček $CA^+ = BA^+ = \frac{a}{2}$, má vlastnost uvedenou ve větě 39 právě relace p podle T. U všech v této kapitole probíraných relací jsme našli víceméně jednoduché vztahy mezi velikostmi vnitřních úhlů první a druhé složky, což umožňovalo řešení úlohy, kde jsme k dané druhé složce z relací p nebo q dovedli sestrojit složku první. Jak uvidíme dále, u relace p podle T žádný takový jednoduchý vztah neexistuje. Proto nejdříve věnujeme pozornost vztahům mezi velikostmi stran a těžnic uvažovaných trojúhelníků.

Věta 40. *Mějme dvojici* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ *podle* T*, kde strany* $\triangle ABC$ *mají velikosti po řadě* a, b, c *a k nim příslušné těžnice velikosti* t_a, t_b, t_c. *Potom platí*

$$\overline{B_1C_1} : \overline{C_1A_1} : \overline{A_1B_1} = a \,.\, t_a : b \,.\, t_b : c \,.\, t_c \,.$$

Důkaz (obr. 77). Z podobnosti $\triangle B_1C_1T \sim \triangle CBT$ plyne

$$\overline{B_1C_1} : \overline{CB} = \overline{B_1T} : \overline{CT} \text{ čili } \overline{B_1C_1} = \frac{\overline{CB} \,.\, \overline{B_1T}}{\overline{CT}} \,.$$

Dosadíme-li do této rovnosti $\overline{CB} = a$, $\overline{CT} = \frac{2}{3} t_c$, $\overline{B_1T} = \overline{B_1B^+} + \overline{B^+T}$, kde

$$\overline{B_1B^+} = \frac{\overline{AB^+} \,.\, \overline{CB^+}}{\overline{B^+B}} = \frac{b^2}{4 \,.\, t_b} \wedge \overline{B^+T} = \frac{1}{3} t_b \,,$$

dostaneme po úpravách

$$B_1C_1 = \frac{a(3b^2 + 4t_b^2)}{8t_bt_c}$$

V čitateli tohoto výrazu dále dosaďme

$$t_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

a po dalších úpravách dojdeme ke konečnému výsledku:

$$\overline{B_1C_1} = \frac{a(a^2 + b^2 + c^2)}{4t_bt_c}$$

s cyklickými záměnami:

$$\overline{C_1A_1} = \frac{b(a^2 + b^2 + c^2)}{4t_at_c},$$

$$\overline{A_1B_1} = \frac{c(a^2 + b^2 + c^2)}{4t_at_b}. \qquad (2.27)$$

Utvoříme-li z výrazů (2.27) postupný poměr, můžeme jej zkrátit výrazem

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t_at_bt_c}$$

a dostaneme tvar, jehož pravdivost jsme měli dokázat:

$$\overline{B_1C_1} : \overline{C_1A_1} : \overline{A_1B_1} = a.t_a : b.t_b : c.t_c.$$

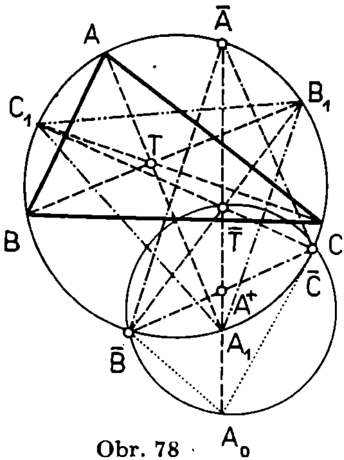
Užijeme-li sinové věty a současně vyjádříme velikosti těžnic pomocí velikostí stran $\triangle ABC$, bude

$$\sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma' = a\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} :$$
$$: b\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2} : c\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Výsledek, ke kterému jsme právě dospěli, napovídá, že k danému $\triangle ABC$ lze početně i konstrukčně nalézt $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle T, avšak obrácenou úlohu nelze řešit ani početně, ani konstrukcí. Spokojíme se však tvrzením, že početní řešení vede k soustavě rovnic čtvrtého stupně, která má aspoň dvě reálná řešení, pokud $\triangle ABC$ není rovnostranný, a jedno řešení v tom případě, když rovnostranný je. Toto tvrzení nyní dokážeme.

