Zajímavé dvojice trojúhelníků

Kapitola 1. Vymezení základních pojmů a vztahů

In: Arnošt Niederle (author): Zajímavé dvojice trojúhelníků. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 7–87.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403989

KAPITOLA 1

A. VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ A VZTAHŮ

Předmětem našich úvah budou útvary v dvojrozměrném prostoru představovaném rovinou π_2. Tuto rovinu budeme nadále pokládat za základní množinu bodů. V ní zvolme kružnici, nejlépe jednotkovou, $k = (O; 1)$. Tím jsme základní množinu bodů rozložili na tři navzájem disjunktní podmnožiny $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}'$ a $\boldsymbol{K}''$, kde $\boldsymbol{K}$ je množina všech bodů na zvolené kružnici, $\boldsymbol{K}'$ množina všech bodů náležejících do vnitřní oblasti a $\boldsymbol{K}''$ množina všech bodů náležejících do vnější oblasti kružnice k.

Uvažme nyní, že kterékoliv tři libovolně zvolené a navzájem různé prvky množiny $\boldsymbol{K}$, například body X, Y a Z, jsou vrcholy trojúhelníku, protože žádné tři navzájem různé body na kružnici neleží v přímce. Označme množinu všech takto vytvořených trojúhelníků $\boldsymbol{M}_T$.

V množině $\boldsymbol{M}_T$, která má zřejmě nekonečně mnoho prvků, definujme binární relaci $\boldsymbol{p} \subset (\boldsymbol{M}_T \times \boldsymbol{M}_T)$ takto:

Definice 1. Dvojice navzájem různých trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ je *prvkem relace* $\boldsymbol{p}$ podle pólu P, když o jejich vrcholech platí současně:

1. $\{A, B, C\} \subset \boldsymbol{K} \wedge \{A_1, B_1, C_1\} \subset \boldsymbol{K}$;
2. přímky AA_1, BB_1, CC_1 procházejí týmž bodem $P \in \boldsymbol{K}'$.

Úmluva. Vztah uvedený v definici 1 budeme zapisovat takto:

$$\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1 \text{ podle } P, \text{ nebo}$$

$$[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ podle } P,$$

přičemž doložku „podle P“ vynecháme, nebude-li nebezpečí omylu. Je totiž možné, že příslušný pól nebude označen P, ale například S. Potom půjde o relaci $\boldsymbol{p}$ podle S.

Z definice přímo vyplývají některé vlastnosti relace $\boldsymbol{p}$:

1. Relace $\boldsymbol{p}$ je symetrická, neboť podmínky uvedené v definici jsou splněny, i když zaměníme označení vrcholů A, B, C za A_1. B_1, C_1 a naopak. (1.1)
2. Relace $\boldsymbol{p}$ je zobrazením v množině $\boldsymbol{M}_T$, neboť dvojici bodů $A \neq B$ odpovídá dvojice $A_1 \neq B_1$, takže je také $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$. (1.2)
3. Toto zobrazení je středová kolineace se středem P, neboť trojúhelníky ABC a $A_1B_1C_1$ leží tak, že přímky spojující sobě odpovídající vrcholy procházejí týmž bodem, tj. středem kolineace P. (1.3)

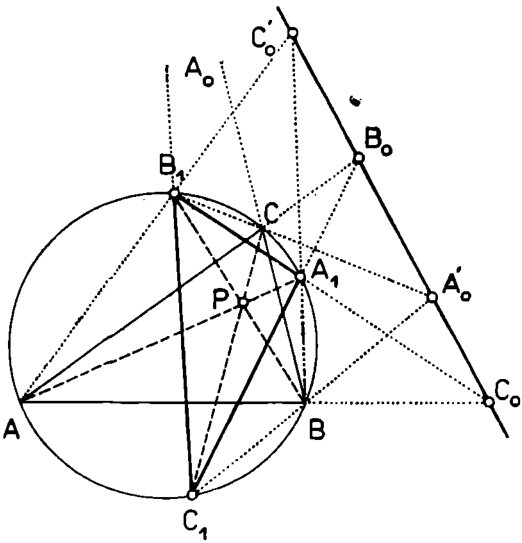
Právě jsme v podstatě citovali větu dobře známou z projektivní geometrie jako *větu Desarguesovu* o trojúhelnících. Formulace věty Desarguesovy i důkaz její pravdivosti jsou uvedeny v Dodatku. Tam jsou z obr. D 8 zřejmé i vlastnosti středové kolineace, v níž odpovídá trojúhelníku ABC trojúhelník KLM.

Připomeňme si, že středová kolineace je dána středem, osou kolineace a dvojicí sobě odpovídajících bodů, které leží na přímce jdoucí středem kolineace. Dále víme, že dvojice přímek sobě odpovídajících se protínají na ose kolineace. Je-li dán trojúhelník ABC, střed kolineace, osa kolineace a bod K odpovídající bodu A, snadno sestrojíme zbývající dva vrcholy $\triangle KLM$.

Například: přímky AC a KM se protínají na ose kolineace h v bodě H a přímka SM prochází bodem C. Přímka BC se s přímkou LM protne v bodě G rovněž na ose kolineace atd.

Vedle vlastností vyplývajících ze středové kolineace má relace **p** ještě další důležitou vlastnost, jak hned dokážeme.

Věta 1. *Je-li dvojice trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ v relaci **p** podle P, potom bod P je středem kolineace a osou kolineace je polára bodu P vzhledem ke společné kružnici těmto trojúhelníkům opsané.*



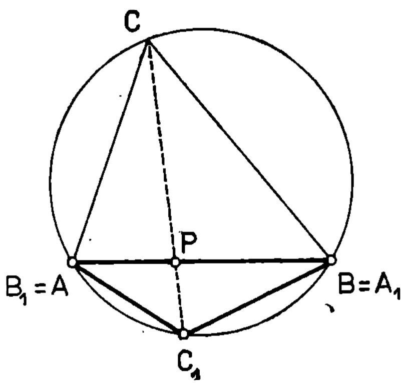
Obr. 2

Důkaz (obr. 2). Podle vzpomenuté věty Desarguesovy o trojúhelnících (1.3), procházejí-li přímky AA_1, BB_1

a CC_1 týmž bodem P, leží body $A_0 = (BC \cap B_1C_1)$, $B_0 = (AC \cap A_1C_1)$ a $C_0 = (AB \cap A_1B_1)$ na téže přímce, která je osou středové kolineace.

Uvažovaná dvojice trojúhelníků má však ještě navíc společnou kružnici opsanou k a to znamená, že přímka $p \equiv A_0B_0 \equiv B_0C_0$ je nejenom osou kolineace, ale také polárou bodu P vzhledem ke kružnici k. Toto poslední tvrzení vlastně není třeba zvlášť dokazovat. Jeho pravdivost vyplývá ze samotné konstrukce poláry bez použití tečen vedených z pólu k uvažované kružnici. Správnost konstrukce je dokázána v Dodatku. Zde je užitečné si ještě všimnout toho, že na obr. 2 se na poláře protínají ještě další tři dvojice přímek, a to: $[\overleftrightarrow{AB_1}, \overleftrightarrow{A_1B}]$, $[\overleftrightarrow{BC_1}, \overleftrightarrow{B_1C}]$, $[\overleftrightarrow{CA_1}, \overleftrightarrow{C_1A}]$, což je v dobrém souladu s dříve uvedeným tvrzením.

Z toho všeho vyplývá, že relace p podle P je zvláštní případ středové kolineace podle středu P, kde vzor a obraz mají společnou kružnici opsanou. Tato zvlášt-



Obr. 3

nost spočívá právě v tom, že sobě odpovídající dvojice bodů leží na této kružnici, což obecně o středové kolineaci neplatí. Je proto zcela na místě, že nadále nebudeme mluvit o středové kolineaci, ale o relaci $\boldsymbol{p}$ podle P.

Za zmínku jistě stojí ještě případ vyobrazený na obr. 3.

Zde pól P je vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC, takže je $A \equiv B_1 \wedge B \equiv A_1$. I v tomto případě jsou splněny podmínky uvedené v definici 1, a proto i zde můžeme říci, že trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou v relaci $\boldsymbol{p}$ podle P.

Na kartézském součinu $(\boldsymbol{M}_T \times \boldsymbol{M}_T)$ můžeme dále utvořit relaci obdobnou relaci $\boldsymbol{p}$ podle P s tím rozdílem, že příslušným pólem bude bod Q ležící ve vnější oblasti kružnice k uvažovanému trojúhelníku opsané, tedy $Q \in \boldsymbol{K}''$.

Definice 2. Dvojice navzájem různých trojúhelníků ABC a $A_2B_2C_2$ je prvkem relace $\boldsymbol{q}$ podle pólu Q ležícího vně kružnice těmto trojúhelníkům opsané, když o jejich vrcholech platí současně:

1. $\{A, B, C\} \subset \boldsymbol{K} \wedge \{A_2, B_2, C_2\} \subset \boldsymbol{K}$; přičemž množiny $\{A, B, C\}$ a $\{A_2, B_2, C_2\}$ mají nanejvýš dva společné prvky.
2. Přímky AA_2, BB_2 a CC_2 procházejí týmž bodem $Q \in \boldsymbol{K}''$.

Úmluva. Vztah uvedený v definici 2 budeme symbolicky vyjadřovat takto:

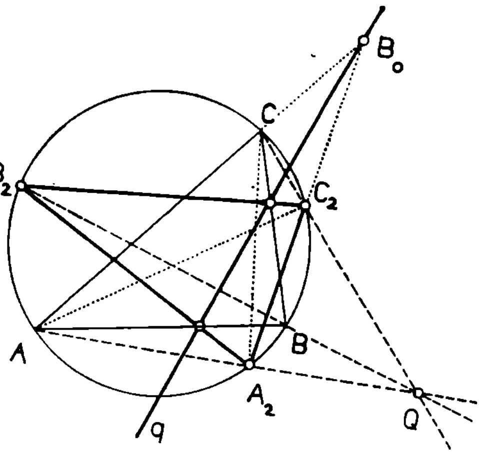
$$\triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2 \text{ podle } Q, \text{ nebo}$$

$$[\triangle ABC,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q} \text{ podle } Q.$$

Doložku „podle Q“ i zde vynecháme, nebude-li nebezpečí omylu, jako v případě relace $\boldsymbol{p}$ podle P.

Vlastnosti relace $\boldsymbol{q}$, které vyplývají přímo z definice 2, jsou zcela analogické vlastnostem relace $\boldsymbol{p}$ uvedeným v (1.1), (1.2) a (1.3), takže je nemusíme znovu zdůvodňovat. Podle toho je i relace $\boldsymbol{q}$ symetrická, jde o zobrazení v $\boldsymbol{M}_T$, a to o středovou kolineaci se středem Q. Platí i věta obdobná větě 1.

Věta 2. *Je-li dvojice trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ v relaci $\boldsymbol{q}$ podle Q, potom bod Q je středem kolineace a osou kolineace je polára bodu Q vzhledem ke společné kružnici těmto trojúhelníkům opsané.*

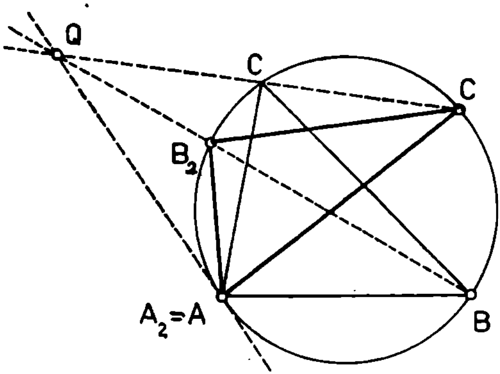


Obr. 4

Důkaz (obr. 4). Přímky AA_2, BB_2 a CC_2 mají společný bod Q, a proto se podle věty Desarguesovy protínají na jedné přímce odpovídající si strany $\triangle\, ABC$ a $\triangle\, A_2B_2C_2$. Tato přímka pak, protože body A, B, C,

A_2, B_2, C_2 leží na téže kružnici, je polárou bodu Q vzhledem ke kružnici k. Také zde se na uvedené poláře protínají dvojice přímek $[\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A_2B_2}]$, $[\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{B_2C_2}]$, $[\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{C_2A_2}]$ a ovšem i dvojice $[\overleftrightarrow{AB_2}, \overleftrightarrow{A_2B}]$, $[\overleftrightarrow{BC_2}, \overleftrightarrow{B_2C}]$, $[\overleftrightarrow{CA_2}, \overleftrightarrow{C_2A}]$.

Je tedy relace q podle Q rovněž zvláštní případ středové kolineace, kde vzor a obraz mají společnou kružnici opsanou. Je ovšem třeba mít stále na paměti, že složkami obou uvažovaných relací jsou trojúhelníky, nikoliv jejich prvky. Na rozdíl od relace p má relace q

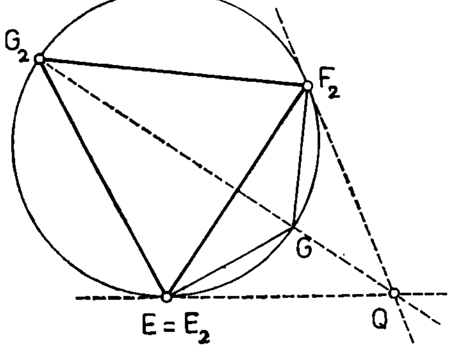


Obr. 5

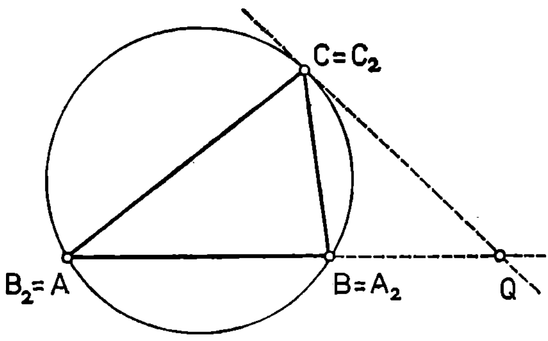
jednu zvláštnost, což konečně prozrazuje už odlišná formulace podmínky 1 v definici 2. Případy, kdy množiny $\{A, B, C\}$ a $\{A_2, B_2, C_2\}$ mají jeden nebo dva prvky společné, nastanou tehdy, jestliže pól Q leží na některé z tečen vedených ke kružnici k v jednom nebo dvou vrcholech $\triangle ABC$, jak ukazují obr. 5—7.

Na obr. 5 leží pól Q na tečně sestrojené ke kružnici k

opsané $\triangle ABC$ v jeho vrcholu A, takže je $A_2 \equiv A$. Na obr. 6 je pól Q průsečíkem tečen vedených ke kružnici opsané $\triangle EFG$ v jeho vrcholech E a F, takže je $E \equiv E_2$ a současně $F \equiv F_2$. Na obr. 7 je pól Q průsečíkem tečny

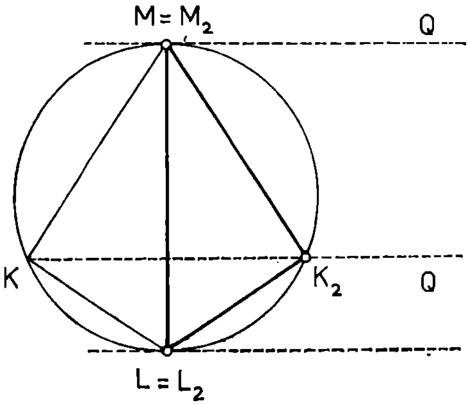


Obr. 6



Obr. 7

vedené ke kružnici opsané $\triangle ABC$ v jeho vrcholu C s prodloužením jeho strany AB za bod B, takže je $C \equiv \equiv C_2$, $A \equiv B_2$ a $B \equiv A_2$. Všechny tyto tři zvláštní případy jsou v souladu s definicí 2 právě tak jako zcela zvláštní případ zobrazený na obr. 8.



Obr. 8

Zde je pól Q nevlastní bod roviny π_2, takže středová kolineace přechází v afinitu, neboť přímky $\overleftrightarrow{LL_2} \parallel \overleftrightarrow{MM_2}$ jsou tečnami kružnice opsané $\triangle KLM$, který je pravoúhlý a body L a M jsou krajní body jeho přepony.

Z toho, co jsme zatím uvedli o vlastnostech relací p a q, je zřejmé, že tvar trojúhelníků v uvažovaných dvojicích je závislý na poloze pólů P nebo Q. Naskýtá se proto otázka, je-li možno tuto polohu určit konstruktivně tak, aby uvažované dvojice trojúhelníků měly předem dané vlastnosti. Předpokládejme, že to možné je. Pak ovšem musí platit tato věta:

Věta 3. *Je-li dán jeden z dvojice trojúhelníků* $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ *nebo* $\triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2$, *potom druhý trojúhelník je určen právě dvěma navzájem nezávislými prvky, přičemž póly* P *a* Q *dané polohou mají hodnotu dvou takových prvků.*

Důkaz. Věta obsahuje dvě tvrzení:

a) Obecně platí, že trojúhelník je určen třemi navzájem nezávislými prvky. Avšak dvojice trojúhelníků, které jsou v relaci $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$, mají vždy jeden prvek společný, totiž velikost poloměru společné opsané kružnice. Proto je druhý trojúhelník určen právě dvěma dalšími navzájem nezávislými prvky, jakmile první trojúhelník je dán.

b) Pravdivost druhého tvrzení vyplývá z definic 1 a 2. Dané póly P nebo Q určují spolu s vrcholy daného trojúhelníku jednoznačně přímky AP, BP, CP, popřípadě A_1P, B_1P, C_1P, nebo AQ, BQ, CQ, případně A_2Q, B_2Q, C_2Q, a tím jsou rovněž jednoznačně určeny polohy bodů A, B, C, popřípadě A_1, B_1, C_1 nebo A_2, B_2, C_2 na kružnici k.

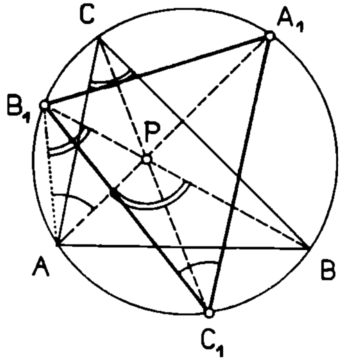
Věnujme nyní pozornost velikostem vnitřních úhlů uvažovaných dvojic trojúhelníků. Lze předvídat, že existuje taková podmnožina množiny M_T, jejíž prvky jsou v relaci $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$ s daným trojúhelníkem a přitom mají jeden úhel shodný, tj. předem dané velikosti. Dvě věty (věta 4 a 5), jejichž pravdivost dokážeme, nejenom potvrzují existenci takových podmnožin, ale udávají současně návod, jak lze sestrojit množinu všech příslušných pólů P nebo Q.

