Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách

Část první. Shodná zobrazení v konstrukčních úlohách

ČÁST PRVNÍ

Shodná zobrazení v konstrukčních úlohách

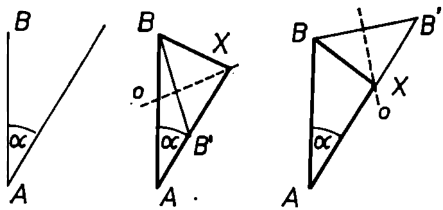
KAPITOLA I

NĚKOLIK ÚLOH ÚVODEM

Ve škole se učíte řešit konstrukční úlohy. Jsou to ty úlohy, jež vyžadují sestrojení jistého útvaru, který vyhovuje daným podmínkám. Řešení úlohy zpravidla zakončujete grafickým sestrojením hledaného útvaru. Uvědomili jste si však, že v praktickém životě nebývá cílem jen nakreslení hledaného útvaru, ale především zjištění jeho rozměrů a polohy? Proto také praktik potřebuje řešení konstrukční úlohy především tehdy, chce-li bez nákladného nebo zdlouhavého experimentování zjistit rozměry a polohu tělesa, které je třeba umístit podle daných podmínek. Vezměme si příklad, ve kterém jde o zjištění délky cesty.

Příklad 1. *Jirka s Milanem se vypravili na výlet. Do stanice* A *jeli vlakem, od ní se vydali pěšky přímo k rozhledně na obzoru. Šli dlouho lesem. Když vyšli z lesa ven, viděli, že se žene bouře. Chtěli se vrátit, ale člověk, kterého potkali, jim ukázal směr do vesnice* B, *kam je o tři kilometry blíže než na stanici* A. *Před vesnicí si Milan všiml směrové tabule, na níž bylo udáno, že vzdálenost z* B *do* A *je osm kilometrů. Zpátky na stanici* A *se svezli autobusem po přímé silnici. Doma se nemohli dohodnout, kolik kilometrů vlastně ušli. Jak byste je rozsoudili, kdybyste odhadli, že jejich cesta od stanice* A *k rozhledně se odchylovala od přímé silnice z* A *do* B *o* 30°?

Jistě vás napadne nakreslit si ve zvoleném měřítku plánek. Dospějete asi k obr. 1a, kde α označuje úhel o velikosti 30°. Nemůžete však zakreslit bod X, který by odpovídal místu, v němž změnili směr. Přitom je nutné znát bod X, chceme-li z náčrtku odměřit délku úseček AX, XB. Musíme tedy řešit úlohu na sestrojení trojúhelníku ABX. Co o něm víme? Je zřejmě $AB = 8$, $\alpha = 30°$, $AX - BX = 3$.*) Formulujme si příslušnou geometrickou úlohu:



Obr. 1 a, b, c

Sestrojte aspoň jeden trojúhelník ABX, je-li dáno $AB = 8$, $\sphericalangle BAX = 30°$, $AX - BX = 3$.

Je tedy dána velikost strany, úhlu k ní přilehlého a rozdílu dvou dalších stran trojúhelníku. Postupujme tak, jak jste zvyklí řešit konstrukční úlohu. Nakresleme si libovolný trojúhelník ABX (obr. 1 b). Vyznačme si v něm na polopřímce AX úsečku $AB' = AX - BX$. Trojúhelník ABB' lze sestrojit, protože známe jeho úhel BAB' a strany ležící na jeho ramenech. Jak sestrojíme bod X, střed otáčení, které převedlo bod B v bod

*) Někoho z vás možná napadlo, že je vhodné užít hyperboly s ohnisky A, B. Je to možné, ale málo přesné a zdlouhavé.

B'? Zřejmě jako průsečík osy úsečky BB' a přímky AB'. Proveďte si konstrukci bodu X sami a rozhodněte spor Jirky s Milanem.

Protože úloha je vzata ze skutečnosti, kde místo X opravdu existovalo, má jistě řešení. Dosáhli jsme cíle, pokud jde o zodpovězení otázky v úloze. Zamysleme se však nad *matematickou úlohou*, ke které jsme došli. Co myslíte, má úloha vždy řešení, ať zvolíme úsečky AB, $AX - BX$ a úhel α jakkoliv?

Provedeme *diskusi*, řeknete si jistě. Sestrojení trojúhelníku ABB' je jednoznačné*) a vždy možné. Osu o úsečky BB' lze jistě také sestrojit jednoznačně. Nejistá je pouze existence bodu X. Přímka o protne přímku AB' vždy, pokud není $BB' \perp AB'$, tj. $AB' = AB . \cos \alpha$. Je-li $AB' \neq AB . \cos \alpha$, existuje vždy právě jeden průsečík X přímek o a AB'.

Na obr. 1 c je zobrazen trojúhelník ABX sestrojený podle postupu, který jsme odvodili. Je zřejmě $\sphericalangle BAX = \alpha$, AB má danou velikost, ale úsečka AB' není rozdílem úseček AX, BX, ale jejich součtem. Sestrojili jsme sice *trojúhelník* ABX, ale ten *nemá požadované vlastnosti*.

Na co jsme zapomněli při řešení? Vynechali jsme zřejmě *zkoušku výsledku konstrukce*. Vidíte, jak ošidná může být fráze „to plyne z rozboru“! Buďte si vědomi toho, že zkouška výsledku konstrukce je ve skutečnosti nejdůležitější částí řešení. Ověřuje, zda konstrukce, kterou jsme odhadli podle rozboru, vede k cíli, tj. k sestrojení útvaru, který má požadované vlastnosti. Je obdobou zkoušky, kterou provádíte při řešení algebraických úloh.

---

*) Trojúhelníků ABB' lze sestrojit nekonečně mnoho, jsou však všechny navzájem shodné.

Vraťme se k obr. 1b, c. K tomu, aby úsečka AB' byla shodná s rozdílem $AX - BX$, je zřejmě nezbytné, aby bod X ležel za bodem B' na polopřímce AB'. Zdůvodněte, že tento případ nastane právě tehdy, když je úhel $AB'B$ tupý, tj. $AX - BX < AB \cdot \cos \alpha$.

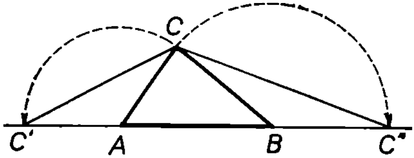
Příklad 2. *Letadlo přeletělo z letiště A na letiště B ležící 200 km severněji. Pilot změnil směr letu pouze jednou, z letiště A letěl po polopřímce svírající s polopřímkou AB úhel o velikosti α. Podle spotřeby pohonných hmot bylo zjištěno, že uletěl 300 km. Zjistěte vzdálenost letišť A, B od místa X, nad kterým letadlo změnilo směr letu.*

Úloha vede zřejmě ke konstrukci trojúhelníku ABX, je-li známa jeho strana AB, $\sphericalangle XAB = \alpha$ a součet úseček AX, BX. Zakreslete si pro zajímavost na svém náčrtku několik bodů X, nabývá-li α různých hodnot.

Ukažme si nyní, že je užitečné pokusit se při řešení geometrické úlohy o nalezení praktického problému, který vede k uvažované úloze.

Příklad 3. *Jsou dány úsečky p, v_c a úhel α. Sestrojte alespoň jeden trojúhelník ABC, pro který platí: $AB + BC + CA = p$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, vzdálenost bodu C od přímky AB je rovna v_c.*

Řešení úlohy možná znáte. Provádí se obvykle tak, že se úsečky AC, BC otočí do poloh AC', BC'' na přímce AB (obr. 2). V trojúhelníku $CC'C''$ je $C'C'' = p$, $\sphericalangle CC'C'' = \frac{\alpha}{2}$, jeho výška je rovna v_c. Tento trojúhelník dovedete sestrojit; body A, B pak zjistíte pomocí os úseček CC', CC''.



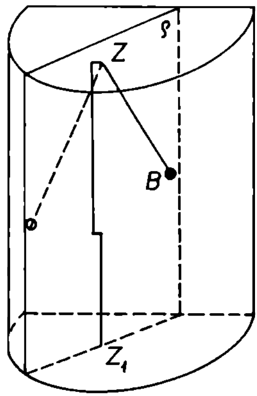
Obr. 2

Jestliže se však nepustíte ihned do mechanického řešení úlohy, ale představíte si, kdy by bylo třeba takovou úlohu řešit, přijdete na jednodušší řešení.

Takovým problémem by bylo postavení trojúhelníkové ohrádky, máte-li k dispozici prkno, které je třeba rozřezat na takové tři díly, aby každý z nich byl stranou trojúhelníku s prvky α, v_c. V praxi bychom si jistě nejprve vytyčili úhel α a na jeho rameni bod C, který má od druhého ramene vzdálenost v_c. Vidíte, že tím máte vyznačenu stranu AC; odřízněte ji z prkna. Nyní zbývá problém jednodušší: *sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho stranu $b = AC$, úhel α a úsečku shodnou se součtem dvou zbývajících stran.* Tuto úlohu již umíte řešit z příkladu 2. Proveďte si úplné řešení úlohy; víte, že skrývá úskalí ve zkoušce výsledku konstrukce. Z úlohy si můžete odnést poučení, že bývá mnohdy užitečné umístit při řešení nepolohových úloh úhel. Vyhnete se tak jeho sestrojování v průběhu konstrukce, často i zjednodušíte řešení.

V příkladech 1 až 3 jsme používali zobrazení jen minimálně. Ukažme si nyní dvě úlohy, ve kterých má zobrazení podstatný význam.

Příklad 4. *V uzavřené skleněné skříni, která má tvar půlválce* (obr. 3), *je na stojanu zavěšeno matematické* *kyvadlo. Bod závěsu kyvadla je nad bodem Z_1 podlahy skříně. Stanovte rovinu, v níž se kyvadlo pohybuje v případě, že se hmotný bod v krajních polohách kyvu dotýká stěn skříně.**)



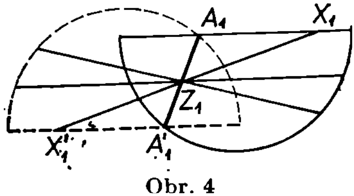
Obr. 3

Řešení. Sestrojme si půdorys skříně a v něm vyznačme kolmý průmět Z_1 bodu závěsu kyvadla do roviny podlahy (obr. 4). Polohy hmotného bodu B při maximálních výchylkách označme A, A', jejich průměty A_1, A_1'. Je zřejmě $Z_1A_1 = Z_1A_1'$. Řešení naší úlohy vyžaduje řešení této geometrické úlohy:

Je dán půlkruh a jeho vnitřní bod Z_1. Sestrojte úsečku A_1A_1' tak, aby bod Z_1 byl jejím středem a body A_1, A_1' ležely na hranici půlkruhu.

---

*) Hmotný bod se neodráží od stěn, ale vrací se od nich samovolně po dotyku bez rázu.



Obr. 4

Jak by postupoval praktik, který by se nechtěl „zdržovat“ geometrickým řešením? Nepochybně by zkoušel, odhadl by přibližnou polohu hledané roviny kyvu, rozkýval kyvadlo a sledoval, zda se hmotný bod dotkne stěn.

Při geometrickém řešení můžeme také začít experimentem. Zvolme bod X_1 hranice půlkruhu, považujme jej za půdorys krajní polohy hmotného bodu B a přiřaďme mu bod X_1' souměrně sdružený s bodem X podle středu Z_1. Na obr. 4 jsou přiřazeny tímto způsobem souměrně sdružené body většímu počtu neoznačených bodů hranice kruhu. Co vytvářejí tyto souměrně sdružené body? Víte, že to je opět hranice půlkruhu shodného s původním, protože popsaným přiřazením sestrojujeme vlastně obraz daného půlkruhu v souměrnosti podle středu Z_1.

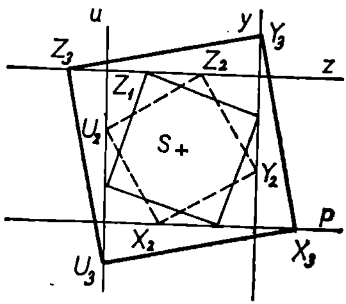
Obraz půlkruhu můžete snadno sestrojit, zobrazíte-li nejprve střed kruhu a koncový bod jeho průměru. Hledané body náležejí hranici půlkruhu a jejímu obrazu v souměrnosti podle středu Z_1. Dokončete sami řešení, nezapomeňte na zkoušku výsledku konstrukce. O jakou vlastnost středové souměrnosti se tento důkaz opírá? Kolik může mít úloha řešení?

Při řešení geometrické úlohy bylo třeba sestrojit dva neznámé body A_1, A_1'. Využili jsme předpisu, který přiřazuje neznámému bodu A_1 neznámý bod A_1'. Na řadě úloh poznáte, že tohoto obratu užíváme velmi často.

Dalším typem úloh, při jejichž řešení je vhodné užít zobrazení, jsou úlohy na vyšetření geometrických míst bodů. Takový postup je přirozený zvláště v těch případech, kdy předpis, podle kterého můžeme sestrojit každý bod hledané množiny, je jednoduchý a představuje známé zobrazení.