Věta 41. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \mathbf{p}$ *podle* T *a dvojice* $\triangle A_1B_1C_1,\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\mathbf{p}}$ *podle* T, *potom příslušný pól* $\bar{T}$ *je těžištěm* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Důkaz (obr. 78). Na obr. 78 je zobrazen $\triangle ABC$, dále $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\mathbf{p}$ podle T a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle věty 13 z relace $\bar{\mathbf{p}}$ podle T. Trojúhelníku $\bar{B}\bar{T}\bar{C}$ je opsána kružnice a její průsečík s přímkou $\bar{A}A_1$ je označen A_0.



Obr. 78

Podle vět 4 a 14 je

$$\sphericalangle \bar{A}\bar{T}\bar{C} = \bar{\beta} + \beta' = 180° - \beta \Rightarrow \sphericalangle A_0\bar{T}\bar{C} = \beta = \\ = \sphericalangle A_0\bar{B}\bar{C},$$

$$\sphericalangle \bar{B}\bar{T}\bar{C} = \bar{\alpha} + \alpha' = 180° - \alpha \Rightarrow \sphericalangle \bar{B}A_0\bar{C} = \alpha.$$

Trojúhelníky $\triangle A_0\bar{B}\bar{C}$ a $\triangle ABC$ mají tudíž dva vnitřní úhly shodné, takže je

$$\triangle A_0\bar{B}\bar{C} \sim \triangle ABC. \tag{2.28}$$

Současně plyne z konstrukce

$$C_1B = A_1\bar{B} \Rightarrow \sphericalangle C_1CB \equiv \sphericalangle TCB = \sphericalangle \bar{B}\bar{C}A_1$$

a také

$$A_1\bar{C} = B_1C \Rightarrow \sphericalangle A_1\bar{B}\bar{C} = \sphericalangle CBB_1 \equiv \sphericalangle CBT$$

a odtud

$$\triangle BTC \sim \triangle \bar{B}A_1\bar{C}\,. \tag{2.29}$$

V podobnosti podle (2.28) a (2.29) odpovídá v obou trojúhelnících straně BC strana $\bar{B}\bar{C}$ a tudíž i bodu T bod A_1. Tím je dokázáno, že bod A_1 je těžištěm $\triangle A_0\bar{B}\bar{C}$ a současně že přímka $\bar{A}A_0$ protíná úsečku $\bar{B}\bar{C}$ v jejím středu A^+. Proto platí v kružnici k:

$$\bar{A}A^+ . A_1A^+ = \bar{B}A^+ . \bar{C}A^+$$

a v kružnici $\bar{k}$: $\bar{T}A^+ . A_0A^+ = \bar{B}A^+ . \bar{C}A^+$, neboli

$$\bar{A}A^+ . A_1A^+ = \bar{T}A^+ . A_0A^+ .$$

Dáme-li poslednímu výrazu tvar úměry, bude důkaz úplný, protože

$$\bar{A}A^+ : \bar{T}A^+ = A_0A^+ : A_1A^+ = 3 : 1\,,$$

takže bod $\bar{T}$ je těžištěm $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Současně je dokázáno, že v složené relaci $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T je $\triangle ABC$ různý od $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, a to s jedinou výjimkou, když $\triangle ABC$ je rovnostranný, takže vrcholy $\bar{A}$, A splynou stejně jako B, $\bar{B}$ a C, $\bar{C}$.