Věta 4. *Má-li* $\triangle ABC$ *vnitřní úhly daných velikostí* α, β, γ, *a množina trojúhelníků, které jsou s ním v relaci* $\boldsymbol{p}$, *vnitř-*

ní úhel $\sphericalangle A_1C_1B_1$ *dané velikosti* γ', *potom množinou všech příslušných pólů* P *je oblouk kružnice mezi body* A *a* B *takový, že obvodový úhel příslušný k tomuto oblouku* ($\sphericalangle APB = \varphi$) *má velikost:*

a) $\varphi = \gamma + \gamma'$, *je-li* $\gamma + \gamma' \leqq 180°$ *a oblouk* $\widehat{AB}$ *leží v polorovině* $\overrightarrow{ABC}$,

b) $\varphi = 360° - (\gamma + \gamma')$, *je-li* $\gamma + \gamma' > 180°$ *a oblouk* $\widehat{AB}$ *leží v polorovině opačné k* $\overrightarrow{ABC}$ ($\widehat{AB} \subset \overrightarrow{ABC}^*$).



Obr. 9

Důkaz. a) Předpokládejme nejdříve, že pól P leží v polorovině $\overrightarrow{ABC}$, a to buď uvnitř $\triangle ABC$ nebo vně (obr. 9).

V obou případech vyplývá z vlastností obvodových úhlů:

$$\sphericalangle B_1AP \equiv \sphericalangle B_1AA_1 = \sphericalangle B_1C_1A_1 = \gamma', \qquad (1.4)$$

$$\sphericalangle AB_1P \equiv \sphericalangle AB_1B = \sphericalangle ACB = \gamma. \qquad (1.5)$$

Úhly $\sphericalangle B_1AP$ a $\sphericalangle AB_1P$ jsou vnitřní úhly $\triangle AB_1P$, jehož vnější úhel při vrcholu P je $\sphericalangle APB$. Je tedy velikost $\sphericalangle APB$ rovna součtu velikostí úhlů $\sphericalangle B_1AP$ a $\sphericalangle AB_1P$, takže podle (1.4) a (1.5) je $\sphericalangle APB = \gamma + \gamma'$, což také znamená

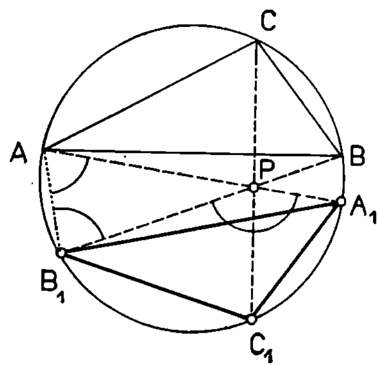
$$\gamma + \gamma' < 180°. \tag{1.6}$$

Leží-li bod P na straně AB $\triangle ABC$, je ovšem

$$\gamma + \gamma' = 180°. \tag{1.7}$$

Podle předpokladu mají úhly γ a γ' dané velikosti, takže jejich součet je stálý, a probíhá-li bod C oblouk $\widehat{AB}$ kružnice $\triangle ABC$ opsané v polorovině $\overrightarrow{ABC}$, probíhá pól P oblouk kružnice mezi body A a B takový, že příslušný obvodový úhel $\sphericalangle APB$ má velikost $\varphi = \gamma + \gamma'$, rovněž v polorovině $\overrightarrow{ABC}$. Body tohoto oblouku bez krajních bodů A a B jsou prvky hledané množiny všech příslušných pólů P.

Je-li pól P vnitřní bod úsečky AB (viz obr. 3), potom je podle (1.7) $\gamma + \gamma' = 180°$ a oblouk $\widehat{AB}$ přechází v úsečku $\overline{AB}$.



Obr. 10

b) Umístíme-li pól P vně $\triangle ABC$, například do poloroviny $\overrightarrow{ABC^*}$, padnou do této poloroviny i všechny tři vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$, a to tak, že (obr. 10)

$$\sphericalangle AC_1B < \sphericalangle A_1C_1B_1 = \gamma'. \tag{1.8}$$

Protože je současně $\sphericalangle AC_1B = 180° - \sphericalangle ACB = 180° - \gamma$, dostaneme po dosazení do (1.8)

$$180° - \gamma < \gamma', \text{ neboli } \gamma + \gamma' > 180°.$$

V tětivových čtyřúhelnících $AA_1C_1B_1$ a $ACBB_1$ je

$$\sphericalangle A_1AB_1 \equiv \sphericalangle PAB_1 = 180° - \sphericalangle A_1C_1B_1 = \\ = 180° - \gamma',$$

$$\sphericalangle AB_1B \equiv \sphericalangle AB_1P = 180° - \sphericalangle ACB = \\ = 180° - \gamma. \tag{1.9}$$

Úhly $\sphericalangle PAB_1$ a $\sphericalangle AB_1P$ jsou vnitřní úhly $\triangle PAB_1$, jehož vnější úhel při vrcholu P má velikost

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle PAB_1 + \sphericalangle AB_1P$$

a po dosazení podle (1.9)

$$\sphericalangle APB = (180° - \gamma') + (180° - \gamma)$$

a po úpravě:

$$\sphericalangle APB = \varphi = 360° - (\gamma + \gamma').$$

Také zde je podle předpokladu součet $\gamma + \gamma'$ stálý, takže prvky hledané množiny všech pólů P dané vlastnosti tvoří oblouk kružnice mezi body A a B takový, že příslušný obvodový úhel má velikost $\varphi = 360° - (\gamma + \gamma')$.

Velikosti úhlů $\sphericalangle BPC = \alpha + \alpha'$ a $\sphericalangle CPA = \beta + \beta'$ se pak v tomto případě řídí částí a) důkazu.

Dokázali jsme pravdivost obou tvrzení věty 4 pro dvojici úhlů velikostí γ, γ'. Cyklickými záměnami dojdeme k obdobným tvrzením pro dvojice α a α', β a β'.

Věta 5. *Má-li $\triangle ABC$ vnitřní úhly velikostí α, β, γ a množina všech trojúhelníků, které jsou s ním v relaci* **q**, *vnitřní úhel $\sphericalangle A_2C_2B_2$ dané velikosti γ', potom množinou všech pólů Q je oblouk kružnice mezi body A a B takový, že obvodový úhel příslušný k tomuto oblouku ($\sphericalangle AQB = \varepsilon$) má velikost:*

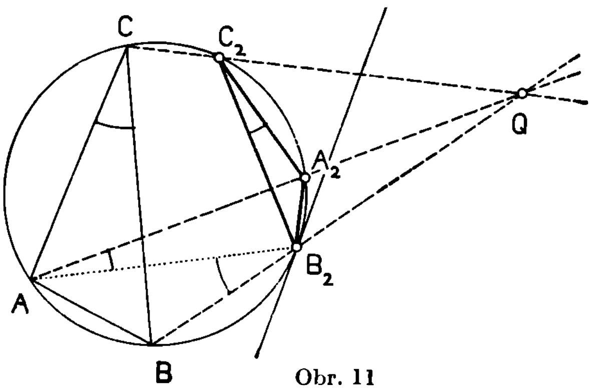
$\varepsilon = |\gamma - \gamma'|$, *přičemž oblouk $\widehat{AQB}$ leží*

a) *v polorovině $\overrightarrow{ABC}$, když $\gamma - \gamma' \geqq 0$,*

b) *v polorovině $\overrightarrow{ABC}^*$, když $\gamma - \gamma' < 0$.*

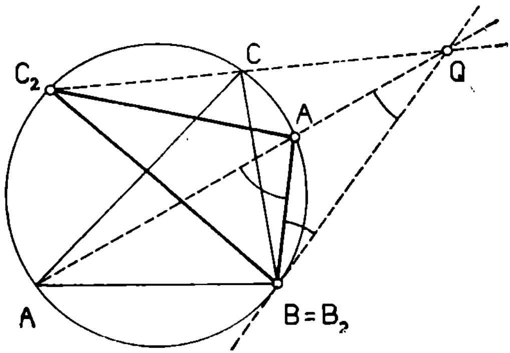
Důkaz provedeme zvlášť pro polorovinu $\overrightarrow{ABC}$ a zvlášť pro $\overrightarrow{ABC}^*$.

V polorovině $\overrightarrow{ABC}$ musíme rozlišovat čtyři různé polohy pólu Q, z nichž tři jsou zobrazeny na obr. 11, 12 a 13.

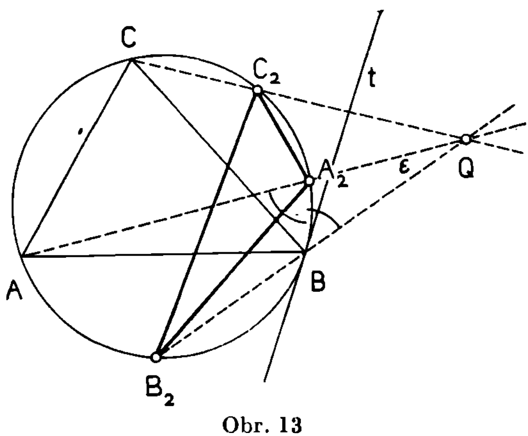


Obr. 11

Tečna t vedená ke kružnici opsané $\triangle ABC$ v bodě B rozděluje $\overrightarrow{ABC}$ na dvě části. Na obr. 11 leží pól Q v průniku polorovin $\overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{tA}$, na obr. 12 na tečně t a na obr. 13 v průniku $\overrightarrow{ABC} \cap \overrightarrow{tA}*$.



Obr. 12



Obr. 13

Ve všech třech případech je

$$\sphericalangle AA_2B = \sphericalangle ACB = \gamma \tag{1.10}$$

(jde o obvodové úhly) a také

$$\sphericalangle A_2BQ = \sphericalangle A_2C_2B_2 = \gamma'. \tag{1.11}$$

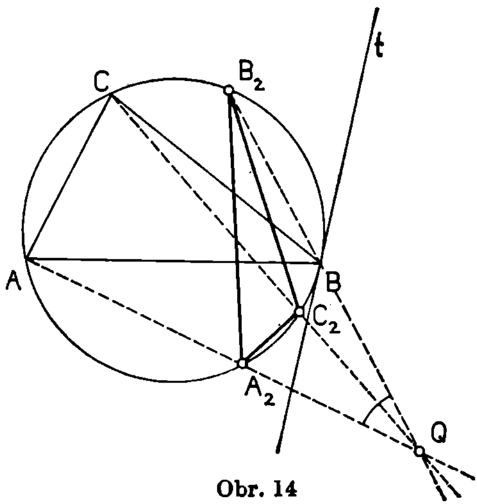
Tvrzení (1.11) ovšem musíme dokázat.

V prvním případě jsou úhly $\sphericalangle A_2BQ$ a $\sphericalangle A_2C_2B_2$ obvodové úhly příslušné k oblouku $\widehat{A_2B_2}$,

v druhém případě je $\sphericalangle A_2BQ$ úsekový úhel příslušný k oblouku $\widehat{A_2B_2}$, takže je $\sphericalangle A_2BQ = \sphericalangle A_2C_2B_2$,

ve třetím případě pak je úhel $\sphericalangle A_2BQ$ vedlejší k $\sphericalangle A_2BB_2$ a ten má velikost $180° - \gamma'$, neboť je protilehlý k $\sphericalangle A_2C_2B_2$ v tětivovém čtyřúhelníku $A_2BB_2C_2$.

Ve všech třech případech je $\sphericalangle AA_2B$ vnější úhel trojúhelníku A_2BQ při vrcholu A_2. Označíme-li $\sphericalangle A_2QB =$

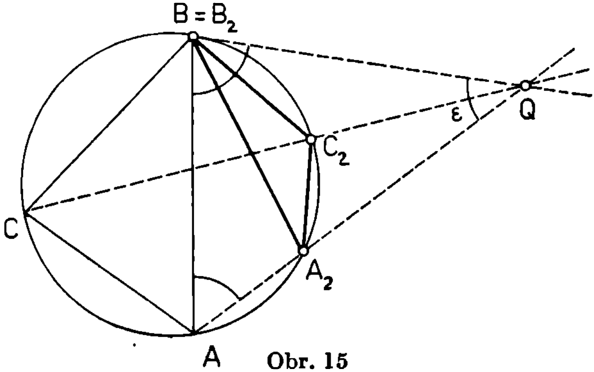


Obr. 14

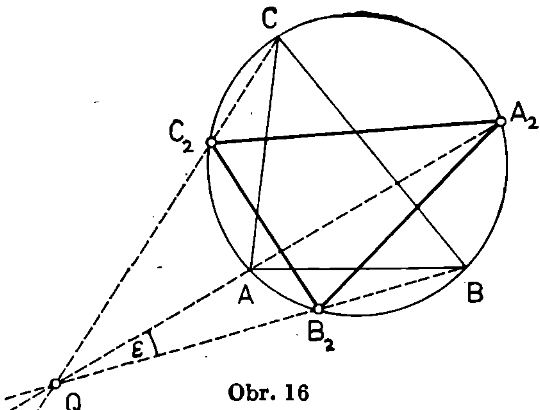
$= \varepsilon$, potom je $\varepsilon = \sphericalangle AA_2B - \sphericalangle A_2BQ$ a podle (1.10) a (1.11) konečně

$$\varepsilon = \gamma - \gamma', \text{ neboli } \gamma = \gamma' + \varepsilon, \tag{1.12}$$

což znamená, že je větší než γ'.



Obr. 15



Obr. 16

Leží-li pól Q na prodloužení strany AB za bod B, je $\gamma = \gamma'$, neboli $\gamma - \gamma' = 0$.

V polorovině opačné k $\overrightarrow{ABC}$ jsou možné tři různé polohy pólu Q zobrazené na obr. 14, 15 a 16.

Na obr. 14 je $Q \in (\overrightarrow{ABC}^* \cap \overrightarrow{tA}^*)$, na obr. 15 $Q \in t$, na obr. 16 je $Q \in (\overrightarrow{ABC}^* \cap \overrightarrow{tA})$. Ve všech třech případech je v $\triangle AB_2Q$

$$\sphericalangle AB_2Q = \gamma, \tag{1.13}$$

$$\sphericalangle B_2AQ = 180° - \gamma'. \tag{1.14}$$

V prvním případě je $\sphericalangle AB_2Q \equiv \sphericalangle AB_2B = \sphericalangle ACB = = \gamma$ (obvodové úhly), současně $\sphericalangle B_2AQ = 180° - \gamma'$, protože je ve čtyřúhelníku $AB_2C_2A_2$ protilehlý k $\sphericalangle B_2C_2A_2$,

v druhém případě je $\sphericalangle AB_2Q$ úsekový úhel příslušný k oblouku $\widehat{AB}$, takže je $\sphericalangle AB_2Q = \sphericalangle ACB = \gamma$, současně $\sphericalangle B_2AQ = \gamma'$ jako v případě prvním,

ve třetím případě konečně je $\sphericalangle AB_2Q$ vedlejší k $\sphericalangle AB_2B$ a ten má velikost $180° - \gamma$, neboť je protilehlý k $\sphericalangle ACB$ v tětivovém čtyřúhelníku $ACBB_2$ a obdobně $\sphericalangle B_2AQ$ je vedlejší k $\sphericalangle A_2AB_2 = \sphericalangle A_2C_2B_2 = \gamma'$.

Označíme-li v $\triangle AB_2Q$ $\sphericalangle AQB_2 = \varepsilon$, bude ve všech třech případech

$$\varepsilon = 180° - [\sphericalangle B_2AQ + \sphericalangle AB_2Q]$$

a podle (1.13) a (1.14)

$$\varepsilon = 180° - (180° - \gamma' + \gamma) = \gamma' - \gamma, \text{ neboli}$$

$$\gamma' = \gamma + \varepsilon, \tag{1.15}$$

což znamená, že γ' je větší než γ.

Tím je dokázáno i tvrzení b) věty 5 a podle (1.12) a (1.15) je

$$\varepsilon = |\gamma - \gamma'|.$$

I zde ovšem musíme vzít v úvahu cyklické záměny, podle nichž je $\sphericalangle BQC = |\alpha - \alpha'|$ a $\sphericalangle CQA = |\beta - \beta'|$.

Právě dokázané věty 4 a 5 mají pro naše další úvahy základní význam, a proto uspořádáme jejich obsah do tabulek:

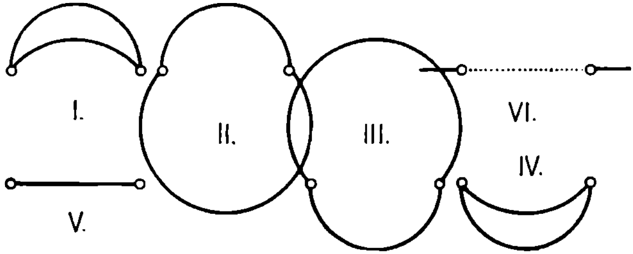
Velikosti úhlů:	Poloha pólu P:	Odkaz na obr. 17:
$\gamma + \gamma' < 180°$	$P \in \overrightarrow{ABC}$	I, II
$\gamma + \gamma' > 180°$	$P \in \overrightarrow{ABC}*$	III, IV
$\gamma + \gamma' = 180°$	$P \in \overline{AB}$	V

tab. 1

Velikosti úhlů:	Poloha pólu Q:	Odkaz na obr. 17:
$\gamma > \gamma'$	$Q \in \overrightarrow{ABC}$	I, III
$\gamma < \gamma'$	$Q \in \overrightarrow{ABC}*$	II, IV
$\gamma = \gamma'$	$Q \in \overleftrightarrow{AB}$	VI

tab. 2

Římské číslice v tabulkách odkazují na obr. 17, kde jsou zobrazeny polohy oblouků zobrazujících množiny všech pólů P nebo Q pro různé vztahy mezi velikostmi úhlů γ a γ'.

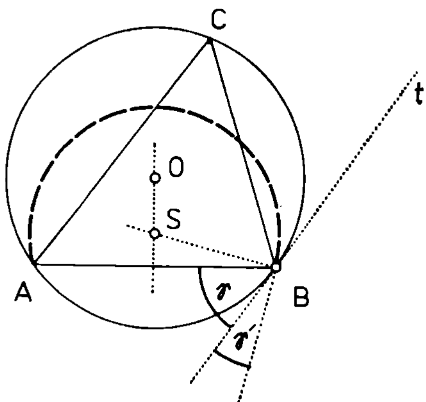


Obr. 17

Platí i věty obrácené k větám 4 a 5. Jejich důkazy jsou zařazeny do cvičení na konci kapitoly.

K vlastnímu provádění konstrukcí je třeba připomenout ještě toto:

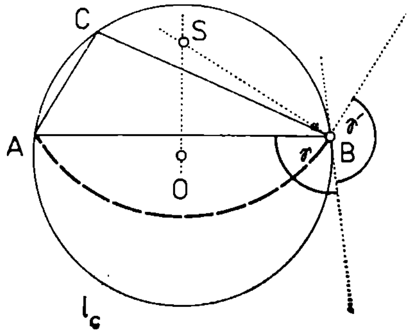
Při sestrojování kruhových oblouků podle vět 4 a 5 je vždy nutno pečlivě uvážit, ve které polorovině bude příslušný oblouk ležet. K tomu slouží uvedené tabulky



Obr. 18

a cyklické záměny z nich vyplývající. Konstrukci si pak zpravidla usnadníme tím, že využijeme vlastností úsekových úhlů. Chceme-li například sestrojit množinu všech pólů P k dané dvojici úhlů γ a γ', je výhodné sestrojit v některém krajním bodě úsečky AB tečnu ke kružnici $\triangle ABC$ opsané (obr. 18).