Příklad 5. *Je dána množina všech čtverců $XYZU$, jež mají společný střed S a jejichž vrchol X probíhá danou přímku. Vyšetřete, které útvary jsou množinami všech bodů Y, Z, U.*

Na obr. 5 jsou nakresleny tři čtverce dané množiny, smysl obíhání vrcholů X, Y, Z, U je vždy kladný. Nedívejte se jen na hotový obrázek, ale sestrojte si také několik čtverců. Uvědomíte si jistě, že když zvolíte bod X



Obr. 5

na p, sestrojíte vždy bod Z jako bod středově souměrný s X podle S. Každému vrcholu X čtverce lze proto přiřadit bod Z jako obraz bodu X ve středové souměrnosti. Z toho plyne, že každý bod Z leží na přímce z souměrně sdružené s přímkou p podle středu S. Každý bod přímky z je také vrcholem čtverce, jehož protější vrchol leží na p. Platí proto, že *množinou všech bodů Z je přímka $z \parallel p$.*

Jak přiřadíme bodu X vrchol Y příslušného čtverce? Zřejmě otočíme bod X kolem S o 90° v kladném smyslu. Z vlastností otáčení plyne, že *množinou všech bodů Y je přímka y kolmá k p.* Obdobně stanovíme množinu všech bodů U jako obraz přímky p v otočení o 90° v záporném smyslu.

Při řešení příkladů 4 a 5 jsme se přesvědčili, že je vhodné vyhledávat takové vztahy mezi význačnými body útvarů, které lze chápat jako důsledek jistého zobrazení. Takový přístup k řešení úloh odpovídá modernímu pojetí geometrie jako vědy zkoumající, které vlastnosti útvarů se nemění při určitých druzích transformací (zobrazení).

1. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost jeho úhlu β, výšky v_A a součtu $BC + CS + SA$ úseček trojúhelníka (bod S je středem strany AB).

2. Zvolte si v příkladu 4 skříň ve tvaru kvádru a řešte stejnou úlohu.

3. Je dána množina pravidelných šestiúhelníků $ABCDEF$ se společným vrcholem A. Víme, že množinou bodů C je kružnice neprocházející bodem A. Vyšetřte, které útvary jsou množinami vrcholů B, D, E, F šestiúhelníků.

[Popište předpisy, podle kterých sestrojíte jednotlivé vrcholy šestiúhelníka, znáte-li jeho vrchol A a zvolíte-li jeho vrchol C na dané kružnici. Užijte také otočení a stejnolehlosti.]

KAPITOLA II

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

V úlohách minulé kapitoly jsme použili středové souměrnosti a otočení. Znáte jistě i další shodná zobrazení — identitu*), osovou souměrnost a posunutí. Dříve než budeme řešit pomocí každého druhu shodnosti určité typy úloh, probereme si některé jejich společné vlastnosti.

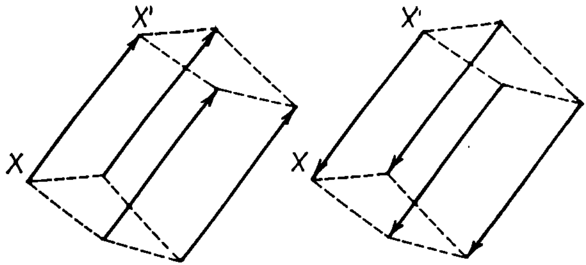
Shodné zobrazení v rovině budeme označovat velkým polotučným písmenem Z (v rukopise pište velké psací „zet"). Skutečnost, že zobrazení přiřazuje bodu X bod X', zapíšeme symbolicky $\mathsf{Z}(X \to X')$. Směr šipky je podstatný, protože přiřazení $X' \to X$ může představovat jiné zobrazení. Tak např. posunutí znázorněné na obr. 6 vlevo přiřazuje bodu X bod X'. Posunutí přiřazující bodu X' bod X**) je zřejmě inverzní (zpětné) posunutí.

Jestliže shodné zobrazení $\mathsf{Z}(X \to X')$, *nazýváme shodné zobrazení přiřazující* $X' \to X$ *inverzním vzhledem k zobrazení* Z *a označujeme je* $\mathsf{Z}^{-1}(X' \to X)$.

---

*) Identitou (totožností) rozumíme takové zobrazení v rovině, které přiřazuje každému bodu roviny týž bod. Je možné, že jste užívali termínu identita v jiném významu, v této brožuře však bude mít jen výše uvedený význam.

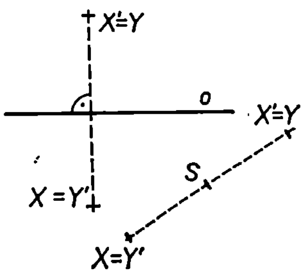
**) Obrázek vpravo má představovat tytéž body X, X' jako obrázek vlevo. Vyznačení obou šipek v témž obrázku by bylo nepřehledné.



Obr. 6

Je pozoruhodné, že zobrazení inverzní k identitě, středové a osové souměrnosti je totožné s původním zobrazením. Všimněte si na obr. 7 středu S a dvojice bodů X, X'. Bod $Y = X'$ má ve středové souměrnosti se středem S obraz Y', který splývá s bodem X. Protože tomu tak je pro všechny body roviny, je středová souměrnost se středem S totožná se zobrazením k ní inverzním. Zcela stejnou úvahu můžeme provést pro osovou souměrnost O s osou o (obr. 7).

Slyšeli jste jistě o *útvarech samodružných* v některém zobrazení. Jsou to ty útvary, které splývají se svým



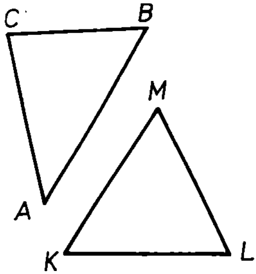
Obr. 7

obrazem v příslušném zobrazení. V otočení kolem bodu S jsou samodružné všechny kružnice se středem S, v posunutí $P(X \rightarrow X')$ jsou samodružné všechny přímky směru XX'. Každý útvar, o kterém říkáme, že je souměrný podle středu, je samodružný v souměrnosti podle tohoto středu. Přesvědčte se o tom u čtverce, kruhu, elipsy, hyperboly. Osově souměrné jsou rovnoramenné trojúhelníky, deltoidy, kružnice, elipsa, hyperbola, parabola atd. Ověřte si přitom, že útvar může být samodružný, i když žádný jeho bod není samodružný.

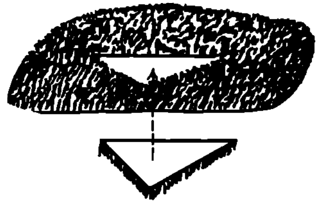
Shodnosti jste dělili na přímé a nepřímé podle toho, zda bylo třeba obracet průsvitku při přemisťování bodů roviny pomocí průsvitky. Z jmenovaných typů shodností je nepřímá pouze osová souměrnost. Na obr. 8 je zobrazen trojúhelník ABC; přesvědčte se, že se tento trojúhelník nemůže ztotožnit sám se sebou, otočíme-li průsvitku na rub. Rovnoramenný trojúhelník KLM však lze přenést tak, že se ztotožní sám se sebou, převrátíme-li průsvitku na rub. Bod K přejde v M, bod M v K, bod L je samodružný.

Na základě poznatků získaných v minulém odstavci můžete poradit kožešníkovi, který se dostal do nepříjemné situace.

Kožešník chtěl opravit poškozený kabát. Vystřihl poškozenou část kožešiny, otvor zarovnal na trojúhelník podobný trojúhelníku ACB na obr. 8. Dále chtěl vystřihnout z náhradního kousku kožešiny shodný trojúhelník, aby jej mohl vsadit do otvoru. Podložil kožešinu pod kabát, ale do srsti si nemohl vyznačit obvod trojúhelníku (obr. 9). Otočil proto kožešinu na rub a na vydělanou kůži si vyznačil hranici řezu. Pak vystřihl vyznačený trojúhelník a chystal se šít. Ať však dělal co dělal, nemohl vystřižený *trojúhelník zasadit tak, aby jeho srst zakryla otvor. Jak byste vysvětlili tuto podivnou věc a jak byste poradili kožešníkovi, který už nemá podobnou kožešinu?*

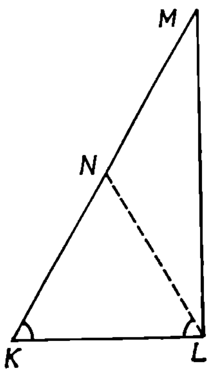


Obr. 8



Obr. 9

Otvor v kabátě a vystřižený trojúhelník jsou zřejmě nepřímo shodné, proto je nelze ztotožnit bez obracení. Vystřižený trojúhelník je třeba rozstřihnout na rovnoramenné trojúhelníky, protože ty lze ztotožnit po obrácení na rub. Řešení ukazuje obr. 10 pro pravoúhlý



Obr. 10

trojúhelník KLM. Dokažte, že trojúhelníky KLN, LMN jsou opravdu rovnoramenné. Každý trojúhelník lze složit z rovnoramenných trojúhelníků (použijte rozdělení trojúhelníka na pravoúhlé trojúhelníky).

Zůstaňme ještě krátce u zaměstnání, která pracují s jehlou. Jaký je vztah mezi kusy kůže vystřiženými do tvaru podrážky pro levou a pravou botu? Všimněte si, jak krejčí nebo švadlena vystřihuje z látky díly obleků, např. levou a pravou část zad kabátu. Jak svým postupem předcházejí tomu, abychom na jedné straně zad kabátu nenosili látku na ruby?

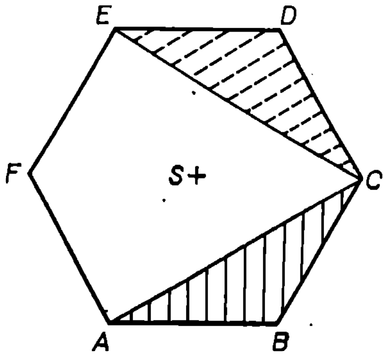
Často se ptáme, v kolika různých shodných zobrazeních je daný útvar samodružný. Každý útvar je samodružný v identitě. Nás ovšem zajímají především další shodná zobrazení. Rovnoramenný trojúhelník KLM se stranou $KL = LM$ na obr. 8 je samodružný v osové souměrnosti, která vyměňuje body K, M. Zapišme si přiřazení vrcholů trojúhelníku KLM ve zobrazeních, která jej reprodukují (ve kterých je samodružný): identita J ($K \to K$, $L \to L$, $M \to M$), osová souměrnost $O(K \to M, L \to L, M \to K)$.

Mějme dán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ (obr. 11). Počet shodných zobrazení, která jej reprodukují, je možno určovat zkusmo. Výhodnější však je užít vlastností shodných zobrazení, zejména věty o určenosti.

Jsou-li dány dva shodné trojúhelníky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, *existuje právě jedno shodné zobrazení v rovině, které přiřazuje* $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.

Je samozřejmé, že při shodném zobrazení pravidelného šestiúhelníku přejdou sousední vrcholy opět v sousední vrcholy. Počet shodností reprodukujících pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ stanovíme tak, že určíme počet trojic za sebou následujících vrcholů (trojice

DEF je různá od *FED*!), které určují trojúhelníky shodné s trojúhelníkem *ABC*. Jsou to po řadě trojice *ABC*, *BCD*, *CDE*, *DEF*, *EFA*, *FAB* a *CBA*, *DCB*,



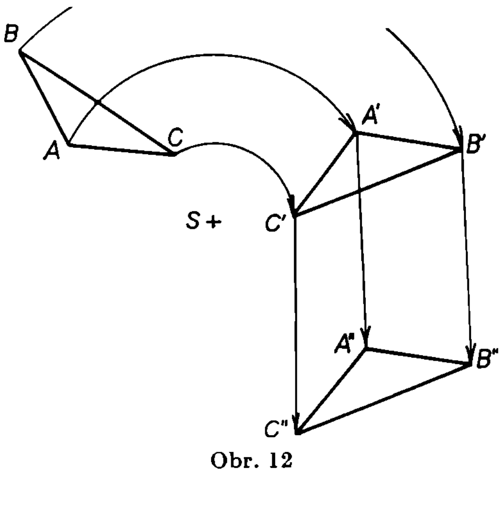
Obr. 11

EDC, *FED*, *AFE*, *BAF*, celkem dvanáct. Zapište si přiřazení příslušných vrcholů shodných trojúhelníků a určete druh shodnosti, která zobrazuje po řadě vrcholy *A*, *B*, *C* základního trojúhelníku *ABC* do bodů zvolené trojice. Vezmete-li například trojice *ABC* a *CDE*, $Z(A \to C,\ B \to D,\ C \to E)$, dostanete otočení (rotaci) o 120° v kladném smyslu. V případě, že vezmete trojici z druhé šestice, jde vždy o osovou souměrnost, stanovte její osu.

Určete počet shodností reprodukujících pravidelný n-úhelník. Kolik z nich je osových souměrností, kolik středových a kolik rotací? Proč mezi nimi není nikdy posunutí?

Sestrojíme-li útvar U′ jako obraz útvaru U v některém shodném zobrazení $Z_1(\mathrm{U} \to \mathrm{U}')$, není samozřejmě zakázáno sestrojit ještě obraz U″ útvaru U′ v dalším shodném zobrazení Z_2. Chápeme-li shodné zobrazení útvarů jako jejich přemístění, je zřejmé, že i konečný výsledek, kterého jsme dosáhli, tj. přemístění útvaru U na útvar U″, je shodným zobrazením útvaru U na útvar U″.