V této souvislosti je dobře si připomenout, že také složená relace $p \circ \bar{p}$ podle T je symetrická s relací $p \circ \bar{p}$ podle $\bar{T}$ a že i zde platí věta 14 o velikostech vnitřních úhlů v trojúhelnících $\triangle ABC$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Pro vztahy mezi velikostmi stran uvažovaných trojúhelníků pak platí další věta:

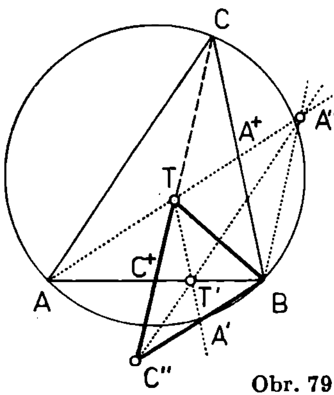
Věta 42. *Nechť trojúhelníky ve složené relaci $\triangle ABC$ $p \circ \bar{p}$ $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T mají velikosti stran a, b, c, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ a velikosti těžnic t_a, t_b, t_c, $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$, $\bar{t}_c$, potom o těchto velikostech platí:*

a) $a : b : c = \bar{t}_a : \bar{t}_b : \bar{t}_c$,

b) $\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = t_a : t_b : t_c$.

Důkaz (obr. 79). Na obr. 79 je T těžiště $\triangle ABC$ a A^+ střed strany BC. Dále je $A^+A' = A^+T$ a obdobně $B^+B' = B^+T$, $C^+C' = C^+T$. Čtyřúhelník $TBA'C$ je rovnoběžník, a proto

$$BA' = TC = \frac{2}{3}t_c,\ TA' = \frac{2}{3}t_a,\ TB = \frac{2}{3}t_b. \quad (2.30)$$



Obr. 79

Obdobně je

$$CT = \frac{2}{3} t_c, B'C = \frac{2}{3} t_a, TB' = \frac{2}{3} t_b, \qquad (2.31)$$

a také

$$TC' = \frac{2}{3} t_c, AT = \frac{2}{3} t_a, C'A = \frac{2}{3} t_b. \qquad (2.32)$$

Podle (2.30), (2.31) a (2.32) je

$$\triangle TA'B \cong \triangle B'CT \cong \triangle ATC'. \qquad (2.33)$$

Pro lepší přehlednost nejsou na obr. 79 zakresleny trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ z uvažované relace. Předpokládáme-li, že tyto trojúhelníky mají velikosti vnitřních úhlů po řadě α', β', γ', $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, je dále

$$\sphericalangle ATB = (\gamma + \gamma') \Rightarrow \sphericalangle BTA' = 180° - (\gamma + \gamma') = \bar{\gamma},$$

$$\sphericalangle ATC = (\beta + \beta') \Rightarrow \sphericalangle ATC' = 180° - (\beta + \beta') = \bar{\beta},$$

$$\sphericalangle CTB = (\alpha + \alpha') \Rightarrow \sphericalangle CTB' = 180° - (\alpha + \alpha') = \bar{\alpha}.$$

Užijeme-li nyní věty 14, zjistíme, že například $\triangle BTA'$ a podle (2.33) i $\triangle ATC'$ a $\triangle CTB'$ jsou podobné $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, takže

$$\bar{a} : \bar{b} : \bar{c} = t_a : t_b : t_c,$$

$$\frac{a}{2} : \frac{b}{2} : \frac{c}{2} = \bar{t}_a : \bar{t}_b : \bar{t}_c$$

čili

$$a : b : c = \bar{t}_a : \bar{t}_b : \bar{t}_c,$$

protože v uvažovaných trojúhelnících mají těžnice BA^+, CB^+ a AC^+ velikosti $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ a $\frac{c}{2}$. Je ovšem možno namítnout, že jsme tu užili obrácení věty 14, jehož pravdivost jsme nikde nedokázali. Platnost obrácené věty 14 však jednoznačně vyplývá z věty 6.

Na závěr této kapitoly ještě uveďme důležitý důsledek věty 14, podle kterého je

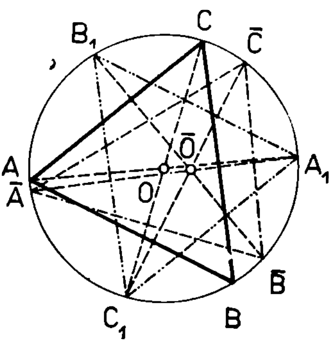
$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \bar{a}.t_a : \bar{b}.t_b : \bar{c}.t_c.$$

Důkaz není nutno podávat, protože pravdivost tvrzení vyplývá ze symetričnosti relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ a věty 40.