Tato tečna tvoří s úsečkou AB úsekový úhel velikosti γ, načež graficky přičteme úhel velikosti γ'. Kolmice na rameno součtu $\gamma + \gamma'$ vedená příslušným krajním



Obr. 19

bodem úsečky AB určuje spolu s osou úsečky AB střed hledaného oblouku. Máme-li sestrojit množinu všech pólů P s odpovídajícím obvodovým úhlem velikosti $360° - (\gamma + \gamma')$, bude postup obdobný jako v předešlém případě (obr. 19), avšak volíme opačnou polorovinu a v ní sestrojíme úhel velikosti $(\gamma + \gamma')$.

Zcela obdobně budeme postupovat při konstrukcích množin všech pólů Q. Zde se však může stát, že přesnost konstrukce bude ohrožena, zvláště když rozdíl $\gamma - \gamma'$ bude mít příliš malou absolutní hodnotu. V tom případě bude nutno použít známých konstrukcí na omezené nákresně, konstrukcí přímek spojujících dva velmi blízko sebe ležící body na kružnici a podobně. Další možnosti takových pomocných konstrukcí nám poskytnou i úvahy zařazené do druhé části první kapitoly.

Ukázali jsme již (věta 3), že k určení dvojice trojúhelníků z relací p nebo q, je-li jeden z trojúhelníků dán, postačí dva další navzájem nezávislé prvky. Mohou to tedy být například vedle velikosti poloměru společné opsané kružnice velikosti dvou vnitřních úhlů, pokud ovšem splňují nutnou podmínku

$$\alpha + \beta < 180^\circ \wedge \alpha' + \beta' < 180^\circ.$$

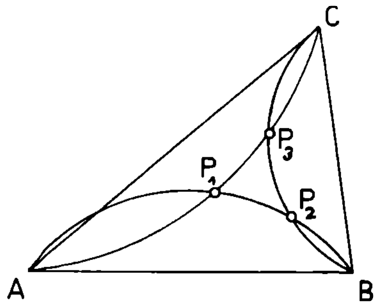
Podle vět 4 a 5 můžeme předpokládat, že takto zadané úlohy budou mít vždy právě jedno řešení, protože příslušné póly můžeme vždy určit jako průsečíky dvou kruhových oblouků s obvodovými úhly velikostí $(\alpha + \alpha')$ a $(\beta + \beta')$. Logickou cestou dojdeme k závěru, že takto určeným bodem bude procházet i třetí oblouk geometrického místa s obvodovým úhlem velikosti $(\gamma + \gamma')$. Správnost této úvahy nyní dokážeme:

Věta 6. *Nechť dvojice trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ *mají vnitřní úhly velikostí po řadě* α, β, γ *a* α', β', γ', *potom kruhové oblouky* $\widehat{BPC}$, $\widehat{APC}$ *a* $\widehat{APB}$ *určující polohu pólu* P *vzhledem k velikostem úhlů* $(\alpha + \alpha')$, $(\beta + \beta')$, $(\gamma + \gamma')$, *mají vedle vrcholů* $\triangle ABC$ *právě jeden další společný bod, totiž pól* P.

Důkaz provedeme sporem.

a) Předpokládejme, že pól P je vnitřní bod $\triangle ABC$ a že oblouky $\widehat{BPC}$, $\widehat{APC}$ a $\widehat{APB}$ neprocházejí jedním bodem (obr. 20).

Protože tyto oblouky podle věty 4 procházejí vždy po dvou týmž vrcholem $\triangle ABC$, mohou mít právě ještě jeden další společný bod. Označme tyto další průsečíky P_1, P_2, P_3.



Obr. 20

Podle předpokladu mají oblouky $\widehat{AP_1P_2B}$, $\widehat{BP_2P_3C}$, $\widehat{CP_3P_1A}$ vlastnosti hledaných množin podle věty 4. To znamená, že $\measuredangle AP_1B$ má velikost $(\gamma + \gamma')$, $\measuredangle AP_1C$ velikost $(\beta + \beta')$. Výpočtem zjistíme, že $\measuredangle CP_1B$ má velikost

$$360° - (\gamma + \gamma') - (\beta + \beta') = 180° - (\beta + \gamma) + \\ + 180° - (\beta' + \gamma') = \alpha + \alpha'.$$

Avšak tuto velikost mají úhly BPC, pokud podle předpokladu pól P_1 leží na oblouku $\widehat{CPB}$. Mimo ně žádný jiný bod roviny. Náš předpoklad byl tedy nesprávný a všechny tři oblouky procházejí jediným bodem.

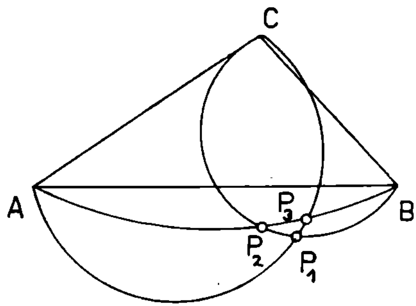
Zcela obdobný výsledek dostaneme pro pól P ležící vně $\triangle ABC$, ovšem uvnitř kružnice $\triangle ABC$ opsané (obr. 21).

Jistě není nutné znovu opakovat celý myšlenkový pochod, stačí, uvedeme-li závěrečný výpočet:

$$\sphericalangle BP_1A = \sphericalangle AP_1C + \sphericalangle BP_1C = (\alpha + \beta) + \\ + (\alpha' + \beta'),$$

neboli

$$(180° - \gamma) + (180° - \gamma') = 360° - (\gamma + \gamma').$$



Obr. 21

Také zde procházejí všechny tři oblouky jediným bodem.

Dříve než odvodíme obdobnou větu pro pól Q, dokážeme platnost užitečné pomocné věty.

Věta 7. *Nechť dvojice trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \mathbf{q}$ *má vnitřní úhly velikostí po řadě* α, β, γ *a* α', β', γ', *a současně jeden vnitřní úhel* $\triangle ABC$ *je větší než jemu odpovídající vnitřní úhel* $\triangle A_2B_2C_2$, *potom aspoň jeden, nejvýše však dva další vnitřní úhly* $\triangle ABC$ *jsou menší než jim odpovídající úhly* $\triangle A_2B_2C_2$.

Důkaz. a) Především je vyloučen případ, kdy všechny tři úhly $\triangle ABC$ jsou větší než vnitřní úhly $\triangle A_2B_2C_2$. V tom případě by platilo současně:

$$\alpha > \alpha', \beta > \beta', \gamma > \gamma'$$

a po sečtení těchto nerovnic

$$\alpha + \beta + \gamma > \alpha' + \beta' + \gamma'$$

neboli $180° > 180°$.

b) Předpokládejme, že platí

$$\alpha > \alpha' \wedge \beta > \beta',$$

odtud plyne $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$, což můžeme psát také takto:

$$180° - \gamma > 180° - \gamma', \text{ takže}$$

$$-\gamma > -\gamma', \text{ neboli } \gamma < \gamma'.$$

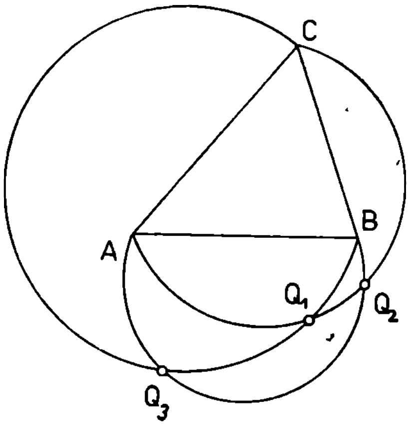
c) Zaměníme-li v předcházejícím textu znaménka „větší" za „menší" a naopak, dostaneme potvrzení platnosti druhé části tvrzení, že mohou dva úhly být menší a to — v souladu s výsledkem první části důkazu — nejvýše dva.

Zde je na místě připomenout tabulku 2 uvedenou za větou 5. Užijeme-li věty 7, snadno provedeme cyklické záměny k tabulce 2 a tím určíme spolehlivě polohu pólu Q vzhledem k velikostem vnitřních úhlů trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$.

Věta 8. *Nechť dvojice trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$ *má vnitřní úhly velikostí po řadě* α, β, γ *a* α', β', γ'; *potom kruhové oblouky* $\widehat{BQC}$, $\widehat{AQC}$ *a* $\widehat{AQB}$ *určující polohu pólu* Q *vzhledem k velikostem úhlů* $|\alpha - \alpha'|$,

$|\beta - \beta'|$, $|\gamma - \gamma'|$ *mají vedle vrcholů* $\triangle ABC$ *právě jeden další společný bod, totiž pól* Q.

Důkaz provedeme opět sporem.



Obr. 22

a) Předpokládejme nejdříve (obr. 22), že pól Q leží v průniku $\overrightarrow{ABC}^* \cap \sphericalangle \overrightarrow{ACB}$. V tom případě je podle vět 5 a 7

$$\gamma' > \gamma \Rightarrow \sphericalangle AQB = \gamma' - \gamma,$$

$$\alpha' < \alpha \Rightarrow \sphericalangle BQC = \alpha - \alpha',$$

$$\beta' < \beta \Rightarrow \sphericalangle AQC = \beta - \beta'.$$

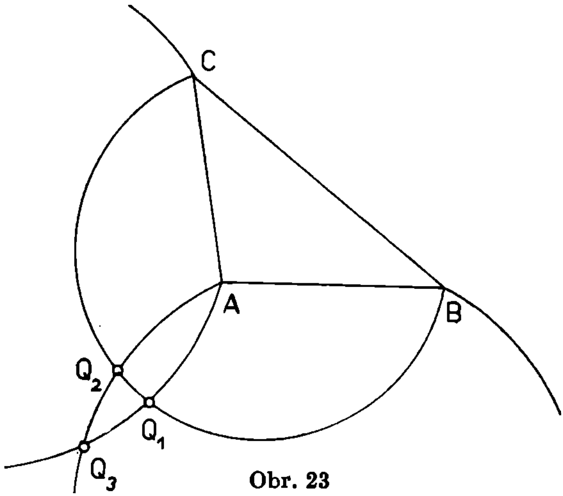
Příslušné oblouky takto určené nechť se protínají v bodech $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3$. Podle věty 5 pak platí

$$\sphericalangle AQ_1C = \beta - \beta' \wedge \sphericalangle BQ_1C = \alpha - \alpha'.$$

Součet těchto dvou úhlů má velikost

$$\sphericalangle AQB = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') = (\alpha + \beta) -$$
$$- (\alpha' + \beta') = (180° - \gamma) - (180° - \gamma') =$$
$$= \gamma' - \gamma .$$

Podle tohoto výsledku leží pól Q na oblouku $\widehat{AQ_2Q_3B}$, takže předpoklad $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3$ je nesprávný a všechny tři oblouky procházejí týmž bodem Q.

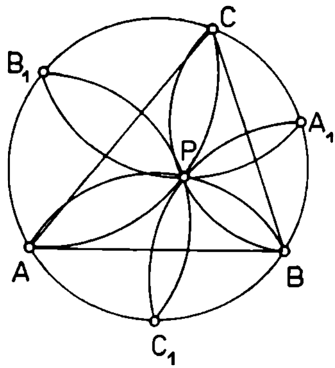


Obr. 23

b) Umístíme-li pól Q do úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$, potom bude (obr. 23)

$$\gamma' > \gamma \Rightarrow \sphericalangle AQB = \gamma' - \gamma ,$$
$$\beta' < \beta \Rightarrow \sphericalangle AQC = \beta - \beta' ,$$
$$\alpha' > \alpha \Rightarrow \sphericalangle BQC = \alpha' - \alpha .$$

Oblouky takto určené se protnou v bodech $Q_1 \neq Q_2 \neq$ $\neq Q_3$. Další úvahy pak jsou shodné s úvahami z první části důkazu se stejným závěrem, že všechny tři oblouky procházejí týmž bodem, tj. pólem Q. Zde se na první pohled zdá, že důkaz ještě není úplný, protože jsme nevzali v úvahu polohy pólu Q v polorovině $\overrightarrow{ABC}$. To však není nutné, protože cyklickými záměnami bychom došli ke stejným závěrům pro poloroviny $\overrightarrow{ACB}^*$ a $\overrightarrow{BCA}^*$, čímž je celá rovina až na vnitřek $\triangle ABC$ vyčerpána. Pól Q ovšem podle definice 2 v této části roviny ležet nemůže.



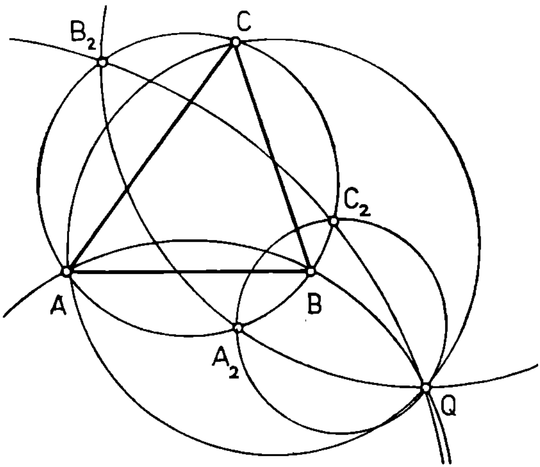
Obr. 24

Věty 6 a 8 mají jeden zajímavý důsledek. Uvážíme-li totiž, že relace $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$, jak jsme dříve ukázali, jsou symetrické, můžeme v důkazech vět 6 a 8 zaměnit označení vrcholů trojúhelníků z uvažovaných dvojic $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ a $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$. Potom pólem P procházejí další tři oblouky, a to $\widehat{A_1PB_1}$, $\widehat{B_1PC_1}$

a $\widehat{C_1PA_1}$, s příslušnými obvodovými úhly velikostí $(\gamma + \gamma')$, $(\beta + \beta')$ a $(\alpha + \alpha')$ (obr. 24).

Obdobně pak pólem Q procházejí rovněž tři další oblouky $\widehat{A_2QB_2}$, $\widehat{B_2QC_2}$ a $\widehat{C_2QA_2}$ s příslušnými obvodovými úhly velikostí $|\gamma - \gamma'|$, $|\beta - \beta'|$ a $|\alpha - \alpha'|$ (obr. 25).

Výčet vlastností relací **p** a **q** uzavřeme důkazem další věty, která se týká polohy vrcholů uvažovaných dvojic trojúhelníků na společné kružnici opsané.



Obr. 25

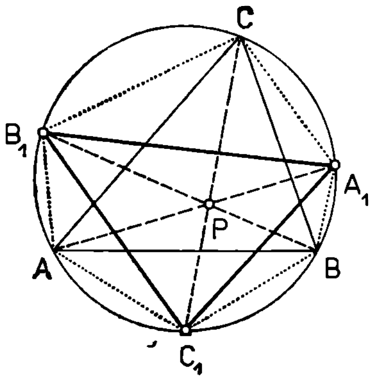
Věta 9. *Mějme dvojice trojúhelníků* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in$ **p** *podle* P *a* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in$ **q** *podle* Q *takové, že ani pól* P *ani pól* Q *neleží na některé straně* $\triangle ABC$ *nebo na jejím prodloužení, potom o vzdálenostech vrcholů uvažovaných trojúhelníků platí:*

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1, \qquad \frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} = 1.$$

Důkaz. a) Na obr. 26 je v trojúhelnících $\triangle AB_1P$ a $\triangle BA_1P$

$$\sphericalangle APB_1 = \sphericalangle BPA_1 \text{ (úhly vrcholové)}$$

$$\sphericalangle AB_1P = \sphericalangle BA_1P \text{ (úhly obvodové)},$$



Obr. 26

a proto $\triangle AB_1P \sim \triangle BA_1P$, takže je

$$\frac{AB_1}{BA_1} = \frac{AP}{BP}. \tag{1.16}$$

Obdobně je $\triangle BC_1P \sim \triangle CB_1P$ a také

$$\frac{BC_1}{CB_1} = \frac{BP}{CP} \tag{1.17}$$

a konečně $\triangle CA_1P \sim \triangle AC_1P$, takže

$$\frac{CA_1}{AC_1} = \frac{CP}{AP}. \tag{1.18}$$

Vynásobíme-li nyní rovnosti (1.16), (1.17) a (1.18), dostaneme:

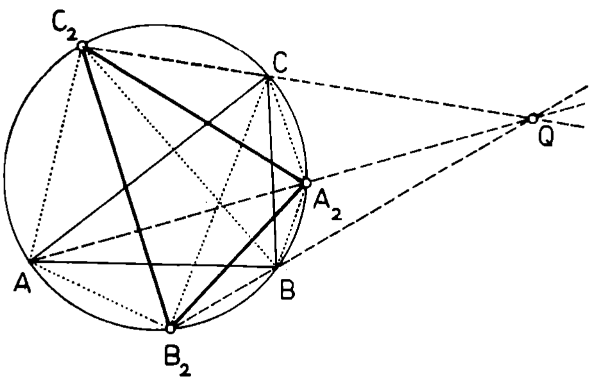
$$\frac{AB_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{AC_1} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{CP}{AP}.$$

Na pravé straně se vykrátí velikosti úseček AP, BP, CP, takže výraz na levé straně se rovná 1. Po úpravě pak odtud dostaneme dokazovaný vztah:

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1.$$

b) Na obr. 27 je v trojúhelnících $\triangle AB_2Q$ a $\triangle BA_2Q$

$$\sphericalangle AQB_2 = \sphericalangle BQA_2,$$



Obr. 27

neboť jsou totožné,

$$\sphericalangle AB_2Q = \sphericalangle BA_3Q,$$

protože

$$\sphericalangle AB_2Q \equiv \sphericalangle AB_2B = 180° - \sphericalangle AA_2B$$

(úhel protilehlý ve čtyřúhelníku tětivovém AB_2BA_2).
Protože úhel $\sphericalangle AA_2B$ je vedlejší k $\sphericalangle BA_2Q$, je

$$\sphericalangle AB_2Q = \sphericalangle BA_2Q.$$

Trojúhelníky $\triangle AB_2Q$ a $\triangle BA_2Q$ mají tedy dva úhly shodných velikostí, takže je $\triangle AB_2Q \sim \triangle BA_2Q$.
Z podobnosti trojúhelníků pak plyne

$$\frac{AB_2}{BA_2} = \frac{AQ}{BQ}. \tag{1.19}$$

Obdobně je $\triangle BC_2Q \sim \triangle CB_2Q$, odkud

$$\frac{BC_2}{CB_2} = \frac{BQ}{CQ} \tag{1.20}$$

a konečně i $\triangle CA_2Q \sim \triangle AC_2Q$ a odtud

$$\frac{CA_2}{AC_2} = \frac{CQ}{AQ}. \tag{1.21}$$

Vynásobením (1.19), (1.20) a (1.21) a po obdobných úpravách jako v předešlé části důkazu dostáváme:

$$\frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \cdot \frac{CA_2}{BA} = 1.$$

Podle předpokladu neleží pól P na žádné straně $\triangle ABC$. V tom případě by bylo například $A \equiv B_1 \wedge \wedge B \equiv A_1$, takže $AB_1 = BA_1 = 0$ a do dokazovaného vztahu se dostává neurčitý výraz $\frac{0}{0}$ a výraz pozbývá smyslu. Obdoba platí i pro pól Q.