Na obr. 12 je zobrazen trojúhelník ABC nejprve na trojúhelník $A'B'C'$ v otočení se středem S o úhel 120° v záporném smyslu. Tento trojúhelník je pak zobrazen posunutím v trojúhelník $A''B''C''$. Je zřejmé, že existuje shodné zobrazení v rovině, které převede trojúhelník ABC přímo v trojúhelník $A''B''C''$. Na obr. 12 je tímto zobrazením otočení se středem S' o úhel 120° v záporném smyslu. Bod S' sestrojte jako průsečík os úseček AA'', BB'', CC''. O výsledném otočení říkáme, že vzniklo složením prvního otočení a uvedeného posunutí.



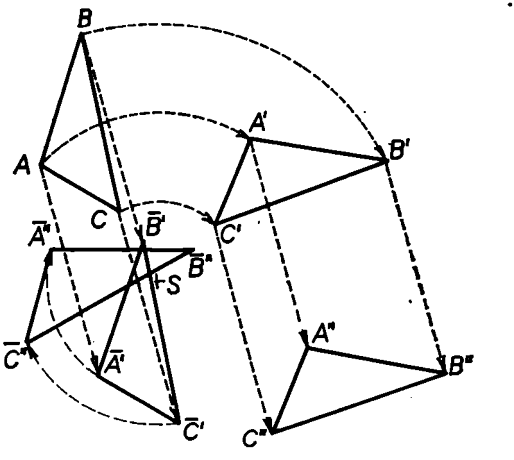
Obr. 12

Jsou-li dána dvě shodná zobrazení Z_1, Z_2 v rovině a přiřazuje-li $Z_1(X \rightarrow X')$, $Z_2(X' \rightarrow X'')$, nazýváme shodné zobrazení $Z_3(X \rightarrow X'')$ složením zobrazení Z_1, Z_2 v tomto pořadí a zapisujeme $Z_3 = Z_1 Z_2$.

Zápis $Z_3 = Z_1 Z_2$ má tvar součinu; skutečně se také někdy hovoří o součinu zobrazení. Raději si však nezvykejte na tento termín. Česká terminologie užívá termínů skládání, složení apod.

Proveďte si řadu příkladů na skládání otočení s posunutím podle obr. 12, skládejte dále dvě posunutí. Složte dvě otočení s různými středy, jejichž úhly otočení jsou navzájem opačné, dostanete posunutí.

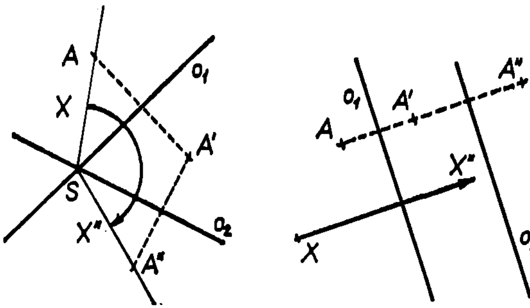
Zkuste složit zobrazení v uvedených příkladech v opačném pořadí (obr. 13). Přesvědčíte se, že obraz trojúhelníka ABC v zobrazení $Z_1 Z_2$ je jiný než obraz téhož trojúhelníka v zobrazení $Z_2 Z_1$. Při skládání dvou posunutí jsou však zobrazení $Z_1 Z_2$, $Z_2 Z_1$ totožná.



Obr. 13

Skládání zobrazení není vždy komutativní, může být $Z_1 Z_2 \neq Z_2 Z_1$.

Zatím jsme neskládali osové souměrnosti a středové souměrnosti. Přesvědčte se, že složením dvou osových souměrností O_1, O_2, jejichž osy o_1, o_2 se protínají v bodě S, je otočení kolem středu S (obr. 14). V případě že osy o_1, o_2 osových souměrností O_1, O_2 jsou rovnoběžné a různé, dostanete posunutí. Jaký je směr tohoto posunutí?

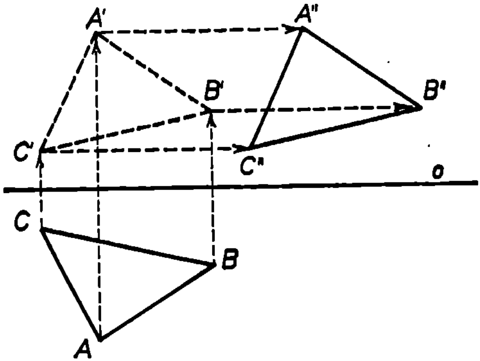


Obr. 14

Složíte-li dvě středové souměrnosti s různými středy, dostanete posunutí.

Jak vidíte, je skládání zobrazení zajímavé. Nemůžeme se bohužel zabývat hlouběji skládáním zobrazení ani obráceně rozkládáním jedné shodnosti na dvě nebo nebo tři složky. Lze dokázat, že *každé shodné zobrazení v rovině je možno vyjádřit jako zobrazení složené z osových souměrností, jejichž počet není větší než tři.*

Zkoušejte si zobrazovat trojúhelníky nebo jiné útvary v zobrazení složeném ze dvou nebo tří osových souměrností, středové a osové souměrnosti atd, Při systematickém výkladu této partie se dá ukázat, že *existuje* *celkem pět různých druhů shodných zobrazení v rovině*, a to *identita, otočení a posunutí* jako shodnosti přímé a *osová souměrnost a posunuté zrcadlení* jako shodnosti nepřímé. Posunutým zrcadlením rozumíme zobrazení složené z osové souměrnosti a posunutí ve směru osy (obr. 15). Má posunuté zrcadlení samodružný bod? Je některá přímka samodružná v posunutém zrcadlení?



Obr. 15

4. Která shodná zobrazení reprodukují kosočtverec?

5. Ve kterých shodných zobrazeních jsou samodružné útvary mající tvar stojatých tiskacích písmen D, E, H, N, Z?

6. Jestliže každé ze dvou zobrazení reprodukuje daný útvar, reprodukují jej i zobrazení, která vzniknou složením daných zobrazení v libovolném pořadí. Přesvědčte se o správnosti věty na zvolených příkladech (čtverci, šestiúhelníku atd.).

7. Nakreslete si profil přímého schodiště a představte si útvar, který z tohoto profilu vznikne, přidáváme-li bez omezení další schody na oba konce schodiště. Určete shodná zobrazení, v nichž je tento útvar samodružný. Kolik má středů souměrnosti?

8. Zobrazte si podobně jako ve cvičení 7 „nekonečný" žebřík a vyhledejte shodná zobrazení, která jej reprodukují. Jsou mezi nimi posunutá zrcadlení?

9. Zamyslete se nad problémem, které trojúhelníky lze rozstřihnout na tři rovnoramenné trojúhelníky.

[Využijte nejprve středu kružnice opsané trojúhelníku, pak dělení trojúhelníku výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. Kdy je pravoúhlý trojúhelník rovnoramenný?]

10. Přesvědčte se, že složením dvou osových souměrností, jejichž osy jsou navzájem kolmé, vznikne středová souměrnost. Zdůvodněte na základě toho středovou souměrnost elipsy.

KAPITOLA III

STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

V této kapitole si ukážeme některé typy úloh, které lze řešit výhodně pomocí středové souměrnosti. Jistě víte, jak přiřazujeme obraz danému bodu nebo útvaru (přímce, kružnici). Připomeňme si ještě dvě věty o středové souměrnosti v rovině. Jsou to věty, které říkají, že za jistých předpokladů existuje právě jedna středová souměrnost mající dané vlastnosti.

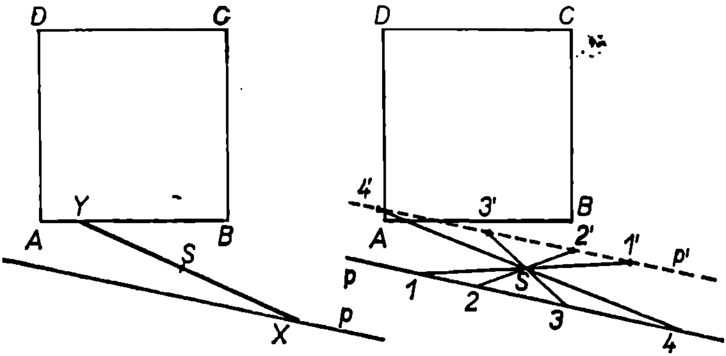
Je-li dán v rovině bod S, existuje právě jedna středová souměrnost se středem S.

Je-li dána v rovině dvojice různých bodů A, B, existuje právě jedna středová souměrnost, která zobrazuje A v B, B v A. Jejím středem je střed úsečky AB.

Zabývejme se nejprve problémem „vzpříčení" úsečky mezi dvěma útvary tak, aby byla půlena daným bodem S.

Příklad 6. *Je dán čtverec $ABCD$, přímka p a bod S. Sestrojte úsečku XY tak, aby jejím středem byl bod S a aby bod X ležel na p, bod Y na hranici čtverce.*

Rozbor. Úloha má dva neznámé body X, Y, které jsou však závislé. Kdybychom znali bod X, přiřadili bychom mu snadno bod Y jako obraz v souměrnosti podle středu S. Bodem X je však některý bod přímky p, „vyzkoušíme" tedy několik bodů přímky p, podobně jako jsme experimentovali při řešení úlohy v příkladě 4. Na obr. 16b jsou pokusy číslovány, nepodařilo se však zkusmo najít hledanou úsečku XY. Je zřejmé, že hledaný bod Y je bodem přímky p', která je obrazem přímky p v souměrnosti podle středu S. Zapišme si výsledek rozboru:



Obr. 16 a, b

Je-li úsečka XY řešením úlohy, pak
bod X je obrazem bodu Y v souměrnosti podle středu S,
bod Y leží 1. *na hranici čtverce $ABCD$,*
2. *na obrazu p' přímky p v souměrnosti podle středu S.*

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz p' přímky p v souměrnosti podle středu S.*
K_2: *Sestrojíme společný bod Y přímky p' a obvodu čtverce.*
K_3: *Sestrojíme obraz X bodu Y v souměrnosti podle středu S.*
K_4: *Sestrojíme úsečku XY.*

Zkouška výsledku konstrukce. Z konstrukce K_2 plyne, že bod Y leží na hranici čtverce. Z konstrukce K_3 plyne, že bod S je středem úsečky XY. Protože podle K_1 zobrazuje souměrnost $S(p \to p')$, zobrazuje také $p' \to p$, proto bod X (obraz bodu Y přímky p') leží na přímce p. Dokázali jsme, že sestrojená úsečka má žádané vlastnosti.

Diskuse. Konstrukce K_1 má právě jedno řešení. Počet řešení konstrukce K_2 závisí na vzájemné poloze přímky p' a hranice čtverce; tyto útvary mohou mít společnou úsečku, dva různé body, jediný bod nebo žádný bod. Konstrukce K_3 má jediné řešení. Konstrukce K_4 má řešení, pokud je $X \neq Y$.

Není-li bod S společným bodem hranice čtverce a přímky p, má úloha právě tolik řešení, kolik jich má konstrukce K_2. Je-li bod S společným bodem hranice čtverce a přímky p, má úloha vždy o jedno řešení méně než konstrukce K_2.

Všimněte si řešení příkladu 6 pozorně, zvláště zápisu. Nejste asi zvyklí psát *shrnutí rozboru.* Je však užitečné zapsat si, co jsme zjistili o neznámých bodech. Musí to být takové jejich vlastnosti, na základě kterých je možno tyto body sestrojit. Zpravidla udáváme, na kterých daných nebo z daných údajů sestrojitelných základních křivkách*) leží každý neznámý bod. *Užíváme-li metody zobrazení, můžeme neznámý bod sestrojit jako obraz jiného bodu v některém zobrazení.*

Je vám jistě zřejmé, že jsme při řešení příkladu 6

*) Při konstrukcích kružítkem a pravítkem jsou základními křivkami kružnice a přímky. Neznámé body sestrojujeme jako společné body základních křivek.

mohli přiřazovat obrazy bodům hranice čtverce. Dostali bychom obraz čtverce v souměrnosti podle středu S. Proveďte si řešení tímto způsobem a zapište si je podrobně podle vzoru řešení příkladu 6.

Zvolíme-li místo přímky a čtverce jiné útvary, zůstane princip řešení zřejmě stejný. Podívejte se na obr. 16a, kde je silně vyznačena úsečka XY. Dovedli byste sestrojit čtverec, jehož úhlopříčkou je úsečka XY? Jistěže ano; pak také vyřešíte i následující úlohu.

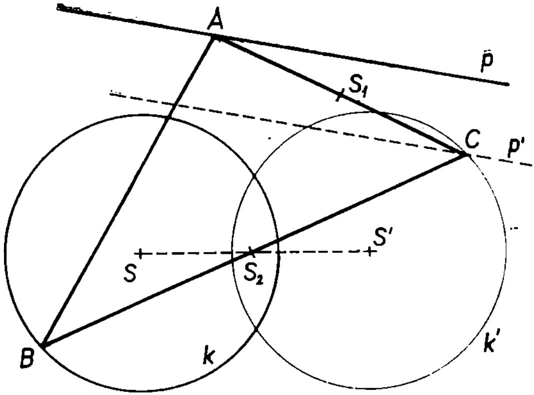
Příklad 7. *Jsou dány přímky a, b a bod S. Sestrojte čtverec $XYZU$ o středu S, jehož vrchol X leží na a, vrchol Z na b.*

Řešení. Sestrojíte-li úsečku XZ o středu S, proveďte navíc konstrukci čtverce o úhlopříčce XZ. Zapište si podrobné řešení.