K předchozím úvahám nyní opět připojme několik příkladů úloh a obvyklá cvičení.

Příklad 1. Na kružnici $k = (O;\ 3{,}5)$ zvolte tři navzájem různé body A, B_1, $\overline{C}$ a sestrojte trojici trojúhelníků $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}_1\ \triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}_2\ \triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle P tak, aby bylo $A_1\overline{A} \perp BC$, $B_1\overline{B} \perp AC$, $C_1\overline{C} \perp AB$.

Rozbor (obr. 80). Podle zadání splňují hledané trojúhelníky předpoklady věty 38, a proto je $P \equiv O$, kde O je střed dané kružnice.



Obr. 80

Konstrukce. Přímka AO protne kružnici k v bodě A_1, přímka B_1O v bodě B. Dále je $A_1\overline{C} = B_1C$ a přímka $\overline{C}O$ protne kružnici k v bodě C_1. Podle věty 13 pak je $A_1\overline{B} = C_1B$ a $C_1\overline{A} = B_1A$.

Důkaz. Správnost vyplývá z věty 13, neboť jsme při konstrukci postupovali přesně podle této věty.

Diskuse. Nutnou a postačující podmínkou, aby úloha měla řešení, je, aby přímky AB_1, $A\overline{C}$ a $B_1\overline{C}$ neprocházely středem O, neboť:

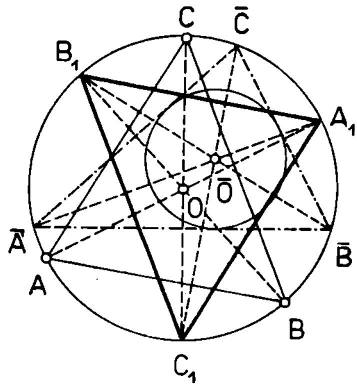
1. Je-li $O \in \overleftrightarrow{AB_1}$, je $B \equiv A_1 \wedge A \equiv B_1 \Rightarrow A \equiv B$.
2. Je-li $O \in \overleftrightarrow{A\overline{C}}$, je $A_1 \equiv \overline{C} \wedge A_1\overline{C} = B_1C = 0$ a odtud $B_1 \equiv C$, $C_1 \equiv B$, takže $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Podle poznámky 2 za větou 38 však tato věta v pravoúhlém trojúhelníku neplatí.
3. Je-li $O \in \overleftrightarrow{B_1\overline{C}}$, je $B_1 \equiv C_1$.

Zvolíme-li nejdříve body A a B_1, jsou již jednoznačně určeny body A_1 a B. Potom bod $\overline{C}$ můžeme zvolit na menším nebo na větším oblouku kružnice k $\triangle ABC$ opsané mezi body A a B_1. V prvním případě jakož i ve druhém může trojúhelník $\triangle ABC$ být ostroúhlý i tupoúhlý. Zajímavý je případ, kdy bod $\overline{C}$ je středem oblouku $\widehat{AB_1}$, neboť splynou body $\overline{C}$ a C_1, takže pól $\overline{O}$ leží na tečně kružnice k v jejím bodě $\overline{C}$.

Příklad 2. Ke zvolenému $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ sestrojte zbývající dva z trojice $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ $\bar{\boldsymbol{p}}$ $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle O.

Rozbor. Podle věty 38 je pól $\overline{O}$ středem kružnice vepsané $\triangle\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Konstrukce (obr. 81). Vepíšeme kružnici $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a její střed označíme $\bar{O}$. $\triangle A_1B_1C_1$ je v relaci $\boldsymbol{p}$ podle $\bar{O}$ s $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ a $\triangle ABC$ v relaci $\boldsymbol{p}$ podle O s $\triangle A_1B_1C_1$. Tím je dán postup konstrukce.