Dosud poznané vlastnosti relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ nás již dostatečně vyzbrojují k řešení úloh. Zde několik příkladů:

Příklad 1. Je dán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly velikostí $\alpha = 100°$, $\beta = 30°$. Určete polohu pólů P a Q tak, aby $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ byly trojúhelníky rovnostranné.

a) *Rozbor.* Podle zadání je $\gamma = 180° - (100° + 30°) =$ $= 50°$,

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 60°.$$

Dále platí:

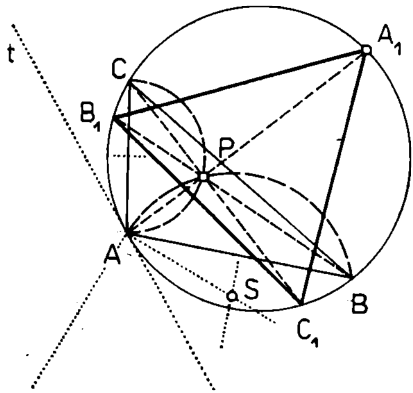
$$\begin{aligned} \alpha + \alpha' &= 100° + 60° = 160°, \\ \beta + \beta' &= 30° + 60° = 90°, \\ \gamma + \gamma' &= 50° + 60° = 110°. \end{aligned}$$

Všechny tři součty jsou menší než 180°, a proto pól P je vnitřní bod $\triangle ABC$.

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha' &= 100° - 60° = 40° \Rightarrow Q \in \overrightarrow{BCA}, \\ \beta - \beta' &= 60° - 30° = 30° \Rightarrow Q \in \overrightarrow{ACB}^*, \\ \gamma - \gamma' &= 60° - 50° = 10° \Rightarrow Q \in \overrightarrow{ABC}^*. \end{aligned}$$

Podle toho leží pól Q v průniku $\overrightarrow{BCA} \cap \overrightarrow{ACB}^* \cap$ $\cap \overrightarrow{ABC}^*$.

b) *Konstrukce.* Nejdříve sestrojíme $\triangle ABC$: Na kružnici $k = (O; 4)$ zvolíme bod A, v něm sestrojíme tečnu ke kružnici k a úsekové úhly velikostí $\beta = 30°$ a $\gamma = 50°$. Ramena úsekových úhlů určí na kružnici k body B a C. Potom sestrojíme příslušné oblouky zobrazující množiny hledaných pólů. Volíme oblouk $\widehat{APC}$, protože k němu příslušný obvodový úhel má velikost $\beta + \beta' = 90°$, takže střed oblouku je středem úsečky AC.



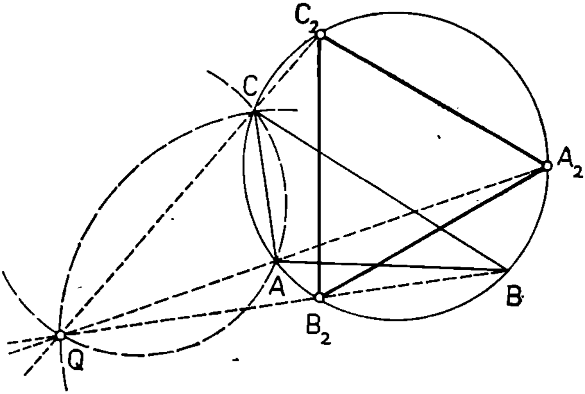
Obr. 28

Podle rozboru je výhodnější zvolit jako druhý oblouk $\widehat{APB}$ s příslušným obvodovým úhlem velikosti $\gamma + \gamma' = 110°$. Konstrukce je provedena na obr. 28.

V druhé části úlohy (obr. 29) obdobným postupem určíme polohu pólu Q jako průsečíku oblouků $\widehat{BQC}$ s obvodovým úhlem velikosti $\alpha - \alpha' = 40°$ a oblouku $\widehat{CQA}$ s obvodovým úhlem velikosti $\beta' - \beta = 30°$. Tyto oblouky jsou výhodnější, protože rozdíl $\gamma' - \gamma = 10°$ je příliš malý. V obou případech opět užijeme ke konstrukci příslušných úsekových úhlů.

c) *Důkaz* vyplývá z užitých vět a popisu konstrukce.

d) *Diskuse.* Všechny tři trojúhelníky ($\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ i $\triangle A_2B_2C_2$) jsou určeny velikostmi dvou vnitřních úhlů a poloměru kružnice opsané, tedy jednoznačně. Obě části úlohy proto mají po jednom řešení.



Obr. 29

Příklad 2. K danému rovnostrannému trojúhelníku ABC vepsanému do kružnice o poloměru $r = 4{,}5$ cm sestrojte trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\boldsymbol{p}$ a $\triangle A_2B_2C_2$ z relace $\boldsymbol{q}$ takové, aby byly pravoúhlé s jedním ostrým úhlem velikosti 60°.

a) *Rozbor.* Podle podmínek úlohy může o velikostech vnitřních úhlů hledaných trojúhelníků platit:

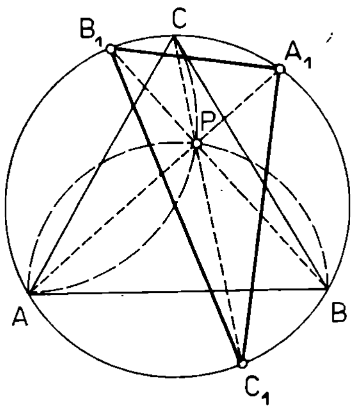
$$\alpha' = 90°, \beta' = 60°, \quad \beta' = 90°, \gamma' = 60°,$$
$$\alpha' = 90°, \gamma' = 60°, \quad \gamma' = 90°, \beta' = 60°,$$
$$\beta' = 90°, \alpha' = 60°, \quad \gamma' = 90°, \alpha' = 60°.$$

Obě části úlohy proto budou mít po šesti řešeních, celkem dvanáct řešení. Zde provedeme pouze dvě z nich.

Zvolme například $\alpha' = 90°$, $\beta' = 60° \Rightarrow \gamma' = 30°$.

b) *Konstrukce* (obr. 30).

Je-li $\beta' = 60°$, je $\beta' = \beta$, takže oblouk $\widehat{APC}$ bude procházet středem opsané kružnice, neboť $\sphericalangle APC = 2 . \sphericalangle ABC$. Protože dále je $\gamma + \gamma' = 90°$, je oblouk $\widehat{APB}$ obloukem Thaletovy kružnice nad průměrem $\overline{AB}$. Tím se konstrukce pólu P značně zjednoduší. Dále pak postupujeme podle definice 1.

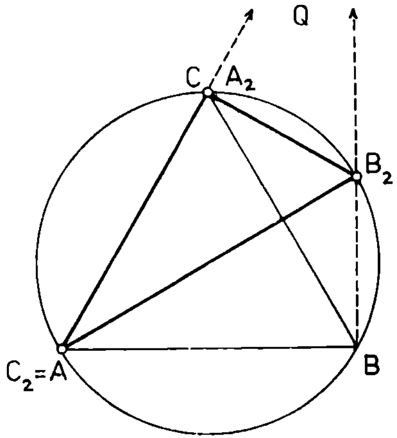


Obr. 30

Zvolíme-li stejné podmínky i pro sestrojení druhé části úlohy (obr. 31), dostaneme:

$$\alpha' - \alpha = 30°, \beta - \beta' = 0°, \gamma - \gamma' = 30°,$$

takže podle věty 5 padne pól Q na přímku AC. Bude proto $A_2 \equiv C$ a současně $C_2 \equiv A$.



Obr. 31

Příklad 3. Je dán $\triangle ABC$ vepsaný do kružnice o poloměru $r = 4{,}2$ s vnitřními úhly $\sphericalangle BAC = \alpha = 105°$ a $\sphericalangle ABC = \beta = 50°$. Sestrojte trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ z relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ takové, že

a) $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle BCA$,
b) $\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle ABC$.

Rozbor (obr. 32). a) V prvním případě je především $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 25°$. Dále musí při přemístění platit:

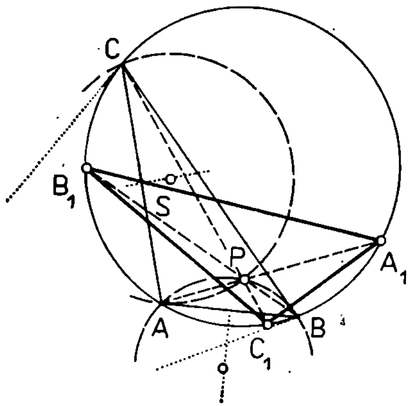
$$C_1 \equiv A \Rightarrow \gamma' = \alpha = 105°,$$

$$A_1 \equiv B \Rightarrow \alpha' = \beta = 50°,$$

$$B_1 \equiv C \Rightarrow \beta' = \gamma = 25°.$$

Máme tedy:

$$\alpha + \alpha' = \alpha + \beta = 155°,$$
$$\beta + \beta' = \beta + \gamma = 75°,$$
$$\gamma + \gamma' = \gamma + \alpha = 130°.$$



Obr. 32

Všechny tři součty jsou menší než 180°, takže pól P je podle věty 4 vnitřní bod $\triangle ABC$. Konstrukce se provede jako v předešlých úlohách.

b) Ve druhém případě je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Zde dostáváme zajímavý výsledek, protože

$\alpha - \alpha' = 0 \Rightarrow$ pól Q leží na přímce BC,

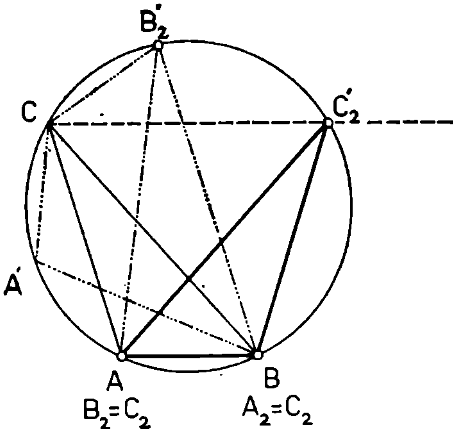
$\beta - \beta' = 0 \Rightarrow$ pól Q leží na přímce AC,

$\gamma - \gamma' = 0 \Rightarrow$ pól Q leží na přímce AB.

Protože přímky AB, BC, AC mimo vrcholy $\triangle ABC$ již žádné další společné body nemají, zdálo by se, že úloha nemá řešení. Avšak podmínku $\sphericalangle AQB = \sphericalangle BQC = \sphericalangle CQA = 0°$ splňují tři nevlastní body roviny, takže je (obr. 33)

$$CQ_1 \parallel AQ_1 \equiv BQ_1; \; BQ_2 \parallel AQ_2 \equiv CQ_2;$$

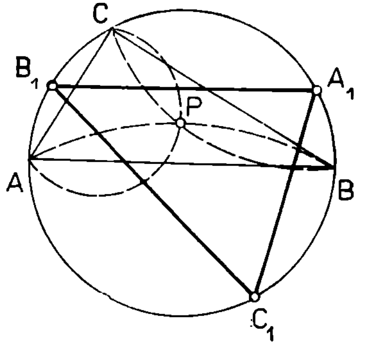
$$AQ_3 \parallel BQ_3 \equiv CQ_3.$$



Obr. 33

Příklad 4. Je dán pravoúhlý $\triangle ABC$ s přeponou $AB = 8$ cm a úhlem $\sphericalangle CAB = 60°$. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ **p** **p** $\triangle ABC$, jehož strana A_1B_1 má velikost 7 cm a poloměr kružnice vepsané $\varrho = 1{,}7$ cm.

Rozbor. Protože $\triangle ABC$ je pravoúhlý, má poloměr kružnice opsané oběma trojúhelníkům velikost poloviny přepony, tj. 4 cm. $\triangle A_1B_1C_1$ je určen třemi navzájem nezávislými prvky, tj. velikostmi poloměrů kružnice opsané a vepsané a strany A_1B_1. Při konstrukci budeme postupovat tak, že nejdříve sestrojíme zvlášť $\triangle ABC$ a zvlášť $\triangle A_1B_1C_1$, načež užitím věty 4 „vložíme" trojúhelník $A_1B_1C_1$ do kružnice opsané $\triangle ABC$.



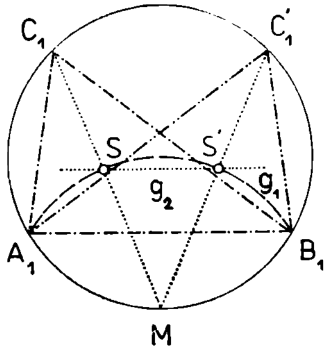
Obr. 34

Konstrukci $\triangle A_1B_1C_1$ řešíme jako samostatnou úlohu. Předpokládejme, že existuje $\triangle A'B'C' \cong \triangle A_1B_1C_1$ (obr. 35).

Na kružnici opsané poloměrem $r = 4$ cm kolem středu O' umístíme tětivu $A'B' = 7$ cm. Označme M střed menšího oblouku $\widehat{A'B'}$. Bude-li vrchol C' hledaného trojúhelníku probíhat větší oblouk $\widehat{A'B'}$, bude střed S' kružnice vepsané trojúhelníku $A'B'C'$ probíhat oblouk g_1 kružnice opsané kolem bodu M poloměrem velikosti $MA' = MB'$. S důkazem správnosti této konstrukce se setkáme až ve druhé kapitole. Současně leží bod S' na rovnoběžce g_2 se stranou $A'B'$ vedené ve vzdálenosti

$\varrho = 1{,}7$ cm. V našem případě má tato pomocná konstrukce dvě řešení.

Nyní již známe velikosti všech tří součtů $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$, $\gamma + \gamma'$, takže můžeme užitím věty 4 přemístit $\triangle A'B'C'$ do kružnice opsané $\triangle ABC$ (viz obr. 34).



Obr. 35

Příklad 5. K danému trojúhelníku ABC $[AB = 8, BC = 4, CA = 6]$ sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ podle P takový, že:

a) $AB_1 : CB_1 = 3 : 4$, $CA_1 : BA_1 = 4 : 7$ a pól P je vnitřní bod $\triangle ABC$.

b) $AB_1 : CB_1 = 9 : 16$, $BC_1 : AC_1 = 6 : 7$ a pól P leží v polorovině $\overleftarrow{ABC}$*.

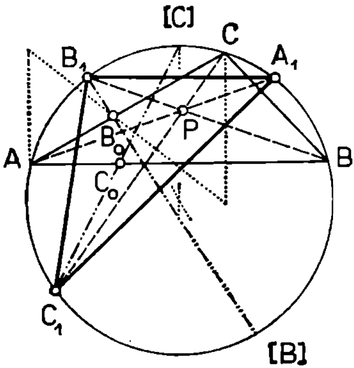
Řešení. V obou případech nejdříve zjistíme velikosti poměrů, které v úlohách nejsou zadány. Použijeme věty 9.

a) $$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot q \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{3}{4} \cdot q \cdot \frac{4}{7} = 1 \Rightarrow q = \frac{7}{3} = \frac{BC_1}{AC_1}.$$

b) $$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot q = \frac{9}{16} \cdot \frac{6}{7} \cdot q = 1 \Rightarrow q = \frac{56}{27} = \frac{CA_1}{BA_1}.$$

Je výhodné provést tyto výpočty ještě před vlastním provedením konstrukce, protože lze vypočteného poměru často použít k zajištění větší přesnosti. V daném případě je strana $BC = 4$ nejmenší a to, jak uvidíme dále, působí při konstrukci určité potíže.

Zde využijeme v obou případech známého vztahu, že osa úhlu v trojúhelníku dělí stranu trojúhelníku na dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru velikostí přilehlých stran. V daném případě a) například máme sestrojit trojúhelník AB_1C, jehož strany mají velikosti v poměru 3 : 4 (obr. 36).

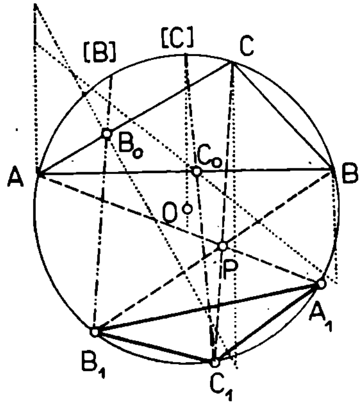


Obr. 36

Rozdělíme proto úsečku AC v udaném poměru a dělicí bod označíme B_0. Osa strany AC nechť protne opsanou kružnici v bodě $[B]$ ležícím na větším oblouku $\widehat{ABC}$. Přímka $[B]B_0$ pak protne menší oblouk kružnice mezi body A a C v hledaném bodě B_1. Že tomu tak skutečně je, snadno dokážeme, neboť jsou-li oblouky $\widehat{A[B]}$ a $\widehat{C[B]}$ shodné, jsou shodné i k nim příslušné obvodové úhly

$\sphericalangle AB_1[B]$ a $\sphericalangle CB_1[B]$. Stejným způsobem sestrojíme i další bod, zde nejlépe bod C_1, takže přímky BB_1 a CC_1 se protnou v hledaném bodě P.

V případě b) postupujeme obdobně s tím rozdílem, že oba body $[B]$ a $[C]$ leží na oblouku $\widehat{ABC}$ (obr. 37).



Obr. 37

Je třeba ještě připomenout, že předcházející dvě úlohy mají více řešení, a to v polorovinách $\overrightarrow{ABC}*$, $\overrightarrow{CAB}*$, $\overrightarrow{BCA}*$. Není-li však daný trojúhelník tupoúhlý, jako je tomu v našem případě b), jsou konstrukce tak obtížné, že nelze zaručit jejich přesnost, a nemají tedy praktický význam.

Příklad 6. Jsou dány tři úsečky velikostí a, b, c. Úsečku c rozdělte na dvě části, jejichž velikosti jsou v poměru $a^2 : b^2$.

Rozbor. Ke konstrukci užijeme věty 9. Bude-li totiž $AB_1 = BC_1 = a \wedge CB_1 = AC_1 = b$, bude podle věty 9

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1,$$

takže

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = 1$$

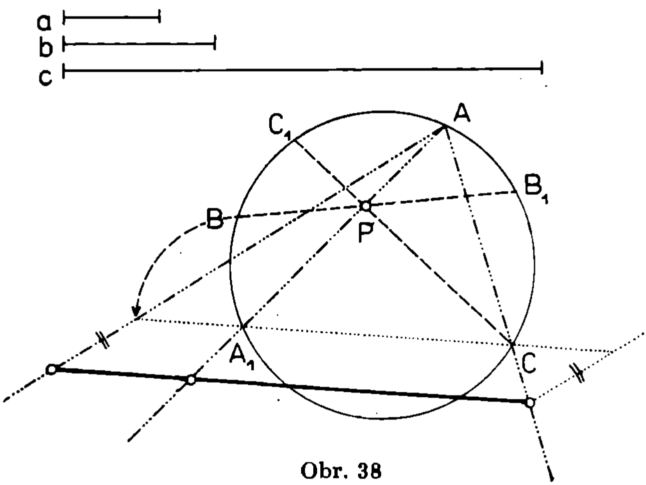
a odtud

$$\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Konstrukci provedeme podle obr. 38:

Narýsujeme libovolnou kružnici k a na ní zvolíme bod B. Od bodu B naneseme po řadě tětivy $BC_1 = a$, $C_1A = b$, $AB_1 = a$, $B_1C = b$. Přímky BB_1 a CC_1 se protnou v bodě P. Potom přímka AP určí na kružnici k bod A_1 a podle věty 9 platí

$$BA_1 : CA_1 = a^2 : b^2,$$



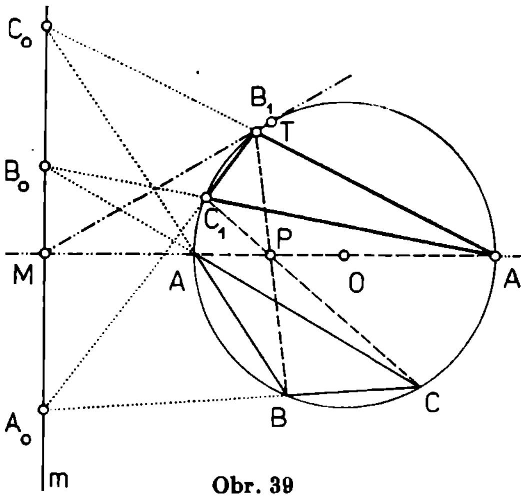
Obr. 38

načež danou úsečku velikosti c rozdělíme v poměru $BA_1 : CA_1$.