Uveďme si nyní úlohu, ve které se použije dvou středových souměrností.

Příklad 8. *Je dána přímka p, kružnice $k(S, r)$ a body S_1, S_2 navzájem různé. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrchol A ležel na p, vrchol B na k a body S_1, S_2 byly po řadě středy stran AC, BC.*

Rozbor (obr. 17). Všechny vrcholy trojúhelníku jsou neznámé, bod C je však obrazem bodu A v souměrnosti S_1 o středu S_1 a bodu B v souměrnosti S_2 o středu S_2. Bod A leží na přímce p, jeho obraz $A' = C$ leží na obrazu p' přímky p v souměrnosti S_1. Bod B leží na k, jeho obraz $B' = C$ leží na obrazu k' kružnice k v souměrnosti S_2. Shrňme výsledek rozboru:



Obr. 17

Má-li úloha řešení,

leží bod C 1. *na obraze p' přímky p v* S_1,
2. *na obraze k' kružnice k v* S_2.

Konstrukce. Jednotlivé kroky konstrukce popíšete snadno sami. Pamatujte však na to, že poslední krok konstrukce musí sestrojit hledaný útvar.

Zkoušku a diskusi proveďte podle vzoru příkladu 6. Úloha může mít nejvýše dvě různá řešení.*)

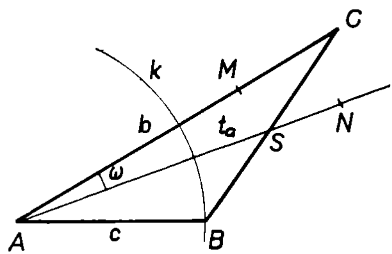
Úlohy 6, 7, 8 jsou *polohové konstrukční úlohy*, protože požadují sestrojení útvaru, jehož význačné prvky mají mít předepsanou polohu. Pomocí středové souměrnosti lze však řešit i *nepolohové konstrukční úlohy*, tj. úlohy nepožadující od žádného prvku hledaného útvaru,

*) Úlohu můžete řešit také pomocí jediného zobrazení. Určete je jako složení středových souměrností se středy S_1, S_2. Který bod je obrazem bodu A ve výsledném zobrazení?

kde má ležet. Sestrojování neznámých bodů však provádíme na základě polohových vlastností (hledáme společné body dvou základních křivek). Chceme-li řešit nepolohovou úlohu, musíme z ní nejprve učinit úlohu polohovou, a to tak, že *umístíme* některý z daných prvků útvaru (úhel, úsečku apod.). Umístění tohoto prvku předchází vlastnímu řešení úlohy, napíšeme je proto jako konstrukci K_0.

Příklad 9. *Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho stranu c, těžnici t_a a dutý úhel ω sevřený těžnicí t_a a stranou b.*

Rozbor. Předpokládáme, že úloha má řešení a narýsujeme obr. 18. Považujme za umístěný útvar úhel $\sphericalangle MAN = \omega$ s vyznačenou úsečkou AS na rameni AN. Neznámé body B, C jsou souměrné podle středu S. Bod C leží na polopřímce AM, bod B na kružnici $k(A, c)$. Hledáme-li polohové vlastnosti bodů B, C, provádíme vlastně rozbor této polohové úlohy:



Obr. 18

Je dána polopřímka AM, kružnice $k(A, c)$ a bod S. Sestrojte úsečku BC tak, aby bod B ležel na k, bod C na polopřímce AM a aby bod S byl středem úsečky BC.

Tuto úlohu vyřešíme snadno podle vzoru úlohy 6. Výsledek rozboru lze formulovat takto:

Má-li úloha řešení,

leží bod C 1. *uvnitř polopřímky* AM,

2. *na kružnici* $k'(A', c)$, *která je obrazem kružnice* $k(A, c)$ *v souměrnosti podle středu* S.

Konstrukce.

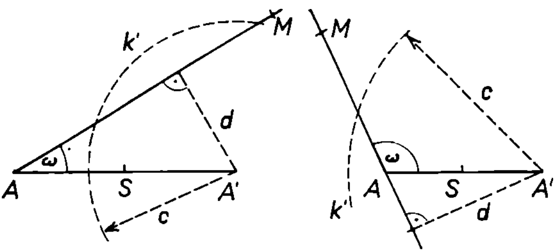
K_0: *Umístíme úhel* $\sphericalangle MAS = \omega$, $AS = t_a$.
K_1: *Sestrojíme* $k(A, c)$.
K_2: *Sestrojíme* $k'(A', c)$ *jako obraz kružnice* k *v souměrnosti podle* S.
K_3: *Sestrojíme bod* C *jako společný bod vnitřku polopřímky* AM *a kružnice* k'.
K_4: *Sestrojíme bod* B *jako obraz bodu* C *v souměrnosti dle středu* S.
K_5: *Sestrojíme trojúhelník* ABC.

Zkouška. Již konstrukcí K_0 jsme dosáhli toho, že je $AS = t_a$, z K_4 plyne, že bod S je středem úsečky BC, proto úsečka $AS = t_a$ je těžnicí trojúhelníku ABC. Z K_0 a K_3 plyne dále, že $\sphericalangle CAS = \omega$ je úhlem sevřeným těžnicí a stranou AC. Z konstrukce K_4 plyne, že bod B leží na $k(A, c)$, je proto $AB = c$.

Diskuse. Konstrukci K_0 nediskutujeme, konstrukce K_1, K_2 mají jediné řešení. Konstrukcí K_3 můžeme dostat dva, jeden nebo žádný bod C. Konstrukce K_4 má jediné řešení, konstrukce K_5 také, pokud neleží body A, B, C na jedné přímce. Kdyby však body A, B, C ležely na přímce AM, ležel by i bod S na AM a úhel ω by byl nulový nebo přímý. Protože tomu tak není, má K_5 právě jedno řešení.

Počet řešení celé úlohy záleží tedy na vzájemné poloze polopřímky AM a kružnice k' (A', c).*)

U nepolohových úloh provádíme obvykle diskusi i podle daných údajů, v našem případě úhlu ω a úseček t_a, c. Tato diskuse vyžaduje znalost trigonometrie, speciálně trigonometrického řešení pravoúhlého trojúhelníku. Na obr. 19a je zobrazen případ, kdy je úhel ω ostrý. Kružnice $k'(A', c)$ má s vnitřkem polopřímky AM společné dva různé body právě tehdy, když je $d < c$ a současně $A'A = 2\,t_a > c$. Protože $d = AA' \sin \omega = 2\,t_a \sin \omega$, dostáváme podmínku $2\,t_a \sin \omega < c < 2\,t_a$.



Obr. 19 a, b

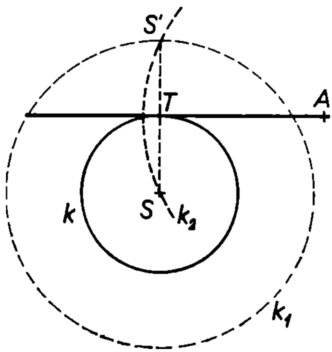
Je-li $c \geqq 2\,t_a$, má kružnice k' s vnitřkem polopřímky AM jediný společný bod. Na obr. 19b je úhel ω tupý, kružnice k' může mít s vnitřkem polopřímky AM nejvýše jeden společný bod, to nastane právě tehdy, když je $c > 2\,t_a$.

*) Také tuto úlohu můžete řešit tak, že ve středové souměrnosti se středem S zobrazíte polopřímku AM a vyhledáte společné body jejího obrazu a kružnice k.

V příkladech 6 a 9 byl vždy středem středové souměrnosti daný bod. V řadě úloh lze však využít i toho, že za střed souměrnosti zvolíme hledaný bod.

Příklad 10. *Je dána kružnice $k(S, r)$ a její vnější bod A. Sestrojte bod dotyku kružnice k s její tečnou procházející bodem A, nepoužívejte však Thaletovy kružnice.**)

Rozbor (obr. 20). Protože hledaným bodem T je některý bod kružnice k, musíme provést rozbor tak,



Obr. 20

jako by každý bod kružnice byl středem souměrnosti. Snadno dokážete, že obrazy bodu S v množině všech souměrností, které mají střed na kružnici k, leží na kružnici $k_1(S, 2r)$. Obraz S' bodu S v souměrnosti podle hledaného bodu T leží pak ještě na kružnici $k_2(A, AS)$, protože je $AS' = AS$. Rozbor můžeme shrnout takto:

*) Takovou konstrukci potřebujeme např. v Lobačevského geometrii, kde neplatí věta Thaletova.

Bod T je středem souměrnosti zobrazující bod S v bod S'.
Bod S' leží 1. *na* $k_1(S, 2r)$,
2. *na* $k_2(A, AS)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme kružnici* $k_1(S, 2r)$.
K_2: *Sestrojíme kružnici* $k_2(A, AS)$.
K_3: *Sestrojíme společný bod* S' *kružnic* k_1, k_2.
K_4: *Sestrojíme střed* T *souměrnosti* $S(S \to S')$.

Další fáze řešení můžete provést snadno sami. Všimli jste si, že v rozboru této úlohy se objevil pomocný neznámý bod S'. Doplnili jsme jím určení bodu T. V konstrukci jej sestrojujeme dříve než bod T.

Dosud uvedené úlohy byly celkem jednoduché, ukažme si řešení jedné obtížnější úlohy. Jistě oceníte pomoc, jakou nám k jejímu zvládnutí poskytne středová souměrnost.

Příklad 11. *Je dána kružnice $k(O, r)$ s vyznačeným průměrem PQ a nesečna p kružnice k, na p je dán bod S. Sestrojte bod Z kružnice k, který má tu vlastnost, že průsečíky X, Y přímek PZ, QZ*) s přímkou p jsou souměrně sdruženy podle středu S.*

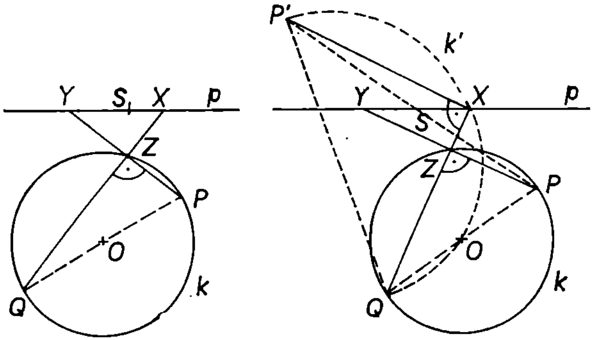
Řešení. Na obr. 21a jsou narýsovány dané útvary a dále průsečíky X, Y přímek QZ, PZ s přímkou p. Bod Z je zvolen libovolně, není řešením úlohy. Zkoušejte si na podobném obrázku další body Z, s body X, Y

---

*) V této úloze a úlohách jí podobných je třeba považovat tečnu kružnice v bodě P za přímku PZ v případě, kdy je $Z = P$. Obdobný význam má přímka QZ v případě, kde je $Z = Q$.

nebudete mít asi úspěch, zato si jistě uvědomíte, že přímky PZ, QZ jsou navzájem kolmé při každém Z.

Rozbor. Na obr. 21b je sestrojen bod Z, který je řešením úlohy. Průsečíky přímek ZQ, ZP s přímkou p jsou označeny písmeny X, Y. Souměrnost se středem S zobrazuje navzájem X a Y, zobrazme v ní „na zkoušku" i bod P a přímku PY, $S(S \to S,\ Y \to X,\ P \to P',\ PY \to P'X)$.



Obr. 21 a, b

Protože je přímka PY rovnoběžná s přímkou $P'X$ a současně kolmá na přímku QX, je také přímka $P'X$ kolmá na přímku QX. Vidíte, že bod X je vrcholem pravého úhlu nad úsečkou $P'Q$. Napišme si shrnutí rozboru:

Je-li bod Z řešením úlohy, náleží kružnici k a přímkám QX, PY.

Bod X leží 1. *na přímce p,*

2. *na kružnici o průměru $P'Q$.*

Bod P' je obrazem bodu P v souměrnosti o středu S.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz P' bodu P v souměrnosti o středu S.*
K_2: *Sestrojíme kružnici k' o průměru $P'Q$.*
K_3: *Sestrojíme bod X jako společný bod přímky p a kružnice k'.*
K_4: *Sestrojíme přímku QX.*
K_5: *Sestrojíme bod Z jako společný bod kružnice k a přímky QX.*

Zkouška výsledku konstrukce. Z konstrukce K_3 plyne, že je $P'X$ kolmá na QX. Z konstrukcí K_5, K_4 plyne podle Thaletovy věty, že je PZ kolmá na $QZ = QX$. Přímky PZ, $P'X$ jsou kolmé k téže přímce, proto navzájem rovnoběžné. Protože $P'X$ protíná p, protíná ji i přímka PZ; označme průsečík jako bod Y. Souměrnost S se středem S zobrazuje $P \to P'$, $P' \to P$, $p \to p$, přímku $P'X$ v rovnoběžku procházející bodem P. Touto rovnoběžkou je však přímka $PZ = PY$. Průsečík přímek $P'X$, p přejde v průsečík obrazů těchto přímek, tj. bod X přejde v bod Y. V důsledku toho je bod S středem úsečky XY.