Obr. 81

Důkaz správnosti je dán větou 38.

Diskuse. Všechny body v průběhu konstrukce jsou zvolenými prvky určeny jednoznačně s výjimkou pravoúhlého trojúhelníku. Úloha proto má až na tuto výjimku řešení vždy a právě jedno.

Příklad 3. Stanovte postačující podmínku pro to, aby $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle O byl pravoúhlý.

Řešení. Podle věty 38 je především $\triangle ABC \cong$ $\cong \triangle A_1B_1C_1$ a pól $\bar{O}$ je průsečík výšek $\triangle A_1B_1C_1$. Platí proto podle věty 34 $\bar{\alpha} = 180° - 2\alpha'$ nebo $\bar{\beta} = 180° -$

$— 2\beta'$, $\bar{\gamma} = 180° — 2\gamma'$. Je tedy podle zadání například $90° = 180° — 2\alpha$, odkud dostáváme $\alpha = \alpha' = 45°$.

Může ovšem být také $\beta' = 45°$ nebo $\gamma' = 45°$. Protože však $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ může mít nanejvýš jeden úhel velikosti $90°$, je nutnou a postačující podmínkou, aby právě jeden vnitřní úhel $\triangle ABC$ měl velikost $45°$.

Příklad 4. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 12$; $AC = 18$; $\sphericalangle CAB = 60°$].

Je-li dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T, dělí polopřímka AA_1 $\sphericalangle CAB$ na dvě části, a to:

$$\alpha_1 = \sphericalangle A_1AB \text{ a } \alpha_2 = \sphericalangle A_1AC.$$

Ukažte, že v daném případě je $\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = 3 : 2$, a potom vypočítejte velikosti úhlů α_1 a α_2!

Řešení. a) Podle věty 39 je

$$A_1B : A_1C = b : c = 18 : 12 = 3 : 2. \qquad (2.34)$$

Současně je $A_1B = 2.r.\sin \alpha_1$ a $A_1C = 2r.\sin \alpha_2$. Dosadíme-li tyto hodnoty do (2.34), bude

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 = 3 : 2.$$

b) Podle zadání je $\sin \alpha_1 = \sin (\alpha — \alpha_2)$, takže

$$\frac{\sin (\alpha — \alpha_2)}{\sin \alpha_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \sin (\alpha — \alpha_2) = 3 \sin \alpha_2 \qquad (2.35)$$

za předpokladu, že $\alpha_2 \neq 0$, což v tomto případě platí.

Rovnici (2.35) upravíme nejdříve na tvar

$$2(\sin \alpha . \cos \alpha_2 — \cos \alpha . \sin \alpha_2) = 3 \sin \alpha_2,$$

potom dosadíme

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{1}{2}, \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}.$$

Ekvivalentními úpravami pak dojdeme ke konečnému tvaru

$$\sin^2 \alpha_2 = \frac{3}{19}.$$

Tato ryze kvadratická rovnice má jediný vyhovující kořen, a to $\alpha_2 = 23°25'$, odkud pak $\alpha_1 = 36°35'$. Druhý kořen je záporný, takže příslušný úhel je větší než 180°.

Příklad 5. Je dán $\triangle ABC$ $[a = \overline{BC} = 3, b = \overline{AC} = 5, c = \overline{AB} = 4]$. Narýsujte trojici $\triangle ABC\, \boldsymbol{p}\, \triangle A_1B_1C_1\, \bar{\boldsymbol{p}}$ $\bar{\boldsymbol{p}}\, \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle T a potom vypočítejte velikosti všech stran, těžnic a vnitřních úhlů této trojice trojúhelníků. Výsledky porovnejte!

Řešení. Postup konstrukce snad není nutno popisovat. Připomeňme jenom, že jde o pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B, neboť je

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

Velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$ lze tedy určit velmi snadno a jsou to: $\alpha = 36°52'12''$, $\beta = 90°$, $\gamma = 53°07'48''$.