Poznámka. Jsou-li dané úsečky a, b příliš veliké, je možno je zmenšit ve vhodném libovolně zvoleném poměru.

Příklad 7. Do kružnice $k = (O; 40)$ vepište $\triangle ABC$ [$AB = 45$; $\sphericalangle ABC = 120°$]. Na polopřímce OA určete bod M ($OM = 80$). Bodem M veďte přímku $m \perp OA$. Do kružnice k pak vepište $\triangle A_1B_1C_1$ tak, aby se dvojice přímek $(\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{A_1B_1})$, $(\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{B_1C_1})$ a $(\overleftrightarrow{CA}, \overleftrightarrow{C_1A_1})$ protínaly po dvou na přímce m.

Rozbor. Protože přímka m nemá s kružnicí k žádný společný bod, budou podle věty 1 přímky AA_1, BB_1 a CC_1 procházet bodem ležícím uvnitř kružnice k a přímka m bude polárou tohoto bodu. Na obr. 39 je to bod P.

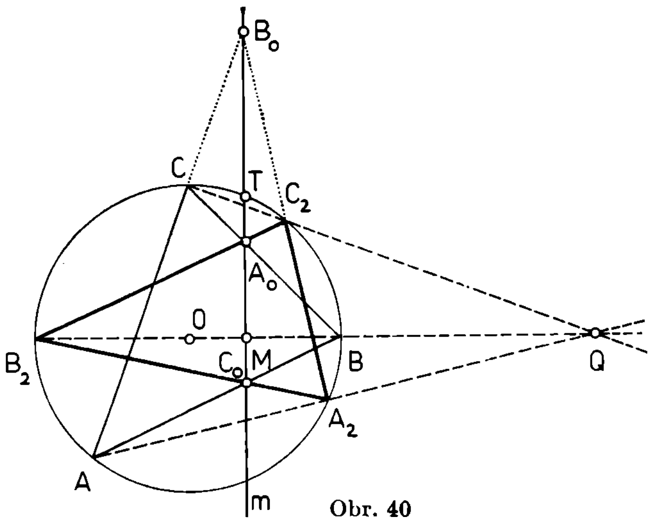


Obr. 39

Konstrukci bodu P provedeme tak, že nejdříve vedeme středem O kružnice k kolmici na přímku m, tj. přímku OM. Bod M je sdružený pól k hledanému pólu P. Ten pak sestrojíme například pomocí tečny vedené z bodu M ke kružnici k, jejíž dotykový bod leží na kolmici vedené pólem P na přímku OM. Potom nám polopřímky $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ a $\overrightarrow{CP}$ určí na kružnici k hledané vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$.

Takto zadaná úloha má vždy jedno řešení, pokud přímka m není tečnou kružnice k. To platí i v tom případě, že přímka m protne kružnici k. O tom nás přesvědčí řešení další úlohy.

Příklad 8. Do kružnice $k = (O;\ 40)$ vepište $\triangle ABC$ $[AB = 73;\ BC = 57]$. Na polopřímce OB určete bod M



Obr. 40

($OM = 15$) a veďte jím přímku $m \perp \overrightarrow{OB}$. Potom vepište do kružnice k trojúhelník $A_2B_2C_2$ tak, aby se dvojice přímek ($\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A_2B_2}$), ($\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{B_2C_2}$) a ($\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{C_2A_2}$) protínaly po dvou na přímce m.

Rozbor. Jde o obdobu úlohy z příkladu 7 s tím rozdílem, že daný bod M je sdruženým pólem pólu Q ležícího ve vnější oblasti kružnice k.

Bod Q sestrojíme v tomto případě tak, že v průsečících přímky m s kružnicí k vedeme tečny k této kružnici a ty se protnou v hledaném bodě Q. Potom přímky QA, QB a QC určí na kružnici k vrcholy hledaného $\triangle A_2B_2C_2$.

Také takto zadaná úloha má právě jedno řešení, pokud přímka m není tečnou kružnice k.

Na závěr je třeba ještě připomenout toto:

Podle výsledku příkladu 4 zřejmě můžeme k danému trojúhelníku umístit do kružnice jemu opsané trojúhelník podobný k libovolně zvolenému trojúhelníku tak, aby spolu s daným vytvořili dvojici z relace $\boldsymbol{p}$ nebo $\boldsymbol{q}$.

Ve cvičeních, která následují, jsou uvedeny ještě některé další úlohy jiného typu, než je ukázáno v příkladech. Vzhledem k shora uvedené připomínce je zde volba a možnost různých kombinací nevyčerpatelná.

Cvičení

1. Do kružnice $k = (O; 3)$ vepište $\triangle ABC$ [$a = BC = 5{,}5$; $c = AB = 4$]. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle $P[AP = 2{,}5;\ BP = 2]$.
2. Do kružnice o poloměru $r = 32$ mm vepište rovnoramenný $\triangle EFG$, jehož základna EF má velikost 40 mm. Sestrojte $\triangle E_2F_2G_2\ \boldsymbol{q}\ \triangle EFG$ podle pólu Q, je-li $FQ = 40$ mm, $GQ = 75$ mm.

3. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 6$; $BC = 3{,}5$; $\sphericalangle ABC = 60°$]. Sestrojte $\triangle A_2B_2C_2$ z relace q podle pólu Q, který leží na prodloužení strany AB za bod B tak, že $BQ = 2$.
4. Trojúhelník RUT má velikosti stran v poměru $RU : UT : TR = 4 : 5 : 6$. Určete polohu pólu Q tak, aby platilo $\triangle RUT \cong \triangle U_2R_2T_2 \wedge \triangle RUT\ q\ \triangle R_2U_2T_2$ podle Q.
5. Je dán $\triangle ABC$ [$AB = 5$; $r = 3$; $v_c = 4$], kde r je velikost poloměru kružnice opsané a v_c velikost výšky příslušné ke straně AB. Bod C_1 (případně C_2) půlí oblouk $\widehat{AB}$ kružnice $\triangle ABC$ opsané a vzdálenost pólů P (případně Q) od přímky AB má velikost $d = \frac{1}{2} v_c$. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace p podle P (případně $\triangle A_2B_2C_2$ z relace q podle Q).
6. Do kružnice o poloměru $r = 3$ cm vepište pravidelný pětiúhelník. Dva jeho sousední vrcholy označte A, B a zbývající tři vrcholy C_1, A_1, B_1 v libovolném pořadí (půjde-li o relaci q, změňte indexy na A_2, B_2). Utvořte všechny dvojice [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in p$, případně [$\triangle ABC$, $\triangle A_2B_2C_2$] tak, aby všechny možné obměny v pořadí vrcholů C, A_1, B_1 nebo C, A_2, B_2 byly vyčerpány. Zapište všechna výsledná pořadí šesti bodů na opsané kružnici.
7. Neleží-li pól P nebo Q na žádné straně $\triangle ABC$ ani na jejich prodloužení, neleží ani na žádné straně $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ z relací p nebo q ani na jejich prodloužení. Dokažte!
8. Trojúhelník EFG je dán velikostmi stran, a to: $EF = 7$ cm, $FG = 5$ cm, $GE = 6$ cm. Pól P leží na straně EF tak, že $EP : FP = 3 : 2$. Sestrojte dvojici $\triangle E_1F_1G_1\ p\ p\ \triangle EFG$ podle P, aniž narýsujete kružnici $\triangle EFG$ opsanou.
9. Základna rovnoramenného $\triangle ABC$ má velikost $AB = 3$ cm a jeho ramena $AC = BC = 5$ cm. Na prodloužení strany AB za bod B leží pól Q tak, že $AQ : BQ = 7 : 5$. Sestrojte dvojici [$\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle ABC$] $\in q$ podle Q, aniž narýsujete kružnici $\triangle ABC$ opsanou.
10. Trojúhelníky $\triangle ABC\ p\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P mohou být navzájem shodné nebo neshodné, avšak nemohou být podobné s poměrem podobnosti různým od 1. Odůvodněte!
11. Upravte text úlohy 10 takto: Existuje dvojice [$\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$] $\in p$ podle P taková, že $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Ukažte na rozdíly v textu a uvažte, je-li takto upravený výrok pravdivý.

12. Rovnoramenný $\triangle K_2L_2M_2$ se základnou $K_2L_2 = 4$ cm je v relaci q podle pólu Q ležícího na přímce K_2L_2 s $\triangle KLM$ rovněž rovnoramenným se základnou KL. Sestrojte vrcholy M a M_2.

13. Trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ mají společnou kružnici opsanou $k = (O; 3{,}5)$, přičemž je $AB = 5$, $\sphericalangle ABC = 76°$, $A_1B_1 = 7$ a velikost výšky příslušné ke straně A_1B_1 je $v_1 = 2{,}5$. Umístěte tyto trojúhelníky do kružnice k tak, aby přímky $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ a $\overleftrightarrow{CC_1}$ procházely týmž bodem uvnitř společné kružnice opsané.

14. Úlohu 13 řešte tak, aby společný bod přímek $\overleftrightarrow{AA_1}$, $\overleftrightarrow{BB_1}$ a $\overleftrightarrow{CC_1}$ byl vně kružnice opsané. Indexy se ovšem změní!

15. K danému trojúhelníku RTU vepsanému do kružnice $k = (O; 3{,}8)$, jehož vnitřní úhly mají velikosti $\sphericalangle TRU = 120°$, $\sphericalangle UTR = 45°$, sestrojte rovnostranný trojúhelník
a) $\triangle R_1T_1U_1$ z relace p podle P,
b) $\triangle R_2T_2U_2$ z relace q podle Q.

16. Je dán rovnostranný $\triangle ABC$. Sestrojte pravoúhlý rovnoramenný $\triangle A_2B_2C_2$ z relace q podle Q.

17. Je dán $\triangle ABC$ s vnitřními úhly $\sphericalangle ABC = \beta = 40°$ a $\sphericalangle ACB = \gamma = 60°$ vepsaný do kružnice $k = (O; 3{,}5)$. Narýsujte dvojici $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle ABC] \in p$ podle P tak, aby bylo $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \alpha$, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \gamma$. Jaký je vztah mezi těmito trojúhelníky? Zapište!

18. Vyšetřete množinu všech pólů P určujících dvojice trojúhelníků $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle P takové, že vnitřní úhly $\triangle ABC$ mají velikosti $\alpha = 40°$ a $\beta = 65°$ a jim odpovídající vnitřní úhly $\triangle A_1B_1C_1$ velikosti $\alpha' = 60°$, $\beta' < 90°$.

19. Vyšetřete množinu všech pólů Q určujících dvojice trojúhelníků $[\triangle KLM, \triangle K_1L_1M_1] \in q$ podle Q, víte-li, že $KL = 6{,}5$; $LM = 4$ a $\sphericalangle KLM = 110°$ a současně je $\sphericalangle K_2L_2M_2 = 70°$ a $K_2L_2 \geqq 6{,}5$.

20. Sestrojte dvojici $[\triangle UHF, \triangle U_1H_1F_1] \in p$ podle P vepsanou do kružnice o poloměru $r = 4$ cm, jsou-li velikosti vnitřních úhlů $\sphericalangle UHF = 120°$, $\sphericalangle UFH = 25°$, $\sphericalangle U_1H_1F_1 = 100°$, $\sphericalangle F_1U_1H_1 = 25°$.

21. K trojúhelníku KMZ s vnitřními úhly velikostí $\sphericalangle KZM = 30°$, $\sphericalangle ZKM = 40°$ sestrojte $\triangle K_1M_1Z_1$ s vnitřním úhlem $\sphericalangle K_1M_1Z_1 = 130°$ z relace p podle pólu P, který půlí poloměr společné kružnice opsané.

22. Trojúhelník ABC je dán velikostmi stran: $AB = 5$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 7$ cm. Sestrojte všechny rovnoramenné $\triangle A_1B_1C_1$ nebo $\triangle A_2B_2C_2$ z relací p nebo q podle pólů P nebo Q ležících na přímce AB.
23. Opakujte úlohu 22, avšak slova „podle pólů ležících na přímce AB" nahraďte slovy „takové, že $\overline{A_1B_1} = \overline{AB}$ nebo $\overline{A_2B_2} = \overline{AB}$".
24. Je dán $\triangle K_1L_1M_1$ vepsaný do kružnice o poloměru $r = 3{,}5$, jehož strany mají velikosti $K_1L_1 = 4$ a $L_1M_1 = 3$. Narýsujte $\triangle KLM$, který je s daným trojúhelníkem v relaci p podle P a je pravoúhlý s odvěsnami, jejichž velikosti jsou v poměru 3 : 4.
25. Do kružnice o poloměru $r = 4$ cm vepište dvojici $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in q$ podle Q tak, aby bylo $A_2B_2 = BC = 6{,}8$ cm, $B_2C_2 = 1/2\ AC = 2{,}5$ cm.
26. Narýsujte dvojici $[\triangle K_1L_1M_1, \triangle KLM] \in p$ podle P, kde $r = 3$, $\sphericalangle KLM = 60°$, $\sphericalangle LMK = 45°$ a současně je $K_1L_1 \parallel KL$, $L_1M_1 \parallel LM$.
27. Sestrojte dvojici $[\triangle EFG, \triangle E_1F_1G_1] \in p$ podle P nebo $[\triangle EFG, \triangle E_2F_2G_2] \in q$ podle Q, víte-li, že $EF = 48$ mm, $\sphericalangle EFG = \sphericalangle E_1F_1G_1$ nebo $\sphericalangle E_2F_2G_2 = 60°$, $\sphericalangle GEF = 45°$ a $E_1G_1 \perp EF$ nebo $E_2G_2 \perp EF$.
28. K danému $\triangle ABC$, kde $AB = 4{,}5$; $\sphericalangle ABC = 110°$, $BC = 6$, sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace p podle P pravoúhlý s přeponou B_1C_1 nebo $\triangle A_2B_2C_2$ rovněž pravoúhlý s přeponou B_2C_2.
29. K danému trojúhelníku HJK $[HJ = 7, JK = 6, KH = 5{,}5]$ narýsujte $\triangle H_1J_1K_1$ z relace p podle P, kde $H_1J_1 = J_1K_1 = 6$, a $\triangle H_2J_2K_2$ z relace q podle Q, kde $H_2J_2 = J_2K_2 = 5$.
30. Je dán $\triangle A_1B_1C_1$ z relace p podle P $[A_1B_1 = 4{,}5$; $\sphericalangle A_1B_1C_1 = 60°$ a poloměr opsané kružnice $r = 3]$. Narýsujte příslušný $\triangle ABC$ tak, aby bylo $AB = 5{,}5 \wedge AB \parallel A_1B_1$.
31. Dokažte pravdivost vět obrácených k větám 4 a 5.
32. Jsou dány velikosti některých vnitřních úhlů dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in p$ podle P. Určete polohu pólu P:
a) $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\alpha' = 50°$, $\beta' = 70°$;
b) $\alpha = 30°$, $\beta = 70°$, $\alpha' = 150°$, $\beta' = 20°$;
c) $\alpha = 80°$, $\alpha' = 110°$.
33. Jsou dány velikosti některých vnitřních úhlů dvojice $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2]$. Určete polohu pólu Q:
a) $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$, $\alpha' = 50°$, $\beta' = 40°$;
b) $\alpha = 70°$, $\beta = 40°$, $\alpha' = 90°$, $\beta' = 60°$.

84. Je dán $\triangle KLM$ [$KL = 6$ cm, $LM = 7$ cm, $\sphericalangle KLM = 60°$] a přímka $p \perp KL$, jejíž vzdálenost od vrcholu L je 4,5 cm. Opište kružnici $\triangle KLM$ a do ní vepište $\triangle K'L'M'$ tak, aby se dvojice stran KL a $K'L'$, LM a $L'M'$, MK a $M'K'$ protnuly na dané přímce p.

85. Do dané kružnice vepište pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají velikosti v poměru 3 : 5!

86. Vrcholy trojúhelníků ABC a $A_1B_1C_1$ leží na společné kružnici opsané tak, že $AB_1 : CB_1 = 3 : 4$, $CA_1 : BA_1 = 4 : 7$. Určete poměr $BC_1 : AC_1$!

B. SLOŽENÉ RELACE

V první části této kapitoly jsme poznali základní vlastnosti relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$. Protože v dvojicích

$$[\triangle ABC,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ a } [\triangle ABC,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$$

jsou první složky shodné, můžeme relace $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ složit, a to ve dvou pořadích:

$$\triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle ABC\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2$$

nebo

$$\triangle A_2B_2C_2\ \boldsymbol{q}\ \triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1.$$

Tyto složené relace mezi $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ pak můžeme psát zjednodušeně:

$$\triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2,$$
$$\triangle A_2B_2C_2\ \boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$$

nebo také

$$[\triangle A_1B_1C_1,\ \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q},$$

$$[\triangle A_2B_2C_2,\ \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}.$$

Víme dále, že tvar jednotlivých složek v relacích $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ závisí na poloze pólů P a Q. Můžeme proto v množině $\boldsymbol{M}_T$ utvořit nekonečně mnoho složených relací $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ nebo $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}$ tím, že budeme polohy pólů P a Q různě kombinovat. Tu se pak naskýtá otázka, existuje-li taková dvojice pólů P a Q, aby uvažované složené relace byly shodnosti

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2,\ \triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle A_1B_1C_1.$$

Pokud takové dvojice pólů P a Q existují, budou relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{q} \circ \boldsymbol{p}$ zobrazením v $\boldsymbol{M}_T$. Protože prvky množiny $\boldsymbol{M}_T$ jsou všechny trojúhelníky vepsané do dané kružnice k, lze předpokládat, že uvažovaným zobrazením bude identita, otáčení nebo středová či osová souměrnost.

Ukážeme, že v úvahu připadá právě osová souměrnost.