Diskuse. Konstrukce K_1, K_2 mají právě jedno řešení, přitom bod P' leží uvnitř opačné poloroviny vyťaté přímkou p než bod Q. Přímka p obsahuje vnitřní bod úsečky $P'Q$, proto i vnitřní bod kružnice k', konstrukce K_3 má právě dvě řešení. Konstrukce K_4, K_5 mají jediné řešení. Celkově má tedy úloha právě dvě řešení.*)

Umělý obrat, kterého jsme užili, lze snad nejlépe charakterizovat takto: v souměrnosti, která převádí jeden neznámý bod v druhý, jsme zobrazili jeden z da-

*) V případě, že je přímka p rovnoběžná s průměrem PQ, lze úlohu snadno řešit pomocí stejnolehlosti.

ných bodů, nikoliv všechny dané body. V dalším textu poznáte, že pro užití zobrazení je v mnoha případech rypické to, že v něm zobrazujeme jen některé dané útvary a hledáme pak jejich vztahy k nezobrazeným bodům.

V kapitole III jsme si ukázali úlohy, v nichž byl středem souměrnosti daný bod (příklady 6, 7, 9, 11), dva dané body (příklad 8) nebo hledaný bod (příklad 10).

11. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2 a bod S na menší z nich. Sestrojte rovnoběžník se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích.

12. Jsou dány čtyři kružnice a bod S. Sestrojte rovnoběžník $XYUV$ se středem S, jehož každý vrchol leží na jedné z daných kružnic.

13. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

1. t_a, t_b, t_c,
2. t_a, t_b, γ,
3. t_a, v_b, v_c,
4. t_a, v_b, v_a,
5. t_a, v_c, γ,
6. t_a, β, γ.

[Umístěte těžnici $t_a = AS$ a stanovte množiny bodů, kterým náležejí neznámé vrcholy B, C. Využijte k tomu vlastností těžiště nebo vzdálenosti bodu S od stran AB, AC trojúhelníku, dostanete buď kružnice, oblouky kružnic, přímky nebo polopřímky. Dále postupujte podle úlohy 9.]

14. Zobecněte úlohu 11 v tom smyslu, že zvolíte body P, Q *libovolně* na kružnici k, nikoliv jako body diametrálně protilehlé.

[Při řešení využijte vlastností obvodového úhlu PZQ; pamatujte na existenci dvou oblouků dané kružnice s krajními body P, Q].

KAPITOLA IV

OSOVÁ SOUMĚRNOST

Konstrukční využití osové souměrnosti je mnohostranné. Jistě znáte úlohy o odrazu a některé úlohy o nejkratším spojení dvou bodů lomenou čarou. Teoretickým základem řešení těchto úloh je následující věta.

Svírá-li přímka p s osou o osové souměrnosti ostrý úhel α, zobrazuje se v této osové souměrnosti v přímku $p' \neq p$, která protíná osu o v témž bodě jako p a svírá s ní úhel shodný s úhlem α.

Uveďme si ještě dvě věty o určenosti osové souměrnosti.

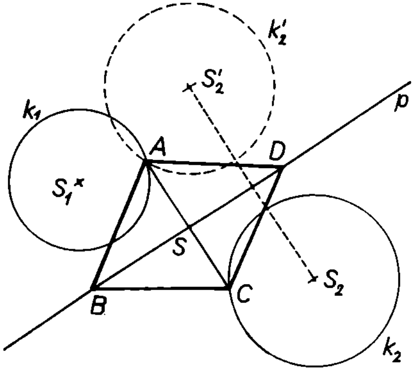
Je-li dána přímka o, existuje právě jedna osová souměrnost v rovině, která má osu o.

Jsou-li dány dva různé body A, B, existuje právě jedna osová souměrnost v rovině, která zobrazuje $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$.

Středová souměrnost umožňovala „vzpříčit" mezi útvary úsečku půlenou daným bodem, osová souměrnost umožňuje sestrojit takovou „příčku" mezi útvary, která je kolmá na danou přímku a přitom je jí půlena.

Příklad 12. *Je dána přímka p, úsečka u a dvě kružnice oddělené přímkou p. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, jehož úhlopříčka $BD = u$ leží na dané přímce a každý ze zbývajících vrcholů leží na jedné z daných kružnic.*

Rozbor. Předpokládané řešení je zobrazeno na obr. 22. Všechny čtyři vrcholy kosočtverce jsou neznámé body,



Obr. 22

ale B, D sestrojíme snadno, budeme-li znát bod S. K sestrojení bodu S potřebujeme úsečku AC. Osová souměrnost s osou p zobrazuje $A \to C$, $C \to A$, bod A leží proto na obrazu k_2' (S_2', r_2) kružnice k_2 obsahující bod C. Výsledek rozboru:

Body B, D leží 1. *na přímce p,*

2. *na kružnici* $k\left(S, \frac{1}{2}u\right)$.

Bod S leží 1. *na přímce p,*

2. *na přímce AC.*

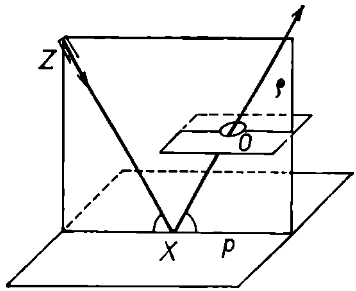
Bod A leží 1. *na kružnici $k_1(S_1, r_1)$,*

2. *na obraze $k_2'(S_2', r_2)$ kružnice $k_2(S_2, r_2)$ v osové souměrnosti s osou o.*

Na základě podrobného rozboru můžete snadno dokončit řešení úlohy. V konstrukci sestrojujte postupně útvary a body uvedené ve shrnutí rozboru, postupujte od útvarů umožňujících konstrukci bodu A ke kružnici k sloužící ke konstrukci bodů B, D.

Vezměme si nyní praktickou úlohu o odrazu.

Příklad 13 (obr. 23a). *Je dána nepohyblivá zrcadlící stěna, nepohyblivá clona s otvorem O a otáčivý světelný zdroj Z, který vysílá úzký svazek paprsků. Máme natočit zdroj Z tak, aby světelný paprsek procházel po odrazu od zrcadlící stěny otvorem O.*



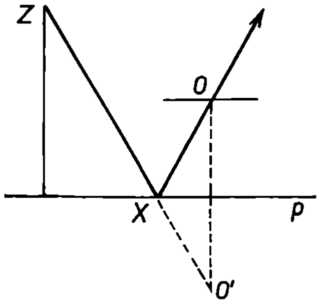
Obr. 23 a

Řešení. Světelný paprsek ze zdroje Z a paprsek odražený leží v jedné rovině kolmé k zrcadlící stěně. Tato rovina je jednoznačně určena body Z, O, její průsečnice se stěnou je označena p (obr. 23b). Tím dostáváme planimetrickou úlohu:

Jsou dány dva různé body Z, O ležící uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p. Sestrojte bod X přímky p tak, aby přímky ZX, XO svíraly s přímkou p shodné úhly.

Řešení této úlohy znáte. Bod X leží na přímce ZO', kde O' je obrazem bodu O v osové souměrnosti podle přímky p. Napište si podrobné řešení této úlohy.

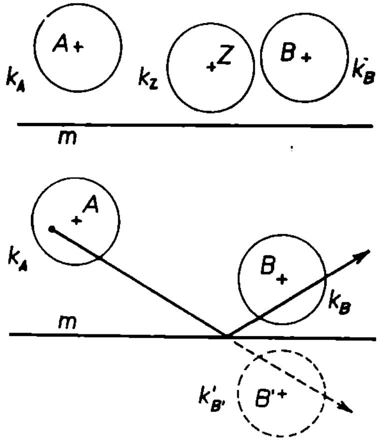
Úlohy o odrazu se vyskytují i ve sportu. Tam se ovšem nezamýšlíme dlouze nad řešením, protože hra vyžaduje rychlé reakce. Teprve po zápase je čas na rekapitulaci hry. *Jak byste objektivně rozhodli, zda při postavení podle obr.* 24a *mohl hráč A přihrát spoluhráči B odrazem od mantinelu? Při zápase se o to sice hráč A pokusil, ale jeho přihrávku zachytil protivník Z.*



Obr. 23 b

Hráč A na touši nestojí, musíme proto počítat s tím, že touš leží uvnitř jistého kruhu $\mathbf{k}_A$ o středu A. Hráči B, Z mohou touš zachytit jen v tom případě, že jeho dráha prochází kruhy $\mathbf{k}_B$, $\mathbf{k}_Z$ o středech B, Z.

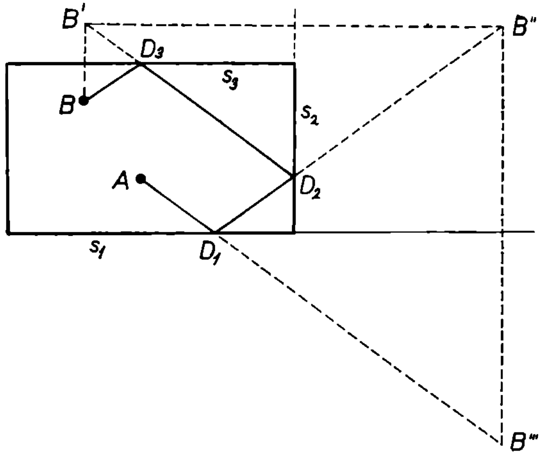
Zobrazme kruh $\mathbf{k}_B$ v souměrnosti podle m (obr. 24b). Touš vystřelený z kruhu $\mathbf{k}_A$ se odrazí od mantinelu do kruhu $\mathbf{k}_B$ právě tehdy, když prodloužení jeho původní dráhy prochází kruhem $\mathbf{k}'_B$. Vyjádřete si obdobně podmínku, kdy se touš odrazí do kruhu $\mathbf{k}_Z$. Danou otázku můžeme zodpovědět kladně jen v tom případě, existuje-li společná sečna kruhů $\mathbf{k}_A$, $\mathbf{k}'_B$, která je současně nesečnou kruhů $\mathbf{k}_Z$, $\mathbf{k}_{Z'}$. Proveďte si řešení úlohy při různých postaveních hráčů A, B, Z.



Obr. 24 a, b

Obdobnou geometrickou problematiku řešíme i při kulečníku. *Nechť body A, B na obr. 25 představují polohu dvou kulečníkových koulí. Máme zakreslit dráhu koule A, která se odráží po řadě od stran s_1, s_2, s_3 kulečníku a nakonec zasáhne kouli B.*

Chceme-li postupovat obdobně jako při řešení předešlých úloh, musíme zobrazit cíl — bod B — nejprve do bodu B' v souměrnosti podle přímky s_3, bod B' do bodu B'' v souměrnosti podle s_2 a konečně bod B'' v souměrnosti podle s_1 do bodu B'''. První část dráhy koule A pak leží na polopřímce AB''', v bodě D_1 se koule odráží a směřuje do bodu B''. Při tomto pohybu se odrazí v bodě D_2 od strany s_2 a směřuje do bodu B'. V bodě D_3 se odrazí do bodu B. Řešte si samostatně podobné úlohy o kulečníkových koulích. Porovnejte délku lomené čáry $AD_1D_2D_3B$ s délkou úsečky AB'''.



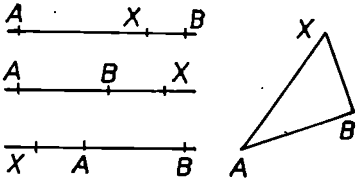
Obr. 25

Osová souměrnost je vhodná i k řešení úloh o nejkratším spojení dvou bodů lomenou čarou, jejíž vrchol leží na dané přímce. Řešení těchto úloh se opírá o následující větu:

Jsou-li A, B, X tři různé body, platí $AX + XB = AB$ právě tehdy, když bod X leží mezi A, B. Vztah $AX - BX = AB$ platí právě tehdy, když B leží mezi A, X. Vždy platí $AX + BX \geqq AB$, $AX - BX \leqq AB$ (pro $AX > BX$).

Větu dokážete snadno sami. Vyjádřete si závislost mezi součtem resp. rozdílem úseček AX, XB ve všech případech zakreslených na obr. 26.

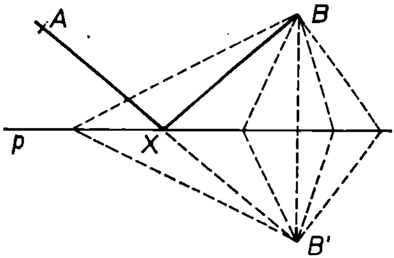
Příklad 14. *Jsou dány dva různé body A, B neležící na dané přímce p. Sestrojte bod X přímky p, pro který je součet $AX + BX$ nejmenší.*



Obr. 26

Rozbor. Je-li bod X řešením úlohy, je $AX + BX$ minimální. Podle výše uvedené věty je vždy $AX + BX \geqq AB$.

Je-li součet $AX + BX = AB$, leží bod X mezi A, B. Je-li součet $AX + BX$ sice minimální možný (pro body X přímky p), ale přesto větší než AB, nemůže ležet mezi A, B žádný bod přímky p, oba body leží v tom případě uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p. Řešení úlohy provádíme pak tím způsobem, že místo bodu B vezmeme ten bod roviny, který má od každého bodu přímky p stejnou vzdálenost jako bod B. Tímto bodem je bod B' souměrně sdružený s bodem B v osové souměrnosti s osou p (obr. 27). Závěr rozboru musíme formulovat pro dva různé případy:



Obr. 27

Leží-li body A, B uvnitř téže poloroviny vyťaté přímkou p a je-li $AX + XB$ nejmenší, pak leží bod X na úsečce AB', kde B' je obrazem bodu B v souměrnosti podle p.