K výpočtu velikostí těžnic $\triangle ABC$ použijeme běžně používaných vzorců, zde například:

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = 4{,}272,$$

a obdobně

$$t_b = 2{,}5,$$

$$t_c = 3{,}605.$$

Velikosti stran $\triangle A_1B_1C_1$ dostaneme podle (2.27), kde například

$$\overline{B_1C_1} = \frac{a(a^2 + b^2 + c^2)}{4 . t_b . t_c} = 4{,}160,$$

a obdobně

$$\overline{A_1C_1} = 4{,}068,$$
$$\overline{A_1B_1} = 4{,}687.$$

Protože podle zadání je velikost poloměru opsané kružnice rovna jedné polovině přepony AC, je $r = 2{,}5$. Z toho snadno zjistíme velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$, neboť je například

$$\sin \alpha' = \frac{\overline{B_1C_1}}{2r} = \frac{4{,}160}{5} = \text{atd.},$$

takže

$$\alpha' = 56°18'38'', \beta' = 54°14'46'', \gamma' = 69°26'36''.$$

Velikosti vnitřních úhlů $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ zjistíme užitím věty 14, kde například

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha') = 86°49'10'', \bar{\beta} = 35°45'14'',$$
$$\bar{\gamma} = 57°25'36''.$$

Tím je usnadněn výpočet velikostí stran $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$:

$$\bar{a} = 2 . r . \sin \bar{\alpha} = 4{,}993, \bar{b} = 2{,}922, \bar{c} = 4{,}21.$$

Velikosti těžnic $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ pak zjistíme stejně jako velikosti těžnic $\triangle ABC$: $\bar{t}_a = 2{,}63$, $\bar{t}_b = 4{,}38$, $\bar{t}_c = 3{,}50$.

Všechny velikosti jsou tu ovšem určeny jen přibližně, a to u délek s přesností na tři až čtyři platné cifry, u úhlů s přesností na vteřiny. Podle toho je třeba i posuzovat výsledky získané měřením.

Příklad 6. I když výsledky získané v předcházející úloze jsou jenom přibližné, přece lze s výhradou tvrdit, že

$$a\,.\,t_a : b\,.\,t_b : c\,.\,t_c \doteq \bar{a}\,.\,\bar{t}_a : \bar{b}\,.\,\bar{t}_b : \bar{c}\,.\,\bar{t}_c\,.$$

Ukažte, že nejde o jev nahodilý!

Řešení. Víme, že složená relace $\boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}$ je symetrická. Z toho lze soudit, že platí-li pro dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T věta 40, tj.

$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = a\,.\,t_a : b\,.\,t_a : c\,.\,t_a,$$

musí platit i pro dvojici $[\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle $\bar{T}$, takže

$$B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = \bar{a}\,.\,\bar{t}_a : \bar{b}\,.\,\bar{t}_b : \bar{c}\,.\,\bar{t}_c\,.$$

Tím je dokázána obecná platnost vztahu uvedeného v úloze v přímém souladu s důsledkem věty 14 uvedeným na konci této kapitoly.

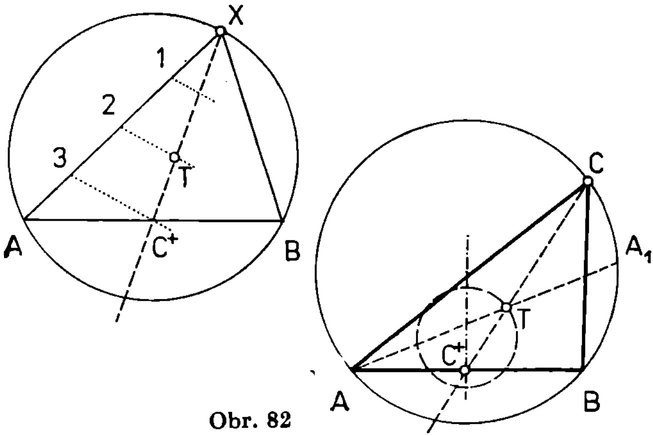
Příklad 7. Na dané kružnici $k = (O; 4)$ leží body A, B a A_1 tak, že $AB = 6$ cm, $BA_1 = 3$ cm.