Věta 10. *Je-li daný* $\triangle ABC$ *první složkou v relacích*

$$[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p} \text{ a } [\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q},$$

potom trojúhelníky $\triangle ABC$ *a* $\triangle A_1B_1C_1$ *jsou téhož smyslu a trojúhelníky* $\triangle ABC$ *a* $\triangle A_2B_2C_2$ *opačného smyslu.*

Důkaz. Věta obsahuje dvě tvrzení.

a) Na obr. 9 leží pól P uvnitř $\triangle ABC$, z čehož plyne, že polopřímka $AA_1 \equiv AP$ odděluje body B a C, polopřímka $BB_1 \equiv BP$ body A a C, polopřímka CC_1 body A a B. Leží tedy vrcholy $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ na kružnici k v pořadí $A\ C_1\ B\ A_1\ C\ B_1$, takže trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou téhož smyslu. (1.22)

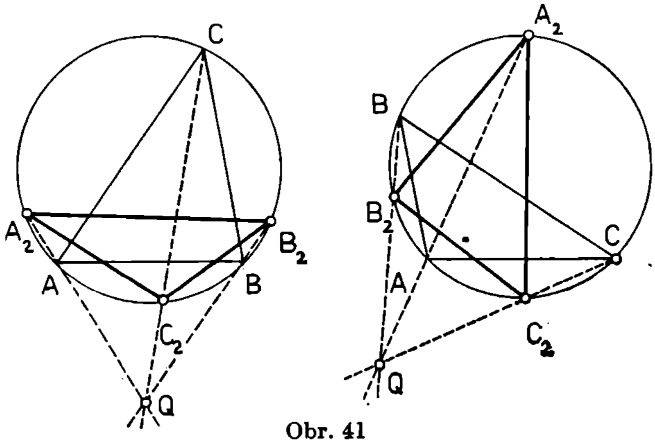
Na obr. 10 leží pól P v polorovině $\overrightarrow{ABC}^*$, takže polopřímka $\overrightarrow{CC_1} \equiv \overrightarrow{CP}$ odděluje body A a B, B_1 a A_1, A a A_1, B_1 a B, odkud plyne toto pořadí: $A\ C\ B\ A_1\ C_1\ B_1$, neboli $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ jsou opět téhož smyslu. (1.23)

Podle (1.22) a (1.23) jsou trojúhelníky $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$ vždy téhož smyslu, neboť cyklické záměny vedou k stejným závěrům.

b) Na obr. 41 vlevo leží pól Q uvnitř $\sphericalangle ACB$, takže polopřímka $\overrightarrow{CC_2} \equiv \overrightarrow{CQ}$ odděluje body A a B. Proto polopřímky $\overrightarrow{QA} \equiv \overrightarrow{QA_2}$ a $\overrightarrow{QB} \equiv \overrightarrow{QB_2}$ leží v opačných polorovinách $\overrightarrow{QCA}$ a $\overrightarrow{QCB}$. Jsou proto možná právě čtyři různá pořadí vrcholů $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ na kružnici k:

$$CA_2AC_2BB_2,\ CAA_2C_2B_2B,\ CA_2AC_2B_2B,\ CAA_2C_2BB_2.$$

Ve všech čtyřech případech jsou $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ smyslu opačného. (1.24)



Obr. 41

Na obr. 41 vpravo leží pól Q uvnitř úhlu vrcholového k $\sphericalangle BAC$. Zde polopřímka $\overrightarrow{QA_2} \equiv \overrightarrow{QA}$ odděluje body B a C, takže polopřímky $\overrightarrow{QB_2} \equiv \overrightarrow{QB}$ a $\overrightarrow{QC_2} \equiv \overrightarrow{QC}$ leží v opačných polorovinách $\overrightarrow{QAB}$ a $\overrightarrow{QAC}$. Odtud pak plyne jediné možné pořadí vrcholů na kružnici k: $A\ B_2\ B\ A_2\ C\ C_2$, neboli $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$ jsou opačného smyslu jako v případě (1.24). (1.25)

Tím je pravdivost věty 10 dokázána. Jaký však je význam této věty? Je-li $\triangle ABC$ téhož smyslu jako $\triangle A_1B_1C_1$ a opačného smyslu než $\triangle A_2B_2C_2$, musí být trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ smyslu opačného. Potom ovšem složená relace $\triangle A_1B_1C_1 \ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} \ \triangle A_2B_2C_2$ v $\boldsymbol{M}_T$ nemůže být ani identitou, ani otáčením nebo středovou souměrností. Zbývá proto právě souměrnost osová.

Nyní už jde jenom o to, existuje-li vůbec taková dvojice pólů P a Q, aby bylo $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.

Věta 11. *Mějme dvojici trojúhelníků* $\triangle A_1B_1C_1 \ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_2$ *takovou, že je současně* $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$; *potom příslušné póly P a Q jsou sdružené póly vzhledem ke společné kružnici těmto trojúhelníkům opsané a přímka PQ je osou souměrnosti uvažované dvojice trojúhelníků.*

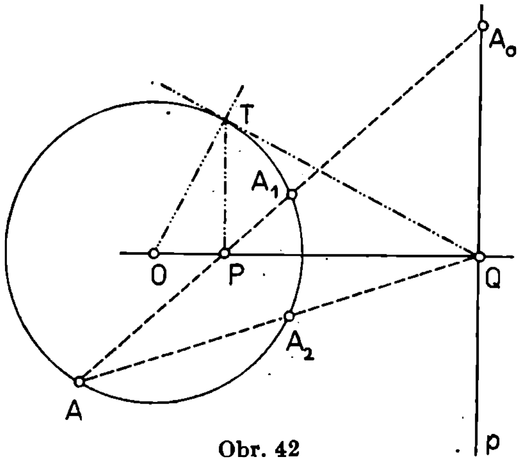
Důkaz si zjednodušíme tím, že nejdříve dokážeme platnost věty obrácené.

Na obr. 42 jsou body P a Q sdružené póly vzhledem ke kružnici k. Přímka AP protíná kružnici k v bodě A_1, přímka AQ v bodě A_2. Dále je $p \perp \overleftrightarrow{PQ}$ polára bodu P vzhledem ke kružnici k a A_0 průsečík přímky AA_1 s polárou p.

Z vlastností sdružených pólů P a Q plyne

$$(A\,A_1\,P\,A_0) = -1, \text{ neboli } \frac{PA_1}{PA} : \frac{A_0A_1}{A_0A} = -1.$$

To znamená, že úsečka AA_1 je body P a A_0 dělena harmonicky a také polopřímky $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QA_1}$, $\overrightarrow{QP}$ a $\overrightarrow{QA_0}$ tvoří harmonickou čtveřinu. Současně je $\sphericalangle PQA_0$ pravý, z čehož plyne, že polopřímky $\overrightarrow{QP}$ a $\overrightarrow{QA_0}$ jsou osami vedlejších úhlů, z nichž jeden je $\sphericalangle AQA_1$. Polopřímky $\overrightarrow{QA}$ a $\overrightarrow{QA_1}$ jsou proto souměrně sdruženy podle osy $\overleftrightarrow{PQ}$, a protože osa PQ prochází středem kružnice k, jsou podle ní souměrně sdruženy i body A_1 a A_2. (1.26)



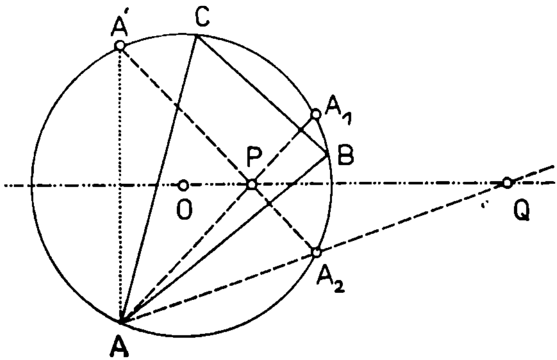
Obr. 42

Zobrazíme-li takto i zbývající dva vrcholy B a C libovolného $\triangle ABC$, budou podle (1.26) podle osy PQ souměrně sdruženy i dvojice vrcholů $[B_1, B_2]$ a $[C_1, C_2]$. Tím jsme dokázali, že existuje aspoň jedna dvojice pólů P a Q, která splňuje větu 11. Zbývá proto dokázat, že vedle dvojice sdružených pólů P a Q žádná jiná taková dvojice již neexistuje. Že tomu tak skutečně je, to plyne z vět 6 a 8, protože dvojicemi úhlů $[\alpha, \alpha']$, $[\beta, \beta']$ a $[\gamma, \gamma']$ je určen právě jeden pól P a jeden pól Q.

Přímým důsledkem věty 11 je věta další:

Věta 12. *Je-li v množině $\boldsymbol{M}_T$ dána trojice trojúhelníků $\triangle A_1B_1C_1$ **p** $\triangle ABC$ **q** $\triangle A_2B_2C_2$ taková, že je současně $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, potom existuje v množině $\boldsymbol{M}_T$ také $\triangle A'B'C'$, o němž platí*

$$\triangle A_2B_2C_2 \ \mathbf{p}\ \triangle A'B'C' \ \mathbf{q}\ \triangle A_1B_1C_1 \wedge$$
$$\wedge\ \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC.$$



Obr. 43

Důkaz (obr. 43). Podle věty 11 jsou polopřímky $\overrightarrow{QA}$ a $\overrightarrow{QA_1}$ souměrně sdruženy podle osy $\overleftrightarrow{PQ}$. Protíná-li polopřímka $\overrightarrow{QA_1}$ kružnici k (souměrnou podle téže osy) v bodě A', jsou i body A a A' souměrně sdruženy podle osy $\overleftrightarrow{PQ}$. Na obr. 43 jsou vrcholy B, C, B', C' pro přehlednost opět vynechány. Zřejmě se však i na ně vztahuje věta 11, takže také dvojice trojúhelníků $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$ je souměrně sdružena podle téže osy. V této souměrnosti je bod P samodružný, takže jím procházejí dvojice přímek $\overleftrightarrow{A_2A'}$ a $\overleftrightarrow{A_1A}$, $\overleftrightarrow{B_2B'}$ a $\overleftrightarrow{B_1B}$, $\overleftrightarrow{C_2C'}$ a $\overleftrightarrow{C_1C}$. Rovněž bod Q je samodružný s obdobnými důsledky jako u bodu P.

Věty 11 a 12, protože jejich pravdivost vyplývá z vlastností sdružených pólů, mají několik bezprostředních důsledků, jichž lze s výhodou využít při konstrukcích i řešení některých úloh. Uveďme aspoň ty nejdůležitější:

1. Osa souměrnosti PQ dvojic $[\triangle A_1B_1C_1, \triangle A_2B_2C_2] \in \in \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ i $[\triangle ABC, \triangle A'B'C'] \in \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ prochází středem společné kružnice opsané uvažované čtveřici trojúhelníků.

2. V první části této kapitoly jsme se setkávali se situacemi, kdy bylo obtížné sestrojit oblouky množin všech pólů Q, když některý z rozdílů $|\alpha - \alpha'|$, $|\beta - \beta'|$ nebo $|\gamma - \gamma'|$ byl příliš malý, takže pól Q padl daleko mimo nákresnu. V tom případě je snazší sestrojit nejdříve sdružený pól P užitím součtů $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$ nebo $\gamma + \gamma'$ a potom teprve $\triangle A_2B_2C_2$ užitím osové souměrnosti.

3. Jiné usnadnění konstrukcí poskytují známé vztahy mezi sdruženými póly:

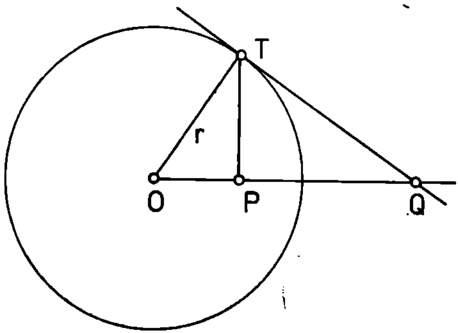
a) Platí $\overline{OP}.\overline{OQ} = r^2$, kde $\overline{OP}$ a $\overline{OQ}$ jsou vzdálenosti sdružených pólů od středu kružnice opsané a r velikost jejího poloměru. To plyne z Euklidovy věty o odvěsně (viz obr. 44).

Sestrojíme-li k dané kružnici k a pólu Q sdružený pól P užitím tečen, je $\sphericalangle QTO$ pravý a v pravoúhlém $\triangle QTO$ platí

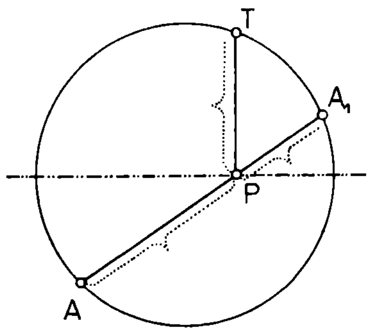
$$\overline{OP}.\overline{OQ} = \overline{OT}^2 = r^2. \tag{1.27}$$

b) Mocnost pólu P ke kružnici k je $\mu_1 = \overline{AP}\,.\,\overline{A_1P} = \overline{PT}^2 = v^2$, kde v značí velikost poloviny tětivy kružnice k vedené kolmo na přímku PQ v bodě P (obr. 45). V pravoúhlém $\triangle OPT$ je podle Pythagorovy věty

$$\mu_1 = v^2 = r^2 - \overline{OP}^2. \tag{1.28}$$



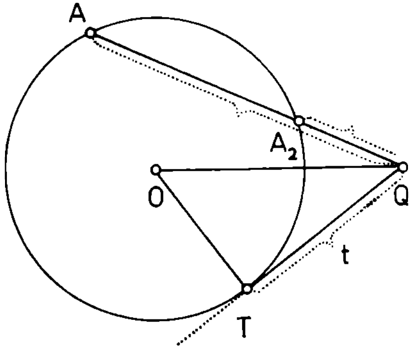
Obr. 44



Obr. 45

c) Mocnost pólu Q ke kružnici k je $\overline{QA}\,.\,\overline{QA_2} = \overline{QT}^2 = t^2$, kde t je velikost tečny vedené z pólu Q ke kružnici k (obr. 46).
V pravoúhlém $\triangle OQT$ je

$$\mu_2 = t^2 = \overline{OQ}^2 - r^2. \tag{1.29}$$



Obr. 46

d) Podle (1.28) a (1.29) pak je

$$\mu_2 - \mu_1 = t^2 - v^2 = \overline{PQ}^2. \tag{1.30}$$

e) $$\overline{PA} : \overline{PA_1} = \overline{QA} : \overline{QA_1}.$$

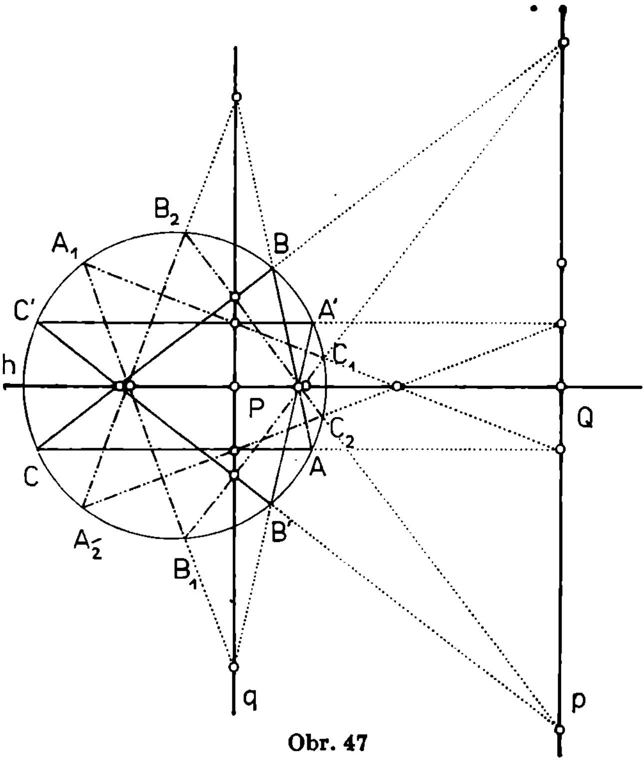
Tento vztah plyne z $\triangle AA_1Q$ (obr. 42), kde $\overleftrightarrow{PQ}$ je osou $\sphericalangle AQA_1$, a proto jeho strany AQ a A_1Q mají velikosti v poměru

$$\overline{AP} : \overline{A_1P}. \tag{1.31}$$

f) Vezmeme-li v úvahu ještě věty 1 a 2, vidíme podle obr. 47, že v trojúhelnících $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ se protínají odpovídající si strany na třech přímkách, a to:

— na přímce PQ dvojice z $\triangle ABC$ a $\triangle A'B'C'$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$,

— na poláře $\boldsymbol{p}$ pólu P z $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A'B'C'$ a $\triangle A_2B_2C_2$,



Obr. 47

— na poláře $\boldsymbol{q}$ pólu Q z $\triangle ABC$ a $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A'B'C'$ a $\triangle A_1B_1C_1$.

Z mnoha dalších složených relací, které lze v množině $\boldsymbol{M}_T$ utvořit, stojí za zmínku ještě jedna, jejichž vlastností využijeme v dalších kapitolách.

Věta 13. *Je-li dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1] \in \boldsymbol{p}$, *nebo dvojice* $[\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2] \in \boldsymbol{q}$, *potom existuje v množině* $\boldsymbol{M}_T$ *takový* $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$, *jehož vrchol* $\bar{A}$ *je souměrně sdružen s vrcholem* A *podle osy úsečky* $\overline{B_1C_1}$ *nebo* $\overline{B_2C_2}$, *vrchol* $\bar{B}$ *s vrcholem* B *podle osy úsečky* $\overline{A_1C_1}$ *nebo* $\overline{A_2C_2}$ *a vrchol* $\bar{C}$ *s vrcholem* C *podle osy úsečky* $\overline{A_1B_1}$ *nebo* $\overline{A_2B_2}$, *přičemž přímky* $A_1\bar{A}$, $B_1\bar{B}$ *a* $C_1\bar{C}$, *nebo* $A_2\bar{A}$, $B_2\bar{B}$ *a* $C_2\bar{C}$ *procházejí týmž bodem.*

Důkaz. Zde musíme nejdříve dokázat, že platí věta obrácená k větě 9. Předpokládejme proto, že o dvou trojúhelnících $\triangle ABC$ a $\triangle A_1B_1C_1$ se společnou kružnicí opsanou platí podle věty 9

$$\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=1$$

a současně přímky AA_1, BB_1 a CC_1 neprocházejí týmž bodem (obr. 48). (1.32)

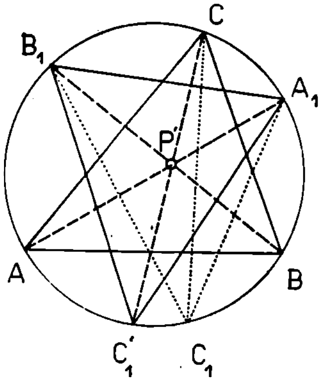
Nechť přímky AA_1 a BB_1 se protnou v nějakém bodě P'. Potom polopřímka CP' protne kružnici k v bodě $C_1' \neq C_1$. Podle věty 9 pak platí:

$$\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1'}{AC_1'}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=1$$

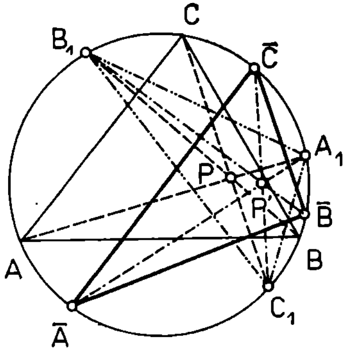
a podle předpokladu (1.32) také

$$\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1'}{AC_1'}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=1,$$

neboli $C_1 \equiv C_1'$ a také $P \equiv P'$, což je v rozporu s předpokladem (1.32), takže platí věta obrácená k větě 9, a to v celém rozsahu, protože v druhém tvrzení věty 9 jde o pouhou záměnu indexů.