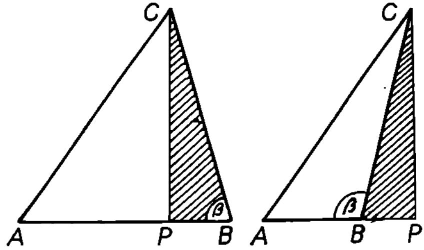
Leží-li body A, B uvnitř různých polorovin vyťatých přímkou p, je hledaný bod X bodem úsečky AB.

Na základě tohoto rozboru snadno napíšete pro každý případ postup konstrukce. Zkouška výsledku konstrukce je pak snadná, v diskusi dojde k jedinému řešení.

Podrobný rozbor minulé úlohy se vám možná zdál příliš mnohomluvný, když dávno znáte konstrukci bodu X. Viděli jste však příklad úlohy, v níž dojdeme k nutnosti rozštěpit rozbor. Kdybychom si v příkladě 14 nakreslili hned na začátku rozboru obr. 27 a provedli rozbor podle něj, došli bychom ke konstrukci pomocí souměrného bodu B'. Taková konstrukce by nám v případě, že body A, B leží uvnitř opačných polorovin, nedala žádné řešení. Mohli bychom tím být svedeni k ukvapenému závěru, že v tomto případě nemá úloha řešení.

Buďte pozorní při provádění rozboru a nenechte se ovlivnit obrázkem. Z obvyklých úloh o trojúhelnících jsou v tomto směru „nebezpečné" zejména úlohy, v jejichž rozboru se pracuje s patou některé výšky. Např. rozbor úlohy: *sestrojit trojúhelník ABC, je-li dáno β, v_c, b* se často provádí na základě obr. 28 a. Může nás to svést k závěru, že nejprve sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník CPB s úhlem $PBC = \beta$. Protože nelze sestrojit trojúhelník PBC v případě, že úhel β je tupý, mohli bychom prohlásit, že v tom případě úloha nemá řešení. To je však hrubý omyl, protože trojúhelník PBC může obsahovat také úhel $\pi - \beta$ (výplňkový k úhlu β). Je-li úhel β pravý, trojúhelník PBC neexistuje. Při rozboru úlohy uvedené v této poznámce musíte *uvažovat zvlášť o ostroúhlém, pravoúhlém a tupoúhlém trojúhelníku ABC.*

Rozřešte, nejlépe ihned, následující úlohu:



Obr. 28 a, b

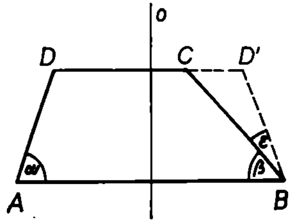
Příklad 15. *Je dána přímka p a body A, B neležící na p, z nichž B je blíže přímky p. Sestrojte bod X přímky p, pro který je rozdíl úseček AX — BX největší.*

Sledujte formulaci rozboru v příkladě 14, zapište si podle ní rozbor úlohy.

Pomocí osové souměrnosti v rovině můžeme řešit i ty úlohy, ve kterých je dán součet nebo rozdíl úhlů některého útvaru.

Příklad 16. *Jsou dány úsečky b, c, d a úhel ε. Sestrojte lichoběžník ABCD tak, aby bylo* $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\sphericalangle DAB - \sphericalangle ABC = \alpha - \beta = \varepsilon$.

Řešení. Podíváte-li se na obr. 29, kde jsou vyznačeny dané úsečky, vidíte, že máme dán rozdíl úhlů přiléhajících k úsečce AB. Musíme si zřejmě v obr. 29 sestrojit úhel $\alpha - \beta = \varepsilon$. Řekli jsme si, že bývá vhodné zobrazit osovou souměrností jeden vrchol v druhý. Použijm osové souměrnosti O ($A \to B$, $B \to A$), v ní přejde $D \to D'$, $\sphericalangle BAD \to \sphericalangle ABD'$. Protože je $\alpha > \beta$, leží D' na přímce CD tak, že C odděluje D, D'. Úhel $\sphericalangle CBD' = \varepsilon = \alpha - \beta$.



Obr. 29

Má-li lichoběžník $ABCD$ žádané vlastnosti, má trojúhelník BCD' stranu $BC = b$, $BD' = d$, $\sphericalangle CBD' = \varepsilon$. Trojúhelník BCD' snadno sestrojíme, známe úhel trojúhelníku a strany ležící na jeho ramenech. V tomto směru už v rozboru pokračovat nemusíme. Ptejme se spíše, zda budeme moci sestrojit body A, D, až budeme mít sestrojen trojúhelník BCD'. Co víme o vztahu těchto bodů k trojúhelníku BCD'?

Bod D leží 1. *na polopřímce $D'C$,*
2. *na kružnici $k(C,c)$.*

Bod A je obrazem bodu B v souměrnosti O ($D' \to D$).

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník BCD' s úhlem $\sphericalangle BCD' = \varepsilon$, $BC = b$, $BD' = d$.*

K_2: *Sestrojíme polopřímku $D'C$.*

K_3: *Sestrojíme kružnici $k = (C, c)$.*

K_4: *Sestrojíme D jako společný bod polopřímky $D'C$ a kružnice k.*
K_5: *Sestrojíme osu souměrnosti O $(D' \to D)$.*
K_6: *Sestrojíme obraz A bodu B v souměrnosti O.*
K_7: *Sestrojíme lichoběžník $ABCD$.*

Z konstrukcí K_3, K_4 plyne, že je $CD = c$ a bod C lež mezi D, D'. Použitá osová souměrnost $O\,(D' \to D$, $B \to A$, $A \to B)$ zobrazuje úsečku $BD' = d$ v úsečku $DA = d$ a úhel $D'BA$ v úhel $\sphericalangle BAD = \alpha$, je proto $\sphericalangle D'BA = \alpha$. Protože polopřímka BC leží uvnitř úhlu ABD, je úhel $CBD' = \alpha - \beta$. V K_1 jsme však sestrojili úhel $\sphericalangle CBD' = \varepsilon$, je tedy $\alpha - \beta = \varepsilon$. Tím jsme dokázali, že v sestrojeném čtyřúhelníku $ABCD$ je $AD = d$, $BC = b$, $CD = c$, $\alpha - \beta = \varepsilon$. Nemůžeme však tvrdit, že čtyřúhelník je lichoběžníkem s hlavní základnou AB. Sestrojený čtyřúhelník má rovnoběžné strany AB, CD, může však být rovnoběžníkem (při $b = d$) nebo lichoběžníkem s $AB > CD$ nebo lichoběžníkem s $AB < < CD$.

Diskuse. Každý krok konstrukce je jednoznačný, proto i úloha má jediné řešení. Vyšetřování podmínek, kdy vyjde lichoběžník s $AB > CD$, nebudeme provádět.

Řešení úlohy bylo dost pracné, přestože jsme konstrukci trojúhelníku BCD' zapsali jako jeden krok konstrukce. Tohoto obratu se užívá i v jiných případech, můžete ho také použít při řešení úloh Matematické olympiády. Buďte si však vědomi toho, že nesmíte dopustit, aby se vám tím skrylo v řešení nějaké nedopatření. Každou takovou dílčí úlohu si musíte vyřešit samostatně a připojit k řešení celé úlohy. Zvláště nezapomínejte na diskusi počtu řešení dílčí úlohy.

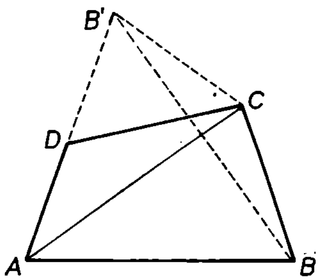
V popisu konstrukce není uveden krok K_0. Je vynechán proto, že konstrukce K_1 je nepolohová a je v ní „skryto" umístění útvarů.

Uveďme si ještě jednu úlohu o čtyřúhelníku, kterou lze výhodně řešit pomocí osové souměrnosti. Už z jejího textu byste jistě usuzovali, že bude vhodné užít osové souměrnosti.

Příklad 17. *Jsou dány úsečky, a, b, c, d, při čemž je $a > d$. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AB, BC, CD, DA jsou po řadě shodné s úsečkami a, b, c, d, je-li dále známo, že úhlopříčka AC je osou úhlu α.*

Rozbor. Na obr. 30 je zobrazen čtyřúhelník $ABCD$, který má požadované vlastnosti. Zobrazme v osové souměrnosti s osou AC bod B do bodu B'; tato souměrnost zobrazí zřejmě polopřímku AB na polopřímku AD. Protože je $AD < AB$, leží bod D mezi body A, B'.

Má-li čtyřúhelník $ABCD$ žádané vlastnosti, existuje trojúhelník $B'CD$, který má stranu $B'C = b$, $CD = c$, $B'D = a - d$.



Obr. 30

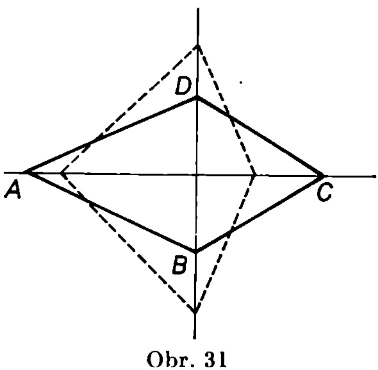
Podobně jako v příkladě 16 nebudeme provádět rozbor úlohy na sestrojení trojúhelníku $B'CD$ na základě uvedených jeho vlastností. Jde o konstrukci trojúhelníku ze tří stran, o té víte, že má právě jedno řešení, vyhovují-li strany trojúhelníka trojúhelníkovým nerovnostem.

Bod A leží 1. *na polopřímce opačné k polopřímce DB'*,
2. *na kružnici $k(D, d)$*.

Bod B je obrazem bodu B' v osové souměrnosti s osou AC.

Na základě podrobného rozboru můžete snadno popsat konstrukci čtyřúhelníku. Při zkoušce výsledku konstrukce ani v diskusi nedojdete k žádným potížím.

Úloha v příkladě 17 je ovšem jen částí obecnější úlohy, ve které se nepředpokládá platnost nějakého vztahu mezi úsečkami a, d. Při rozboru této obecnější úlohy docházíme opět k nutnosti štěpení rozboru. V případě, že je $a < d$, neliší se další postup mnoho od řešení úlohy v příkladě 17. Je-li $a = d$, je čtyřúhelník souměrný podle přímky AC, je proto deltoidem (obr. 31). V témž obrázku je zakreslen druhý deltoid, který má ta-



Obr. 31

ké strany a, b, c, d. Někdy existuje nekonečně mnoho deltoidů, které jsou řešením zobecněné úlohy. Jak sestrojíte některý z nich?

15. Je dána přímka p, kružnice k, bod T a směr s. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC s těžištěm T, jehož základna AB náleží směru s, vrchol A leží na přímce p, vrchol B na kružnici k.

[Sestrojte nejprve osu souměrnosti trojúhelníku.]

16. Pozměňte text úlohy v příkladě 10 tak, aby požadovala sestrojení tečny kružnice bez pomoci Thaletovy věty. Tuto úlohu lze řešit pomocí množiny bodů souměrně sdružených se středem kružnice podle tečen. Proveďte si takové řešení úlohy a zamyslete se nad její souvislotí se známými konstrukcemi tečen elipsy pomocí řídící kružnice.

17. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a jejich společná vnitřní tečna t. Sestrojte bod X přímky t tak, aby přímka t byla osou dvojice vrcholových úhlů sevřených druhými tečnami z bodu X ke kružnicím k_1, k_2.

18. Je dán ostrý úhel MNP a jeho vnitřní bod A. Sestrojte ten trojúhelník ABC s vrcholy B, C na ramenech úhlu, který má nejmenší obvod.

19. Při stejném zadání jako ve cvičení 18 sestrojte dráhu bodu A představujícího kouli, která se po odrazu od ramen úhlu vrátí na své místo.

20. Postavte kulečníkové koule na úhlopříčku stolu tak, aby jejich vzájemná vzdálenost byla rovna vzdálenosti každé z nich od rohu stolu. Stanovte dráhu jedné koule tak, aby se odrazila postupně od tří stran stolu a zasáhla druhou kouli. Má úloha řešení při libovolně předepsaném pořadí stran, od kterých se má koule postupně odrazit? Lze najít její dráhu v případě, že požadujeme čtyřnásobný odraz?

[Kombinujte skládání souměrností, jejichž osy obsahují strany obdélníka. Pro existenci požadované dráhy je rozhodující, abychom body odrazu dostali uvnitř příslušných stran.]

21. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány velikosti jeho stran a, c a úhlu $\alpha - \beta$.

[Úloha je zjednodušením řešené úlohy z příkladu 16.]

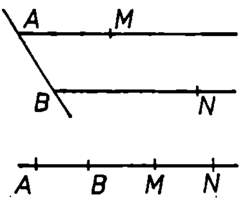
KAPITOLA V

POSUNUTÍ

Dříve než si uvedeme základní věty o posunutí v rovině, zmiňme se stručně o pojmu souhlasně rovnoběžných polopřímek.