a) Narýsujte dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T.

b) Proveďte diskusi úlohy pro případ, kdy velikost BA_1 není známa a bod A_1 probíhá celou kružnici k.

a) *Rozbor.* Vyšetříme nejdříve množinu všech těžišť T trojúhelníků ABX, kde X je bod, který probíhá kružnici k. Na obr. 82 je C^+ střed strany AB hledaného $\triangle ABC$. T je jeho těžiště. Víme, že v tom případě je $C^+T : C^+X = 1 : 3$. Tím je dána stejnolehlost $H = \left[C^+; \frac{1}{3}\right]$, v níž obrazem kružnice k je opět kružnice s poloměrem velikosti $\frac{r}{3}$ $\left(\text{zde } \frac{4}{3}\right)$ opsaná $\triangle A'B'T$, kde A' a B' leží na

AB tak, že $C^+A' = C^+A : 3$, $C^+B' = C^+B : 3$. Tato kružnice je hledanou množinou s tím, že body A' a B' nejsou prvky této množiny. Její střed pak leží na polo-



Obr. 82

přímce C^+O tak, že $C^+O' = \frac{1}{3} C^+O$. Pro zjednodušení konstrukce je dobře si uvědomit, že je

$$A'O' = B'O' = \frac{1}{3} r = \frac{4}{3},$$

takže je $k' = \left(O'; \frac{4}{3}\right)$.

Popis *konstrukce*. Máme-li sestrojenu kružnici k', bude hledaný bod T průsečíkem polopřímky AA_1 s kružnicí k' a potom bod C průsečíkem polopřímky C^+T s kružnicí k.

b) Z předchozího je již zřejmé, že existence a počet řešení je závislý na tom, zda přímka AA_1 bude mít společné body s kružnicí k. Vedeme-li bodem A tečny ke kružnici k', protnou tyto tečny kružnici k v bodech M a N (viz obr. 82 vlevo). Potom bude mít úloha právě jedno řešení, bude-li $A_1 \equiv M$ nebo $A_1 \equiv N$, dvě řešení, bude-li A_1 uvnitř $\sphericalangle MAN$, a žádné řešení, bude-li A_1 ležet vně $\sphericalangle MAN$.

Cvičení

1. K danému $\triangle ABC$ [$AB = 6$; $BC = 4{,}5$; $CA = 7$] sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ podle O a $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle O. Sestrojte i pól $\overline{O}$.
2. Je dán $\triangle \overline{K}\overline{L}\overline{M}$ [$KL = 55$; $\overline{L}\overline{M} = 35$; $\sphericalangle \overline{M}\overline{K}\overline{L} = 30°$; $\sphericalangle \overline{L}$ je tupý] ze složené relace $\triangle KLM\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{K}\overline{L}\overline{M}$ podle O. Sestrojte $\triangle KLM$. Udejte počet řešení a zdůvodněte!
3. Velikosti vnitřních úhlů v $\triangle ABC$ jsou v poměru $2 : 3 : 10$. V jakém poměru jsou velikosti vnitřních úhlů $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle O?
4. V dané dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle O známe velikosti vnitřních úhlů ve druhé složce, a to: $\overline{\alpha} = 36°54'$, $\overline{\beta} = 81°12'$. Určete velikosti vnitřních úhlů první složky, tj. $\triangle ABC$!
5. Úlohu 3 řešte obecně!
6. Úlohu 4 řešte obecně!
7. Na dané kružnici zvolte tři navzájem různé body A, C_1, $\overline{C}$. Potom sestrojte trojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle O.
8. Úlohu 7 opakujte s trojicí bodů A, B, $\overline{A}$!
9. Úlohu 7 opakujte s trojicí bodů $\overline{A}$, B_1, C_1.
10. Úlohu 7 opakujte s trojicí $\overline{A}$, $\overline{B}$, C_1. Tvořte dále obdobné úlohy!
11. Je dán $\triangle KLM$ velikostmi stran, a to: $KL = 6$, $LM = 5$, $MK = 7$. Sestrojte trojici $\triangle KLM\ \boldsymbol{p}\ \triangle K_1L_1M_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{K}\overline{L}\overline{M}$ podle T.
12. K libovolně zvolenému $\triangle \overline{E}\overline{F}\overline{G}$ sestrojte trojici $\triangle \overline{E}\overline{F}\overline{G}\ \boldsymbol{p}\ \boldsymbol{p}\ \triangle E_1F_1G_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle EFG$ podle $\overline{T}$!
13. Strany daného $\triangle ABC$ mají velikosti $a = \overline{BC} = 4$; $b =$