Obr. 48



Obr. 49

Dále je na obr. 49 zobrazena trojice trojúhelníků $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle věty 13. Z konstrukce vyplývá, že

$$\begin{aligned} AB_1 &= \bar{A}C_1,\ BC_1 = \bar{B}A_1,\ CA_1 = \bar{C}B_1;\\ CB_1 &= \bar{C}A_1,\ AC_1 = \bar{A}B_1,\ BA_1 = \bar{B}C_1. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Dosadíme-li podle (1.33) do výrazu

$$\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}=1,$$

dostaneme

$$\frac{\bar{A}C_1}{\bar{C}A_1}\cdot\frac{\bar{B}A_1}{\bar{A}B_1}\cdot\frac{\bar{C}B_1}{\bar{B}C_1} = 1\,,$$

a po úpravě

$$\frac{\bar{A}B_1}{\bar{C}B_1}\cdot\frac{\bar{B}C_1}{\bar{A}C_1}\cdot\frac{\bar{C}A_1}{\bar{B}A_1} = 1\,,$$

což podle obrácení věty 9 znamená, že přímky $\bar{A}A_1$, $\bar{B}B_1$ a $\bar{C}C_1$ procházejí týmž bodem $\bar{P}$, nebo přímky $\bar{A}A_2$, $\bar{B}B_2$ a $\bar{C}C_2$ bodem $\bar{Q}$. Přitom nevylučujeme možnost, že bod $\bar{P}$ leží vně kružnice $\triangle ABC$ opsané, nebo naopak bod $\bar{Q}$ uvnitř. Podrobněji o tom pojednáme až ve třetí kapitole.

Zde zatím omezíme své úvahy na případ, kdy pól P leží uvnitř $\triangle ABC$, takže všechny tři trojúhelníky, tj. $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, jsou téhož smyslu, protože dvojice vrcholů $[A, \bar{A}]$, $[B, \bar{B}]$ a $[C, \bar{C}]$ leží při konstrukci podle věty 13 na týchž obloucích opsané kružnice omezených vrcholy $\triangle A_1B_1C_1$. V důsledku toho leží i pól $\bar{P}$ uvnitř $\triangle ABC$.

V tomto omezení budeme vztah mezi $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ zapisovat takto:

$$\triangle A_1B_1C_1\,\bar{\boldsymbol{p}}\,\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}\text{ podle }P\text{, nebo}$$

$$[\triangle A_1B_1C_1,\ \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \bar{\boldsymbol{p}}\text{ podle }P$$

a také

$$\triangle A_1B_1C_1\,\boldsymbol{p}\,\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}\text{ podle }\bar{P}\text{, nebo}$$

$$[\triangle A_1B_1C_1,\ \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}] \in \boldsymbol{p}\text{ podle }\bar{P}.$$

V relacích $(\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1)$ a $(\triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C})$ je opět jedna složka společná, a proto je můžeme složit dvěma způsoby:

$$\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

podle P,

$$\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle ABC = \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle ABC$$

podle $\bar{P}$.

Druhý zápis složené relace prozrazuje, že jde o symetrickou relaci, neboť věta 13 platí, i když zaměníme označení vrcholů $\triangle ABC$ za $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Vztah mezi velikostmi vnitřních úhlů uvažované trojice trojúhelníků pak vyjadřuje věta 14.

Věta 14. *Má-li trojice trojúhelníků ze složené relace*

$$\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } P$$

vnitřní úhly po řadě velikostí α, β, γ; α', β', γ'; $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ a příslušný pól je vnitřní bod $\triangle ABC$, potom o velikostech těchto úhlů platí:

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha'),\ \bar{\beta} = 180° - (\beta + \beta'),$$
$$\bar{\gamma} = 180° - (\gamma + \gamma').$$

Důkaz. Na obr. 49 je

$$\bar{\alpha} = \sphericalangle \bar{B}\bar{A}\bar{C} = \sphericalangle A_1\bar{A}\bar{B} + \sphericalangle A_1\bar{A}\bar{C}. \qquad (1.34)$$

Podle věty 13 je

$$A_1\bar{B} = C_1B \Rightarrow \sphericalangle A_1\bar{A}\bar{B} = \sphericalangle C_1B_1B \equiv \sphericalangle C_1B_1P,$$
$$A_1\bar{C} = B_1C \Rightarrow \sphericalangle A_1\bar{A}\bar{C} = \sphericalangle B_1C_1C \equiv \sphericalangle B_1C_1P.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do (1.34), bude

$$\bar{\alpha} = \sphericalangle \bar{B}\bar{A}\bar{C} = \sphericalangle C_1B_1P + \sphericalangle B_1C_1P = 180° - \\ - \sphericalangle B_1PC_1$$

a podle věty 4

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha').$$

Zbývající dvě tvrzení věty 14 vyplývají z cyklických záměn.

Právě dokázaná věta 14 má dva přímé důsledky:

1. $\alpha + \alpha' + \bar{\alpha} = 180°$, $\beta + \beta' + \bar{\beta} = 180°$, $\gamma + \gamma' + \bar{\gamma} = 180°$. (1.35)

2. Vnitřní úhly v $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ mají velikosti (viz obr. 49):

$$\sphericalangle CPB_1 = \sphericalangle BPC_1 = \bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha'),$$
$$\sphericalangle APC_1 = \sphericalangle CPA_1 = \bar{\beta} = 180° - (\beta + \beta'),$$
$$\sphericalangle APB_1 = \sphericalangle BPA_1 = \bar{\gamma} = 180° - (\gamma + \gamma'),$$

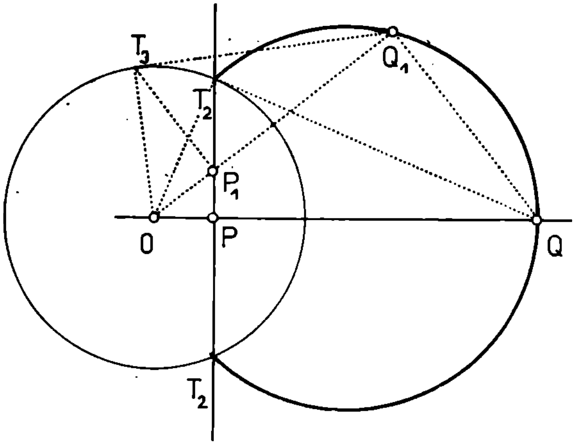
neboť například $\sphericalangle CPB_1$ je vedlejší k $\sphericalangle BPC = \alpha + \alpha'$, takže

$$\sphericalangle CPB_1 = 180° - (\alpha + \alpha') = \bar{\alpha}. \tag{1.36}$$

Možnosti vytváření dalších složených relací nejsou dvěma typy uvedenými v této kapitole ještě zdaleka vyčerpány. Protože však pro následující úvahy s těmito dvěma typy dobře vystačíme, uzavřeme kapitolu několika příklady a cvičeními.

Příklad 1. Vyšetřete množinu všech vnějších pólů Q, jestliže s nimi sdružený pól P probíhá poláru pólu Q vzhledem ke kružnici k opsané danému $\triangle ABC$.

Řešení. Podle zadání sestrojíme libovolnou kružnici $k = (O; r)$ a přímku h jdoucí středem O kružnice k (obr. 50). Na té části přímky h, která je uvnitř kružnice k, zvolíme bod $P \neq O$. Nechť bod P je jedním z dvojice sdružených pólů P a Q! Vnější pól Q dostaneme tak, že v bodě P narýsujeme poláru $q \perp OP$. Její průsečíky



Obr. 50

s kružnicí k označíme T_1 a T_2 a v nich sestrojíme tečny ke kružnici k. Průsečík těchto tečen leží na přímce h a je vnějším pólem Q. Popsanou konstrukci nyní zopakujeme pro bod $P_1 \neq P$ zvolený na přímce q uvnitř kružnice k. Bodem P_1 vedeme kolmici na přímku OP_1 a ta protne kružnici k v bodě T_3. Tečna kružnice k v bodě T_3 se protne s přímkou OP_1 v bodě Q_1 vně kružnice k.

Trojúhelníky $\triangle OT_1Q$ a $\triangle OT_3Q_1$ jsou podle konstrukce pravoúhlé. Platí proto podle věty Euklidovy:

$$OP.OQ = OT_1^2 = r^2,$$
$$OP_1.OQ_1 = OT_3^2 = r^2,$$

takže

$$OP.OQ = OP_1.OQ_1 \text{ a také } OP : OP_1 =$$
$$= OQ_1 : OQ. \qquad (1.37)$$

Trojúhelníky $\triangle OPP_1$ a $\triangle OQ_1Q$ mají ještě společný úhel $\sphericalangle POP_1 \equiv \sphericalangle Q_1OQ$, takže podle (1.37) a věty *sus* o podobnosti trojúhelníků jsou podobné. Protože $\triangle OPP_1$ je pravoúhlý, je také $\triangle OQ_1Q$ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu Q_1.

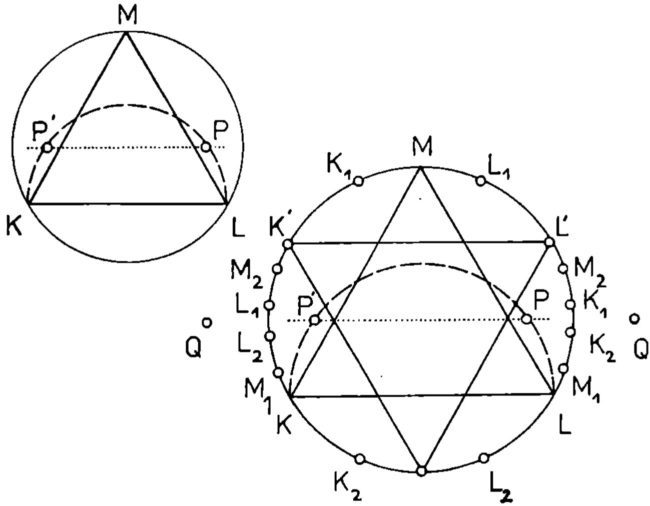
Dospěli jsme k závěru:

Hledanou množinou všech pólů Q je oblouk Thaletovy kružnice sestrojené nad průměrem $\overline{OQ}$, přičemž oblouk $\widehat{T_1OT_2}$ není částí této množiny.

Příklad 2. Je dán rovnostranný $\triangle KLM$. Sestrojte čtveřici trojúhelníků podle věty 12 z relací $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{q}$ podle sdružených pólů P a Q tak, aby vnější pól Q ležel na přímce rovnoběžné se stranou KL daného trojúhelníku a přímky KK_1 a LL_1 byly navzájem kolmé!

a) *Rozbor* (obr. 51). Protože $\triangle KLM$ z hledané čtveřice je dán, jde o to, abychom správně určili podle podmínek úlohy polohu aspoň jednoho z dvojice sdružených pólů. Víme, že oba póly leží na přímce $h \parallel KL$ jdoucí středem kružnice $\triangle KLM$ opsané. Přímky KK_1 a LL_1 procházejí pólem P. Protože mají být navzájem kolmé, bude $\sphericalangle KPL = 90°$. Zřejmě tedy leží pól P na Thaletově kružnici opsané nad průměrem $\overline{KL}$ a úloha bude mít nanejvýš dvě řešení. Jakmile známe polohu pólu P, je hledaná čtveřice trojúhelníků jednoznačně určena a můžeme ji sestrojit (obr. 51 vlevo).

b) *Konstrukce* (obr. 51 vpravo). Podle zadání sestrojíme kružnici k a vepíšeme do ní rovnostranný trojúhel-



Obr. 51

ník KLM. Jejím středem O vedeme přímku $h \parallel KL$ a nad průměrem $\overline{KL}$ opíšeme oblouk Thaletovy kružnice. Jeho průsečíky s přímkou h označíme P a P'. Příslušné vnější póly Q a Q' ani sestrojovat nemusíme; využijeme souměrnosti hledaných útvarů podle osy h. Především narýsujeme $\triangle K'L'M'$ souměrně sdružený s $\triangle KLM$ podle osy h. Všechny ostatní vrcholy hledaných trojúhelníků $\triangle K_1L_1M_1$ a $\triangle K_2L_2M_2$ určíme pomocí pólů P a P'.

c) *Důkaz.* Konstrukce je provedena podle věty 12 a podle definic 1 a 2. Tím je její správnost prokázána.

d) *Diskuse.* Již v rozboru jsme naznačili, že úloha může mít nanejvýš dvě řešení, protože přímka h a oblouk Thaletovy kružnice nad průměrem $\overline{KL}$ mohou mít nanejvýš dva společné body. Označme velikost úsečky $KL = a$. Potom poloměr Thaletovy kružnice má velikost $\frac{a}{2}$. Vzdálenost přímky h od středu úsečky KL je rovna třetině výšky rovnostranného trojúhelníku, tj. $\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}.\sqrt{3} = \frac{1}{6}.1{,}73\ldots \doteq 0{,}29\,a$, což je méně než $\frac{a}{2}$. Thaletova kružnice proto protne přímku h právě ve dvou bodech, takže úloha má dvě a jenom dvě řešení. Obě dvě čtveřice trojúhelníků ovšem mají dvojici $\triangle KLM$ a $\triangle K'L'M'$ společnou.

Příklad 3. Je dán $\triangle ABC$ [$r = 4$ cm; $\gamma = 60°$; $v_c = 5$ cm; $AC > BC$]. Sestrojte dvojici $\triangle A_1B_1C_1\ \boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{q}\ \triangle A_2B_2C_2$ podle sdružených pólů P a Q, jejichž vzdálenost $PQ = 6$ cm a pól P je na ose $\sphericalangle BAC$ uvnitř $\sphericalangle BOC$ tak, aby daný trojúhelník byl střední složkou složené relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$.

Řešení. Tuto úlohu vyřešíme nejdříve algebraicky. Podle (1.27) je $OP.OQ = r^2$ a také $OQ = OP + PQ$. Po dosazení do prvního výrazu dostáváme kvadratickou rovnici: $\overline{OP}.(\overline{OP} + \overline{PQ}) = r^2$ a po úpravě: $\overline{OP}^2 + \overline{OP}.\overline{PQ} - r^2 = 0$.

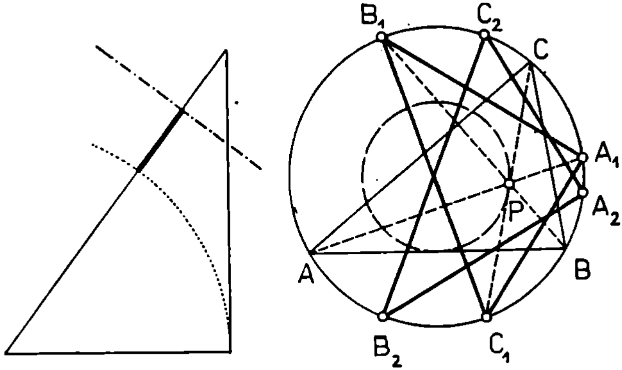
Tato rovnice má dva kořeny

$$\overline{OP}_{1.2} = \frac{-\overline{PQ} \pm \sqrt{\overline{PQ}^2 + 4r^2}}{2},$$

z nichž vyhovuje právě ten, který je kladný.

Příslušná pomocná konstrukce je provedena na obr. 52 vlevo, kde $\triangle PQM$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu Q a kde $\overline{QM} = 2r = 8$ cm, $\overline{PQ} = 6$ cm. Dále je $\overline{PQ'} = \overline{PQ}$ a podle Pythagorovy věty

$$PM = \sqrt{PQ^2 + 4r^2}.$$



Obr. 52

Protože $\overline{Q'M} = \overline{PM} - \overline{PQ}$, je $MN = \frac{1}{2}$ $(\overline{PM} -$

$- \overline{PQ}) = \overline{OP}$.

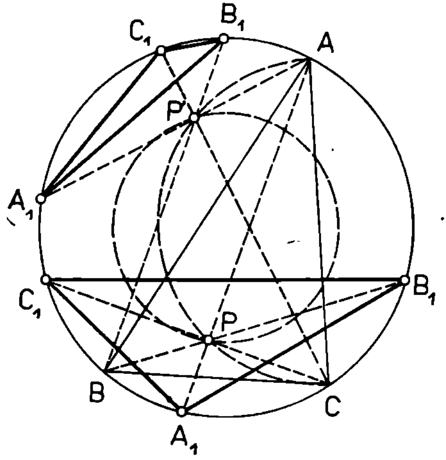
Nyní provedeme vlastní konstrukci (obr. 52 vpravo): Opíšeme-li kolem středu O kružnici poloměrem $\overline{OP}$, protne osu $\sphericalangle BAC$ ve dvou bodech P_1 a P_2, z nichž podmínkám úlohy vyhovuje právě bod P_1, protože leží uvnitř úhlu BOC. Další postup konstrukce je nasnadě.

Příklad 4. Je dán $\triangle ABC$ $[a = 6,\ r = 5,\ \beta = 60°]$. Sestrojte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC$ **p** $\triangle A_1B_1C_1$ podle pólu P, jehož mocnost ke kružnici $\triangle ABC$ opsané má hodnotu 16, a to tak, aby $\sphericalangle A_1B_1C_1$ měl velikost $\beta' = 30°$.

a) *Rozbor.* Především vidíme, že velikost strany AC je dána velikostí poloměru r a příslušného obvodového úhlu ABC. Množinou všech pólů P bude oblouk kružnice takový, že $\sphericalangle APC = \beta + \beta' = 90°$.

Dále je podle (1.28) $r^2 = 16 + \overline{OP}^2$. Dosadíme-li podle zadání $r = 5$, dostaneme velikost vzdálenosti pólu P od středu kružnice opsané $\overline{OP} = 3$ (obr. 53).

b) *Konstrukce.* Sestrojíme nejdříve kružnici opsanou, tětivu BC a $\sphericalangle ABC$. Nad tětivou AC jako nad průměrem opíšeme oblouk Thaletovy kružnice a kolem středu O kružnici poloměrem $\overline{OP} = 3$.



Obr. 53

Oblouky, které jsou množinami všech pólů P daných vlastností, se protly ve dvou bodech a to jsou hledané póly. Další postup určuje definice 1.

c) *Důkaz* vyplývá z rozboru a popisu konstrukce.

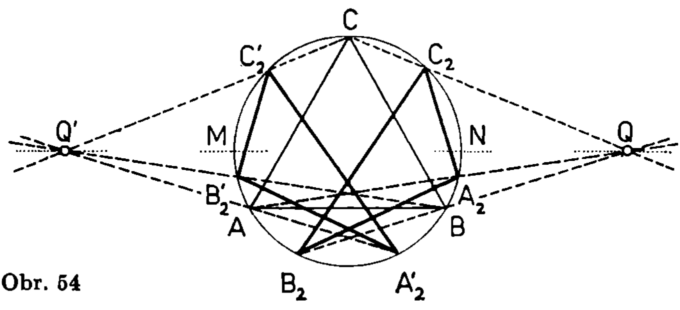
d) *Diskuse.* Počet řešení jsme mohli stanovit ještě před provedením konstrukce výpočtem. Protože jde o průsečíky dvou kružnic, musí o jejich poloměrech a středné platit:

$$r_1 + r_2 \geqq c \geqq |r_1 - r_2|.$$

V daném případě je $r_1 = 3$, $r_2 = 4{,}3$; $c = 2{,}5$. Tyto hodnoty splňují nerovnosti v uvedeném vztahu, takže úloha má právě dvě řešení.