Jsou-li AM, BN dvě polopřímky ležící na rovnoběžkách a leží-li obě v téže polorovině s hraniční přímkou AB, nazýváme je souhlasně rovnoběžné. Dvě polopřímky ležící na téže přímce považujeme za souhlasně rovnoběžné, je-li jedna z nich částí druhé.

Polopřímky AM, BN na obr. 32a, b zřejmě jsou souhlasně rovnoběžné. Pro nás je důležité, abychom si uvědomili, že při obvyklém značení vrcholů lichoběžníků a rovnoběžníků písmeny $ABCD$ dosáhneme vždy toho, že je polopřímka AB souhlasně rovnoběžná s polopřímkou DC. Navzájem opačné polopřímky nejsou souhlasně rovnoběžné, ani polopřímky AB, BA nejsou souhlasně rovnoběžné.

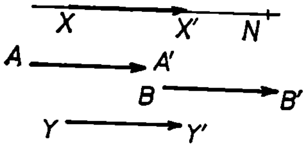


Obr. 32 a, b

Je-li dána polopřímka AB a bod X, existuje právě jedna polopřímka XY souhlasně rovnoběžná s AB.

Pomocí souhlasně rovnoběžných polopřímek můžeme přesně vyjádřit předpis, kterým přiřazujeme každému bodu roviny obraz v některém posunutí.*)

Jsou-li dány dva různé body A, A', přiřazujeme v posunutí $T\,(A \to A')$ bodu X bod X' tak, že sestrojíme polopřímku XN souhlasně rovnoběžnou s AA' a na ní sestrojíme bod X' tak, aby bylo $AA' = XX'$ (obr. 33).



Obr. 33

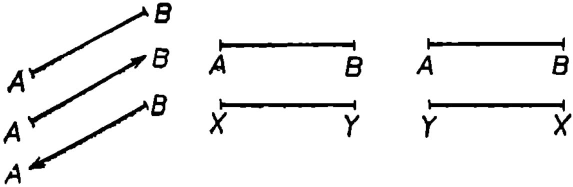
Jsou-li AM, BN dvě různé souhlasně rovnoběžné polopřímky, existuje právě jedno posunutí v rovině, které zobrazí polopřímku AM na polopřímku BN.

Vyznačíme-li v obrázku 33 přiřazení čárkovaných bodů nečárkovaným pomocí šipek, řeknete si jistě, že jsme zakreslili umístění jednoho vektoru.

Ke každému posunutí $T\,(A \to A')$ existuje inverzní zobrazení $T^{-1}\,(A' \to A)$, které je vždy různé od T.

Nakreslete si podle obrázku 33 takový obrázek, na kterém bude pomocí vektorů vyznačeno přiřazení bodů v T^{-1}.

*) Posunutí značíme obvykle písmenem T, protože se nazývá též translace. Písmenem P označujeme zpravidla podobná zobrazení.



Obr. 34 a, b, c

Je-li dána úsečka AB, můžeme ji označit jako vektor (orientovat) dvěma různými způsoby (obr. 34a), buď přidáme šipku k bodu B, nebo k bodu A. Víme již, že existuje posunutí $T(A \rightarrow B)$ a druhé, k němu inverzní, T^{-1} $(B \rightarrow A)$. Tato dvojice posunutí vystupuje při řešení úloh nerozlučně spolu. V úlohách se často setkáme s dvojicí shodných a rovnoběžných úseček (obr. 34b, c).

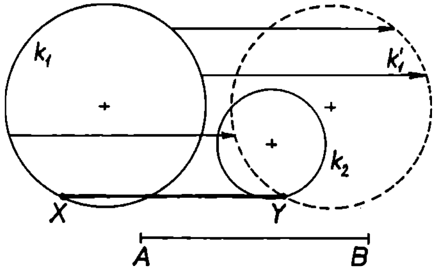
Jsou-li dány dvě rovnoběžné a shodné úsečky AB, XY, existují právě dvě posunutí zobrazující současně jeden krajní bod každé z daných úseček v druhý. Jsou to posunutí T_1 $(A \rightarrow B)$, T_2 $(B \rightarrow A)$.

Na obr. 34b zobrazuje T_1 $(A \rightarrow B,\ X \rightarrow Y)$, kdežto na obr. 34c zobrazuje T_2 $(A \rightarrow B,\ Y \rightarrow X)$.

Podobně jako u středové a osové souměrnosti začněme i zde s úlohami na „vzpříčení" úsečky mezi danými dvěma útvary. Vzhledem k vlastnostem posunutí to však budou příčky rovnoběžné a shodné s danou úsečkou.

Příklad 18. *Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a dvojice různých bodů A, B. Sestrojte úsečku XY rovnoběžnou s AB tak, aby bod X ležel na k_1, bod Y na k_2 a aby $XY = AB$.*

Rozbor. Na obr. 35 je zobrazena dvojice úseček AB, XY. Body X, Y jsou neznámé, víme však, že bod X



Obr. 35

přejde v Y jednou z translací T_1 $(A \to B)$, T_2 $(B \to A)$. Nevíme, který bod X kružnice k_1 přejde v hledaný bod Y kružnice k_2, můžeme proto opět „zkoušet" větší počet bodů kružnice k_1. Pozorujeme, že obrazy bodů kružnice k_1 (hroty šipek) vytvářejí kružnici. Protože v posunutí je obrazem každé kružnice kružnice shodná s původní, docházíme k tomuto výsledku:

Bod Y leží 1. *na kružnici $k_2(S_2, r_2)$,*

2. *na kružnici k_1' (S_1', r_1), která je obrazem kružnice k_1 (S_1, r_1) v posunutí T_1 $(A \to B)$ nebo T_2 $(B \to A)$.*

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme kružnici k'_1 (S_1', r_1), která je obrazem kružnice k_1 v posunutí T_1 $(A \to B)$.*

K_2: *Sestrojíme společný bod Y kružnic k_1', k_2.*

K_3: *Sestrojíme bod X jako obraz bodu Y v T_1^{-1} $(B \to A)$.*

K_4: *Sestrojíme úsečku XY.*

Připojte sami ještě obdobný popis konstrukce v případě, že použijeme posunutí T_2 $(B \to A)$.

Zkoušku výsledku konstrukce proveďte sami, je velmi jednoduchá.

Diskuse. Všechny konstrukce kromě K_2 jsou jednoznačné. Počet řešení úlohy závisí jedině na počtu společných bodů kružnice k_2 s obrazy kružnice k_1 v posunutích T_1, T_2. Úloha má proto někdy i nekonečně mnoho řešení. Nejvyšší konečný počet řešení je roven čtyřem, dále může mít úloha tři, dvě, jedno nebo žádné řešení.

Vidíte, že řešení úloh pomocí posunutí je ještě náročnější na formulaci textu než řešení úloh v kapitolách III a IV. Komplikace způsobuje existence dvou posunutí, která mohou úlohu řešit. Připomeňte si znovu obsah poznámky za příkladem 6. Snadno pak vyřešíte další úlohu.

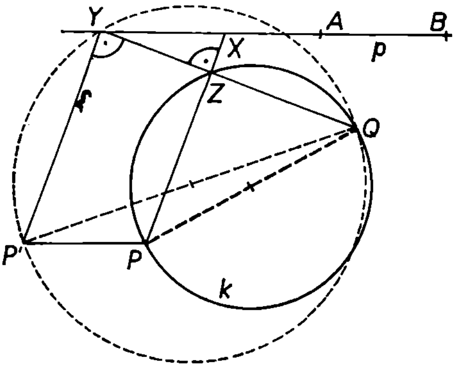
Příklad 19. *Je dána dvojice přímek a, b a úsečka MN. Sestrojte čtverec $XYZU$ o straně $XY = MN$ a rovnoběžné s MN, je-li dána podmínka, aby bod X ležel na přímce a bod Y na b.*

Řešení úlohy předpokládá sestrojení úsečky XY s uvedenými vlastnostmi. Kolik pak existuje čtverců, které mají stranu XY?

Příklad 20. *Je dána kružnice k s vyznačeným průměrem PQ a nesečna p kružnice k s vyznačenou úsečkou AB. Sestrojte bod Z kružnice k, který má tu vlastnost, že přímky PZ, QZ protínají p v bodech X, Y tak, že je $XY = AB$.*

Rozbor. Je-li bod Z na obr. 36 řešením úlohy, je úsečka $XY = AB$. Protože je přímka XY rovnoběžná s AB, máme možnost převést bod X v bod Y jedním z posunutí T_1 $(A \to B)$, T_2 $(B \to A)$. Zobrazme v tomto posunutí bod P v bod P'. Na obr. 36 jde o posunutí T_2 $(B \to A$, $X \to Y$, $P \to P')$. Přímka PX je rovnoběžná s přímkou

$P'X' = P'Y$; protože je PX kolmá na QY, je také $P'Y$ kolmá na QY.



Obr. 36

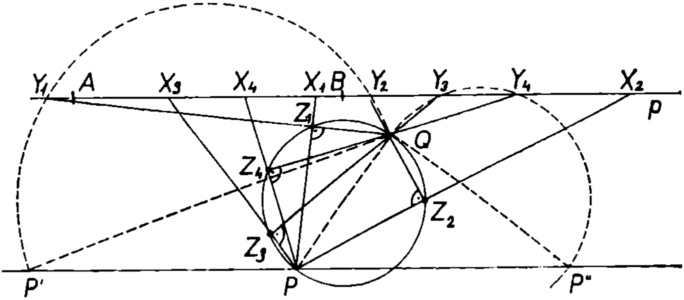
Docházíme tedy k závěru:

Bod Y je obrazem bodu X v T_2 ($B \to A$),
leží 1. *na přímce p,*
2. *na Thaletově kružnici o průměru $P'Q$.*

Stejně tak by ovšem mohl být bod Y obrazem bodu X v posunutí T_1 ($A \to B$). Nakreslete si pro tento případ obrázek.

Ostatní části řešení této úlohy si můžete zpracovat sami, vodítkem vám může být řešení příkladu 11. Dostanete nejvýše čtyři různá řešení (obr. 37).

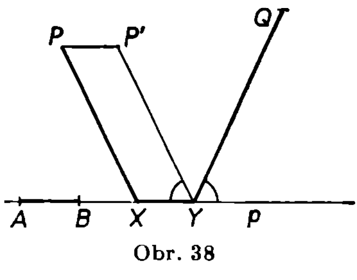
Dosud všechny úlohy této kapitoly byly polohové a vcelku jednoduché, našli jsme okamžitě množinu bodů, které náleží neznámý bod. Častější je případ, kdy po ztotožnění dvou neznámých bodů posunutím dojdeme k úloze o jednom neznámému bodu, kterou musíme řešit některým dalším způsobem.



Obr. 37

Příklad 21. *Na příčném profilu terénu jsou dány body P, Q a přímka p, na níž leží dno výkopu pro železniční trať. Narýsujte profil výkopu, jestliže šířka jeho dna je AB a stěny výkopu mají týž spád.*

Řešení. Na obr. 38 je narýsováno řešení úlohy. Použijeme osvědčeného způsobu a sestrojíme obraz P' bodu P v T_1 ($A \to B$, $X \to Y$). Snadno si dokážete, že je přímka PX rovnoběžná s přímkou $P'Y$. Je také zřejmé, že bod Y je tím bodem přímky p, ve kterém by se paprsek vyslaný z P' odrazil od p do bodu Q. Tím jsme úlohu



Obr. 38

převedli na dříve řešenou úlohu o odrazu (příklad 13). Řešení dokončete sami, nezapomeňte však na posunutí $T_2 (B \to A)$. Příslušná lomená čára $PXYQ$ se protíná, nemá proto význam pro praktickou úlohu, ze které jsme vyšli. Máme příklad, kdy praktická úloha má méně řešení než z ní vyvozená úloha matematická. Podobné příklady znáte z řešení kvadratických rovnic.

Jistě jste již řešili řadu úloh na sestrojení trojúhelníku ABC, jsou-li dány velikosti tří z jeho prvků a, b, c, α, β, γ, t_A, t_B, t_C, v_A, v_B, v_C.*) Trojúhelník ABC lze sestrojit zvláště snadno, je-li dána některá z trojic a, b, c; a, b, γ; a, b, v_A; a, b, t_A; a, v_A, t_A; a, γ, v_A,; a, γ, t_A; a, α, t_A; a, α, v_A; a, v_B, t_A; a, v_B, t_C; a, v_B, v_C; α, v_B, v_C. Jsou-li však dány některé jiné trojice prvků, dostáváme úlohy mnohem obtížnější. Seznámili jste se patrně i s umělými obraty, pomocí kterých se sestrojuje trojúhelník, je-li dáno v_A, v_B, v_C nebo t_A, t_B, t_C.

Při řešení následující úlohy použijeme posunutí a středové souměrnosti jiným způsobem než dosud. Pokud tento způsob neznáte, bude vám připadat umělý. Později se však přesvědčíte, že je to velmi užitečný způsob řešení úloh o trojúhelníku.

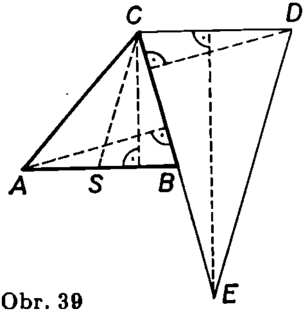
Příklad 22. *Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány úsečky shodné po řadě s prvky t_C, v_A, v_C trojúhelníku.*

Řešení (obr. 39). Zobrazme bod C jednak v $T(A \to B)$ jednak ve středové souměrnosti S o středu B. Obrazy označme po řadě písmeny D, E. Dokažte si sami:

---

*) V úvaze, která následuje, bude výhodné značit těžnice a výšky indexy vrcholů, ne stran trojúhelníků. (Vrcholy budeme mít v obrázcích označeny, ale strany ne.)