$= \overline{AC} = 5$; $c = \overline{AB} = 6$. Narýsujte trojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle T. Potom vypočítejte velikosti všech stran, všech vnitřních úhlů, těžnic v $\triangle ABC$ a $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ a poloměru kružnice opsané. Výsledky porovnejte s výsledky získanými konstrukcí!

14. Na kružnici $k = (O; 4)$ umístěte body A, B_1, C, A_1, B, C_1 v tomto daném pořadí tak, že $A_1B : A_1C = b : c$; $B_1C : B_1A = c : a$; $C_1A : C_1B = a : b$, kde a, b, c jsou velikosti úseček splňující trojúhelníkovou nerovnost.

15. Užitím věty 42 řešte známou úlohu: Sestrojit trojúhelník, jsou-li dány velikosti všech tří jeho těžnic.

16. V dané kružnici $k = (O; 4)$ sestrojte tětivy $AB = 6$ cm, $CC_1 = 7$ cm, tak aby bod C_1 byl vrcholem $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle T. Ukažte, že úloha má řešení, právě když je $CC_1 > AB$.

17. Úlohu 16 opakujte pro tětivy $\overline{B}\overline{C} = 5{,}5$ cm a $\overline{A}A_1 = 7$ cm a relaci $\boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}$ podle T.

18. Na kružnici $k = (O; 3{,}5\ \text{cm})$ leží body E, F a F_1 tak, že $EF = 5{,}5$ cm, $EF_1 = 2{,}5$ cm. Narýsujte dvojici $[\triangle EFG, \triangle E_1F_1G_1] \in \boldsymbol{p}$ podle T.

19. V daném různostranném trojúhelníku jsou zakresleny všechny tři těžnice AA', BB', CC' a jejich průsečík T. Rozstřihneme-li tento trojúhelník podél těžnic, získáme šest různých trojúhelníků, z nichž lze po dvou složit tři shodné trojúhelníky podobné $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ze složené relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle T. Dokažte!

20. Obměňte úlohu 20 pro $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z téže relace!

21. Vypočítejte velikosti úhlů $\beta_1 = \sphericalangle B_1BA$ a $\beta_2 = \sphericalangle B_1BC$ v dvojici $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle T, je-li $AB = 24$ mm, $BC = 32$ mm a $\sphericalangle CBA = 45°$.

22. Je-li $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle T, je $t_a : t_b : t_c = \sin \overline{\alpha} : \sin \overline{\beta} : \sin \overline{\gamma}$, kde t_a, t_b, t_c jsou velikosti těžnic $\triangle ABC$ a $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ velikosti vnitřních úhlů v $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$. Dokažte!

23. Je-li $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle T, $\bar{t}_a; \bar{t}_b : \bar{t}_c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$, kde α, β, γ jsou velikosti vnitřních úhlů v $\triangle ABC$ a $\bar{t}_a$, $\bar{t}_b$, $\bar{t}_c$ velikosti těžnic v $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$. Dokažte!

24. Ukažte, že důsledkem úloh 22 a 23 je vztah: $t_a : t_b : t_c = \sin(\alpha + \alpha') : \sin(\beta + \beta') : \sin(\gamma + \gamma') = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c}$, kde $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ jsou velikosti stran $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.