Příklad 5. Do kružnice $k = (O; 3)$ vepište rovnostranný $\triangle ABC$. Sestrojte dvojici $[\triangle A_2B_2C_2\ \mathbf{q}\ \triangle ABC]$ podle pólu Q, který leží na přímce rovnoběžné se stranou AB daného trojúhelníku a platí-li o vzdálenosti pólu P sdruženého s daným pólem Q od středu opsané kružnice $\overline{OP} = \frac{2}{5} r$. Konstrukci však proveďte, aniž narýsujete pól P.

a) *Rozbor* (obr. 54). Podle zadání dělí bod P průměr



Obr. 54

kružnice k v poměru $\frac{PM}{PN} = -\frac{3}{7}$, kde MN je průměr rovnoběžný se stranou AB a bod P odděluje body M, O. Podle věty o sdružených pólech dělí póly P a Q průměr MN harmonicky, a proto $\frac{QM}{QN} = \frac{3}{7}$.

Tuto podmínku splňuje bod Q, o kterém platí

$$QM = \frac{3}{2} r = 4{,}5.$$

b) *Konstrukce.* Vyplývá z rozboru.

c) *Důkaz.* Je-li $OP = \frac{2}{5} r$, je $PM = \frac{3}{5} r \wedge PN = \frac{7}{5} r$.

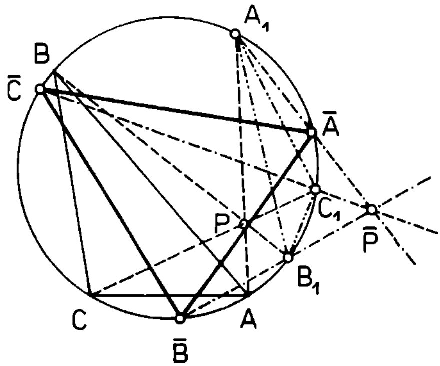
Potom $\frac{PM}{PN} = -\frac{3}{7}$, protože bod P odděluje body M a N.

Dále máme $\frac{QM}{QN} = \frac{3}{7} \wedge \overline{MN} = 2r \Rightarrow \overline{QN} = 2r + \overline{QM}$. Dosadíme-li tuto hodnotu do $\frac{QM}{QN} = \frac{3}{7}$, bude

$$\frac{QM}{2r + QM} = \frac{3}{7} \text{ a odtud } \overline{QM} = \frac{3}{2} r.$$

d) *Diskuse.* Ze zadání $OP = \frac{2}{5} r$ nevyplývá, leží-li bod P na úsečce OM nebo ON. To znamená, že úloha má ještě jedno řešení, kde $\frac{PN}{PM} = -\frac{3}{7}$. Jsou tedy dvě řešení shodná.

Příklad 6. Zvolte libovolný tupoúhlý $\triangle ABC$ s tupým úhlem při vrcholu C a opište mu kružnici k. Potom narýsujte $\triangle A_1B_1C_1$ z relace $\triangle ABC\ \mathbf{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle pólu P, který leží v polorovině $\overrightarrow{ABC}{}^*$ a $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ z relace $\triangle A_1B_1C_1\ \overline{\mathbf{p}}\ \triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ podle věty 13. Přímky $A_1\overline{A}$, $B_1\overline{B}$ a $C_1\overline{C}$ se protínají v bodě $\overline{P}$, který leží vně kružnice k. Zdůvodněte, proč tomu tak je!



Obr. 55

Řešení (obr. 55). Přímky uvedené v zadání procházejí bodem $\overline{P}$ podle věty 13. To nemusíme znovu zdůvodňovat. Podstata úlohy tedy spočívá v tom, že máme dokázat, že jde o bod ležící ve vnější oblasti kružnice k, neboli že podle věty 10 jsou trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ opačného smyslu.

Z konstrukce vyplývá: $A\overline{A} \parallel B_1C_1 \wedge B\overline{B} \parallel A_1C_1$.

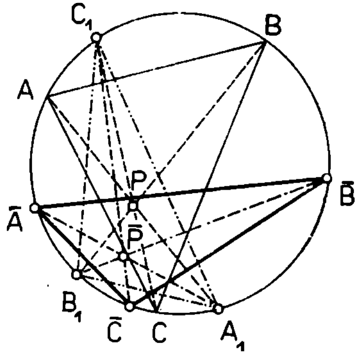
Mají proto lichoběžníky $A\overline{A}C_1B_1$ a $B\overline{B}C_1A_1$ společný vrchol C_1, takže přímky C_1C a $C_1\overline{C}$ oddělují body A a B

i body A_1 a B_1. Při konstrukci podle věty 13 nutně padne bod $\bar{A}$ do poloroviny $\overrightarrow{CC_1A}*$ a bod $\bar{B}$ do poloroviny $\overrightarrow{CC_1B}*$. Tím se pořadí vrcholů $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ oproti pořadí vrcholů $\triangle ABC$ změní, takže tyto trojúhelníky jsou opačného smyslu. Protože trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle$ $\triangle A_1B_1C_1$ jsou téhož smyslu, budou i trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ smyslu opačného a to jsme právě potřebovali dokázat.

Příklad 7. Je dán tětivový pětiúhelník $\bar{A}AC_1B\bar{B}$ vepsaný do kružnice $k = (O;\ 4\ \text{cm})$ takový, že $\bar{A}A = 3$ cm, $AC_1 = 2$ cm, $C_1B = 4{,}5$ cm a $B\bar{B} = 4$ cm. Na kružnici k určete body A_1, C, $\bar{C}$ a B_1 tak, aby platilo

$$\triangle ABC\ \mathbf{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\mathbf{p}}\ \triangle\bar{A}\bar{B}\bar{C} \text{ podle } P.$$

Řešení (obr. 56). Podle věty 13 bude $A_1C_1 \parallel B\bar{B}$ a $B_1C_1 \parallel A\bar{A}$. Přímky AA_1 a BB_1 se protnou v bodě P,



Obr. 56

přímky $\bar{A}A_1$ a $\bar{B}B_1$ v bodě $\bar{P}$. Potom přímka C_1P protne kružnici k v bodě C a přímka $C_1\bar{P}$ v bodě $\bar{C}$.

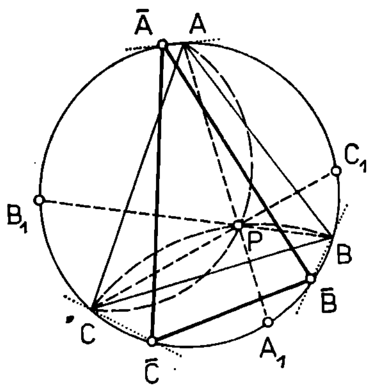
Příklad 8. Do kružnice $k = (O;\ 4\ \text{cm})$ vepište $\triangle ABC$ s vnitřními úhly velikosti $\alpha = 57°$, $\beta = 69°$ a $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ s vnitřními úhly velikosti $\bar{\alpha} = 36°$, $\bar{\beta} = 78°$, a to tak, aby tyto trojúhelníky byly v relaci $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Rozbor. Složená relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p} \circ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ vznikla z relací $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podle věty 13. Musíme proto nejdříve určit velikosti vnitřních úhlů společné složky $\triangle A_1B_1C_1$ v hledané složené relaci. Užijeme při tom věty 14, podle které je:

$$\bar{\alpha} = 180° - (\alpha + \alpha') \text{ a po dosazení}$$

$$36° = 180° - (57° + \alpha'),$$

takže $\alpha' = 87°$.



Obr. 57

$$\bar{\beta} = 180° - (\beta + \beta') \text{ a po dosazení}$$

$$78° = 180° - (69° + \beta'),$$

takže $\beta' = 33°$.

Konstrukce. Známe-li velikosti vnitřních úhlů $\triangle A_1B_1C_1$, sestrojíme dvojici $\triangle ABC$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle A_1B_1C_1$ užitím věty 4 a potom i trojúhelník $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ užitím věty 13.

Konstrukce je provedena na obr. 57.

Cvičení

1. Je dána kružnice $k = (O; 34 \text{ mm})$, její tětiva $A_2B_2 = 45$ mm a pól Q [$QB_2 \perp A_2B_2 \wedge QB_2 = 50$ mm]. Víte-li, že úsečka A_2B_2 je stranou $\triangle A_2B_2C_2$ ze složené relace $\triangle A_1B_1C_1$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle ABC$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_2$, kde $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$, narýsujte:
   a) příslušný pól P a strany AB, A_1B_1,
   b) umístěte vrchol C tak, aby bylo $C_1 \equiv C_2$ a vrchol C ležel na menším oblouku $\widehat{AB}$ kružnice opsané.
2. Úsečka $KL = 5{,}5$ cm je stranou $\triangle KLM$ vepsaného do kružnice $k = (O; 3{,}6)$ na níž leží bod M_1 [$KM_1 = 6$], který je vrcholem $\triangle K_1L_1M_1$ z relace $\triangle KLM$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle K_1L_1M_1$. Dále je dán pól Q [$KQ = 10$, $LQ = 5$]. Narýsujte trojici trojúhelníků $\triangle K_1L_1M_1$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle KLM$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle K_2L_2M_2$ podle sdružených pólů P a Q.
3. Narýsujte dvojici $\triangle EFG$, $\triangle E_2F_2G_2$ [$EF = 4{,}2$; $\sphericalangle GEF = 42°$; $\sphericalangle GFE = 100°$; $\sphericalangle E_2G_2F_2 = \sphericalangle G_2E_2F_2 = 40°$]. *Návod.* Protože pól Q padne daleko mimo nákresnu, sestrojte nejdříve $\triangle E_1F_1G_1$ podle sdruženého pólu P.]
4. Leží-li pól Q na prodloužení strany AB trojúhelníku ABC za bod B, potom přímka obsahující stranu A_1B_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ ze složené relace $\triangle A_1B_1C_1$ $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ $\triangle A_2B_2C_2$ podle sdružených pólů P, Q prochází pólem Q. Dokažte!
5. Nechť v složené relaci $\triangle K_1L_1M_1$ $\boldsymbol{p}$ $\triangle KLM$ $\boldsymbol{q}$ $\triangle K_2L_2M_2$ je $\triangle K_1L_1M_1 \cong \triangle K_2L_2M_2$ a příslušný pól P leží na straně AB. Potom strana A_2B_2 prochází pólem P. Dokažte!
6. Pravoúhlý $\triangle EFG$ s pravým úhlem při vrcholu F je vepsán do kružnice $k = (O; 3)$ a současně je $EF = 4$. Sdru-

žené póly P a Q leží na přímce h jdoucí středem O tak, že $h \equiv \overleftrightarrow{EG}$, $OP = 1$. Narýsujte dvojici $\triangle E_1F_1G_1$ **p** ∘ **q** $\triangle E_2F_2G_2$ podle daných pólů, aniž sestrojíte pól Q.

7. O dvojici trojúhelníků $\triangle K_1L_1M_1$ [$K_1L_1 = 8$; $L_1M_1 = 6$; $M_1K_1 = 5{,}5$] a $\triangle K_2L_2M_2$ víme, že mají společnou kružnici opsanou, vrchol K_2 půlí menší oblouk L_1M_1 a jsou nepřímo shodné ($\triangle K_1L_1M_1 \cong \triangle K_2L_2M_2$). Umístěte tyto trojúhelníky tak, aby byly v relaci **p** ∘ **q** podle pólu, jehož vzdálenost od vrcholu K_1 je $d = 5{,}2$.
8. Je dán $\triangle OAQ$, kde O je střed kružnice opsané $\triangle ABC$, bod A jeho vrchol a bod Q vnější pól. Sestrojte sdružený vnitřní pól a proveďte diskusi!
9. V trojúhelníku ROP je R vrchol $\triangle RUZ$, O střed kružnice $\triangle RUZ$ opsané a P vnitřní pól. Sestrojte sdružený vnější pól Q a proveďte diskusi!
10. Vrchol A daného $\triangle APQ$ je vrcholem $\triangle ABC$ a vrcholy P a Q sdruženými póly z relace $\triangle A_1B_1C_1$ **p** ∘ **q** $\triangle A_2B_2C_2$. Sestrojte body A_1 a A_2 a proveďte diskusi.
11. Je dán $\triangle ALM$. Sestrojte $\triangle ABC$ tak, aby přímka LM byla osou jeho strany BC a body L, M ležely na přímkách CA a CB. Proveďte diskusi!
12. Vrcholy $\triangle E_1E_2E$ jsou vrcholy trojúhelníků $\triangle E_1F_1G_1 \cong \triangle E_2F_2G_2$ ze složené relace **p** ∘ **q**. Sestrojte příslušné póly P a Q a proveďte diskusi!
13. Narýsujte $\triangle EF_1G_2$ [$EF_1 = 3$; $F_1G_2 = 3{,}5$; $\sphericalangle EF_1G_2 = 100°$] a kružnici jemu opsanou. Nechť E je vrchol $\triangle EFG$, F_1 vrchol $\triangle E_1F_1G_1$ a G_2 vrchol $\triangle E_2F_2G_2$ ze složené relace **p** ∘ **q** podle sdružených pólů P a Q. Určete polohu pólů P a Q tak, aby $\triangle EFG$ byl pravoúhlý rovnoramenný a $\sphericalangle E_2G_2F_2$ měl velikost 130°. Předem stanovte počet řešení a potom některé narýsujte.
14. Vyšetřete množinu všech vnitřních pólů P, jestliže s ním sdružený pól Q vzhledem k dané kružnici probíhá přímku q kolmou na přímku PQ jdoucí bodem Q.
15. Do kružnice $k = (O; 5)$ umístěte tětivu $AA_1 = 9$. Na této tětivě určete pól P takový, aby bylo $\overline{AP}.\overline{A_1P} = 16$.
16. Do kružnice $k = (O; 4{,}5)$ umístěte tětivu $KK_2 = 7$. Na přímce KK_2 určete pól Q tak, aby bylo $\overline{QA}.\overline{QA_2} = 25$.
17. V dané kružnici $k = (O; 32\text{ mm})$ leží vnitřní pól P ve vzdálenosti $OP = 20$ mm od středu kružnice. Určete polohu sdruženého pólu Q.

18. V dané kružnici $k = (O; 42 \text{ mm})$ určete polohu pólu P tak, aby k němu sdružený vnější pól byl od středu O vzdálen 73 mm.
19. Narýsujte čtyřúhelník $KLQP$, kde $KL = 4$ je strana $\triangle KLM$, $LQ = 8$, $\sphericalangle KLQ = 135°$, $\sphericalangle LQP = 25°$ a body P, Q jsou sdružené póly vzhledem ke kružnici opsané $\triangle KLM$.
Potom určete polohu bodu M tak, aby trojúhelníky $\triangle K_1L_1M_1$, $\triangle K_2L_2M_2$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ podle daných pólů P a Q byly pravoúhlé s přeponami $K_1M_1 = K_2M_2$.
20. Je dána přímka h a na ní body P a Q [$PQ = 8$]. Vrchol A_1 [$PA_1 = 2{,}7$; $QA_1 = 6{,}6$] patří trojúhelníku z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P, kde $\triangle ABC$ je rovnostranný. Sestrojte $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ tak, aby body P a Q tvořily dvojici sdružených pólů vzhledem ke kružnici opsané $\triangle ABC$.
21. Na dané přímce h leží body P a Q [$PQ = 7$ cm]. Dále je dán bod $K \equiv K_2$, který je společným vrcholem trojúhelníků z dvojice $\triangle KLM\ \boldsymbol{q}\ \triangle K_2L_2M_2$ podle Q a $PK = 2{,}8$ cm. Sestrojte trojici $\triangle K_1L_1M_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle KLM\ \boldsymbol{q}$ $\boldsymbol{q}\ \triangle K_2L_2M_2$ tak, aby body P, Q tvořily dvojici sdružených pólů a současně bylo $K_1L_1 = L_1M_1 = 4$ cm.
22. Vrcholy trojúhelníků $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ ze složené relace $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q}$ podle sdružených pólů P a Q leží na společné kružnici opsané tak, že tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Přitom není žádný vrchol šestiúhelníku vynechán. Příslušný $\triangle ABC$ má velikosti stran v poměru $4 : 5 : 6$. Stanovte nejdříve počet řešení a potom některé narýsujte!
23. Je dán $\triangle EFG$ [$EF = 8{,}5$; $FG = 6{,}4$; $GE = 5{,}2$]. V složené relaci $\triangle E_1F_1G_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle EFG\ \boldsymbol{q}\ \triangle E_2F_2G_2$ je $\triangle E_1F_1G_1$ rovnostranný a $\triangle E_2F_2G_2$ pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu E_2. Sestrojte!
24. Narýsujte trojici $\triangle K_1L_1M_1\ \boldsymbol{p}\ \triangle KLM\ \boldsymbol{q}\ \triangle K_2L_2M_2$ podle P a Q tak, aby všechny tři trojúhelníky byly pravoúhlé rovnoramenné s pravými úhly při vrcholech K, L_1, M_2.
25. Na kružnici $k = (O; 4)$ zvolte body A, $\overline{A}$, C, $\overline{C}$, $\overline{B}$, B v tomto pořadí a potom sestrojte trojici $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}\ \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle ABC$.
26. Na kružnici $k = (O; 4{,}5)$ zvolte body A, $\overline{B}$, $\overline{A}$, B, $\overline{C}$, C v uvedeném pořadí a potom sestrojte trojici $\triangle \overline{A}\overline{B}\overline{C}\ \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \overline{\boldsymbol{p}}\ \triangle ABC$.

27. Je-li $\alpha' = 37°48'12''$, $\beta = 79°32'56''$, $\bar{\gamma} = 103°14'42''$, $\gamma = 12°46'27''$, udejte velikosti zbývajících vnitřních úhlů z trojice $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

28. Jsou dány velikosti úhlů $\alpha = 56°24'$, $\beta' = 108°32'$, $\bar{\gamma} = 49°43'$. Zvolte ještě velikost úhlu α' tak, aby trojice (α, β, γ); $(\alpha', \beta', \gamma')$; $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma})$ byly vnitřními úhly z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1\ \bar{\boldsymbol{p}}\ \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Můžeme tuto velikost α' volit libovolně?

29. Vyšetřete množinu všech pólů Q sdružených s pólem P, který probíhá oblouk nad úsečkou AB s obvodovým úhlem $\sphericalangle APB = \gamma + \gamma'$, jsou-li γ a γ' velikosti vnitřních úhlů trojúhelníků z relace $\triangle ABC\ \boldsymbol{p}\ \triangle A_1B_1C_1$ podle P.

30. Opakujte úlohu 29 pro množinu pólů P sdružených s pólem Q, který probíhá oblouk nad úsečkou AB s příslušným obvodovým úhlem $\sphericalangle AQB = \gamma - \gamma'$.