Má-li trojúhelník ABC požadované vlastnosti, má trojúhelník CDE stranu $DE = 2t_C$, výšku $v_D = v_A$, výšku $v_E = 2v_C$.



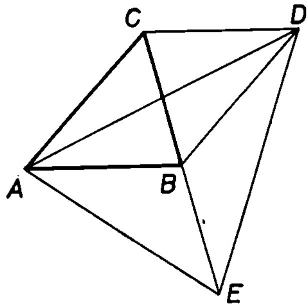
Obr. 39

Známe tedy v trojúhelníku CDE stranu DE a výšky vycházející z jejích koncových bodů. Z těchto podmínek lze trojúhelník CDE sestrojit. Bude však možno setrojit body A, B, budeme-li znát trojúhelník CDE? Zřejmě ano, protože bod B je středem souměrnosti S $(C \rightarrow E)$ a bod A je obrazem bodu B v posunutí T_1^{-1} $(D \rightarrow C)$. Jistě snadno dokončíte řešení celé úlohy. Dejte pozor při diskusi na to, že konstrukce trojúhelníku CDE může mít dvě různá řešení. Každé z nich je východiskem k jedné konstrukci trojúhelníku ABC.

Uvedenou úlohu lze řešit i jiným způsobem, např. pomocí podobnosti trojúhelníků. Naše řešení spočívalo v tom, že jsme našli pomocný trojúhelník CDE, jehož prvky závisejí jednoduchými vztahy na daných prvcích trojúhelníku ABC. Pokusme se nyní aplikovat tento způsob řešení i na jiné případy.

Sestrojme si znovu trojúhelník ABC a body D, E

(obr. 40), vyznačme však všechny možné trojúhelníky, které mají za vrcholy tři z bodů A, B, C, D, E. Je jich devět, v každém si stanovíme ty jeho strany, úhly těž-



Obr. 40

nice a výšky, které lze vyjádřit jednoduchou závislostí na prvcích trojúhelníka ABC. Pišme výsledky do tabulky (viz str. 64).

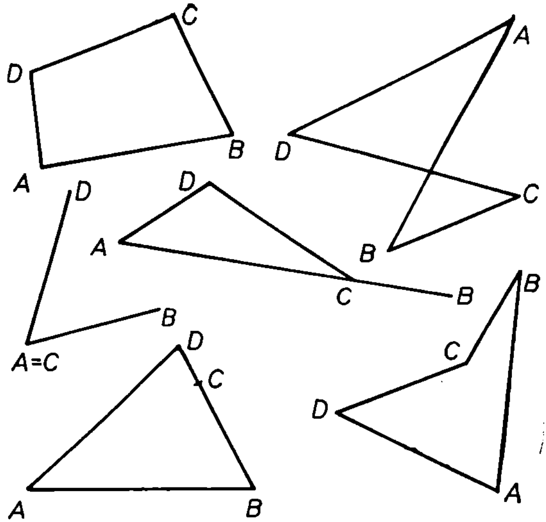
Naučme se nyní pracovat s hotovou tabulkou. Zvolte si libovolnou trojici prvků trojúhelníka ABC, např. v_C, β, t_B. Hledejte, na kterém řádku (od třetího počínaje) jsou tyto prvky napsány současně. Najdete řádek příslušející trojúhelníku ABE. Na náčrtku trojúhelníku ABE uvidíte, že znáte jeho stranu AE, $\sphericalangle ABE =$ $= \pi - \beta$ a výšku $v_E = v_C$. Trojúhelník ABE můžete snadno sestrojit, umístíte-li úhel ABE. Konstrukce hledaného trojúhelníku je pak snadná. Další pokyny a poznámky k práci s tabulkou najdete ve cvičeních.

Podívejme se blíže na *pojem čtyřúhelníku*. Víte ze své zkušenosti, že trojúhelník ABC považujeme za sestrojený, vyznačíme-li jeho obvod, tj. uzavřenou lomenou

Trojúhelník	strany	úhly	těžnice	výšky
ABC	a, b, c	α, β, γ	$t_A, t_B, t_C,$	v_A, v_B, v_C
CBD	b, c, a	β, γ, α	$t_B, t_C, t_A,$	v_B, v_C, v_A
BDE	$2t_C, a, b$	$\pi - \gamma$, -, -	$\frac{1}{2}c$, -, -	-, v_A, v_B
CDE	$2t_C, 2a, c$	β, -, -	-, b, -	-, $v_A, 2v_C$
ACE	$2a, 2t_B, b$	-, γ, -	c, -, -	v_A, -, $2v_B$
ADE	$2t_C, 2t_B, 2t_A$	-, -, -	$\frac{3}{2}c, \frac{3}{2}b, \frac{3}{2}a$	-, -, -
ABE	$a, 2t_B, c$	-, $\pi - \beta$, -	-, $\frac{1}{2}b$, -	v_A, -, v_C
ABD	$b, 2t_A, c$	-, π, - α,-	-, $\frac{1}{2}a$, -	v_B, -, v_C
ACD	$c, 2t_A, b$	-, $\pi - \alpha$, -	-, $\frac{1}{2}a$, -	v_C, -, v_B

čáru $ABCA$, která není částí přímky. Tento návyk nás však může v případě čtyřúhelníku dovést do nečekaných situací. Lomená čára $ABCDA$, která není částí přímky, může mít i jiné tvary, než je ten, který má obvod konvexního čtyřúhelníku. Na obr. 41 jsou znázorněny možné případy.

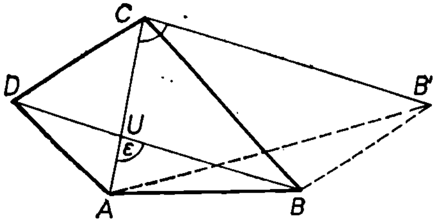
Při řešení úloh požadujících sestrojení čtyřúhelníku sestrojujeme vlastně lomenou čáru $ABCDA$ na základě velikostí jejích úseček, úhlů sevřených jejími úsečkami apod. Nemůžeme se proto divit, že nám vyjdou i podivné čtyřúhelníky jako na obr. 41b, c, d, e, f.



Obr. 41 a—f

Příklad 23. *Jsou dány úsečky a, c, e, f a úhel ε. Sestrojte čtyřúhelník ABCD, v němž je AB = a, CD = c, AC = e, BD = f a úhel ε je shodný s tím úhlem přímek AC, BD, jehož ramena procházejí body A, B.*

Rozbor. Předpokládáme, že úloha má řešení, označme průsečík jeho úhlopříček písmenem U (obr. 42). Je zřejmé, že úhlu ε nemůžeme využít, jestliže neznáme bod U. Napadá tu myšlenka, zda by nebylo možno úhel přemístit tak, aby na jeho ramenech ležely dané úsečky (v příkladě 16 jsme toho úspěšně využili). Zobrazme v posunutí $T(D \to C)$ bod B v bod B', tím přejde úhlopříčka BD v úsečku CB' rovnoběžnou s DB, je proto $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$. Dokázali jsme:



Obr. 42

Má-li čtyřúhelník ABCD požadované vlastnosti, má trojúhelník AB'C stranu $AC = e$, $CB' = f$, $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$.

Na základě těchto vlastností trojúhelník $AB'C$ snadno sestrojíme. Zabývejme se však vztahem bodů D, B k trojúhelníku $AB'C$. Dokažte si sami, že platí:

Má-li trojúhelník AB'C uvedené vlastnosti,
leží bod B 1. *na kružnici* $k_1 (B', c)$,
2. *na kružnici* $k_2 (A, a)$.

Bod D je obrazem bodu C v posunutí $T^{-1} (B' \rightarrow B)$.

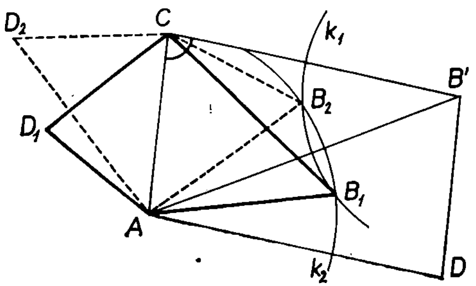
Celý svůj postup stavíme na předpokladu, že vznikne trojúhelník $AB'C$. Vznikne opravdu vždy? Zamyslete se nad tím, v příkladě 17 jste viděli, že to může být rozhodující pro další postup.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník AB'C, který má* $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$, $AC = e$, $CB' = f$.
K_2: *Sestrojíme kružnici* $k_1 (B', c)$.
K_3: *Sestrojíme kružnici* $k_2 (A, a)$.
K_4: *Sestrojíme společný bod B kružnic* k_1, k_2.
K_5: *Sestrojíme obraz D bodu C v posunutí* $T^{-1} (B' \rightarrow B)$.
K_6: *Sestrojíme lomenou čáru ABCDA.*

Zkouška. Z konstrukcí K_3, K_4 plyne, že je $AB = a$, z konstrukce K_1 vyplývá $AC = e$. Obdobně snadno ověříte, že je $BB' = c$, $CD = BB' = c$ a $BD = B'C = f$. Úhel $B'CD = \varepsilon$, jeho rameno CB' přejde v posunutí T^{-1} v polopřímku DB. Je proto úhel ε shodný s tím úhlem přímek AC, BD, jehož ramena procházejí body A, B. Ověřili jsme, že sestrojený útvar se čtyřmi význačnými body A, B, C, D má všechny vlastnosti, které úloha požaduje. Nemůžeme však dokázat, že tento útvar je konvexním čtyřúhelníkem. Popsanou konstrukcí jsme sestrojili uzavřenou lomenou čáru $ABCDA$, která má vlastnosti žádané v textu úlohy.

Diskuse. Počet uzavřených lomených čar $ABCDA$ závisí pouze na počtu společných bodů kružnic k_1, k_2. Zajímá-li nás, kdy je tato čára obvodem konvexního čtyřúhelníka, musíme najít množinu všech bodů B, pro něž platí, že úsečky BD, AC mají společný vnitřní bod. Dokažte si, že takovou množinou bodů B je vnitřek rovnoběžníka $ACB'E$ (obr. 43). Na obr. 43 vidíte, že mohou existovat také dva konvexní čtyřúhelníky $ABCD$,



Obr. 43

které jsou řešením úlohy. Proveďte si sami podrobnou diskusi.

22. Sestrojte příčku dvou rovnoběžek a, b, která je k oběma kolmá a je z daného bodu M vidět pod daným úhlem α.

[Sestrojte nejdříve libovolnou příčku a množinu bodů, z nichž je vidět pod daným úhlem α.]

23. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a směr s. Sestrojte přímku směru s, na které vytínají dané kružnice shodné tětivy.

[Přemístěte vhodně střed jedné tětivy do středu druhé tětivy.]

24. Zobecněte úlohu v příkladě 20 v tom smyslu, že body P, Q budou libovolné dva body kružnice. Využijte vlastností obvodového úhlu.

25. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

1. t_A, α, v_B,	4. t_B, c, a,
2. t_A, b, α,	5. t_B, γ, c,
3. t_A, t_B, t_C,	6. t_C, v_A, β.

[Najděte vždy v tabulce trojúhelník, jehož prvky obsahují dané prvky trojúhelníku ABC. Zjistěte, které strany, úhly nebo výšky pomocného trojúhelníku znáte a jak jej pomocí nich setrojíte. Zapište si, jak potom sestrojíte vrcholy hledaného trojúhelníku ABC.]

26. Všimněte si, že v tabulce jsou vyjádřeny výšky všech trojúhelníků pomocí výšek výchozího trojúhelníku ABC, kdežto těžnice jsou někdy vyjádřeny pomocí stran a obráceně. To znamená, že pomocí trojúhelníků zapsaných na třetím až devátém řádku můžeme výhodně řešit ty úlohy, ve kterých jsou dány těžnice s dalšími prvky. Každou z nich lze řešit i dalšími způsoby, pokuste se vyřešit jiným způsobem úlohy ze cvičení 25.

27. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, znáte-li velikosti jeho stran a velikost toho úhlu úhlopříček, jehož ramena procházejí vrcholy A, B.

28. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li známa odchylka ε přímek AB, CD a dále délky všech stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníku.

[Užijte posunutí $T(D \to C)$ a sestrojte úhel, který má velikost ε a vrchol v bodě A.]

KAPITOLA VI

OTOČENÍ

V předcházejících kapitolách jste se seznámili s podrobnými řešeními úloh pomocí zobrazení a některé z nich jste si sami rozřešili. V této kapitole nebudeme proto rozvádět úvahy o řešení úloh; ukážeme si tři typické úlohy, které řešíme pomocí otočení.

Definice otočení (rotace) vyžaduje *znalost pojmu orientovaného úhlu.* V této publikaci nemůžeme opakovat vlastnosti orientovaných úhlů, budeme je proto považovat za známé. Připomeňme si jen, že (neorientovaný) úhel AVB je možno „orientovat" dvěma různými způsoby. Můžeme považovat za počáteční rameno polopřímku VA a dostaneme tak orientovaný úhel $\widehat{AVB}$, nebo považujeme za počáteční rameno polopřímku VB a dostaneme orientovaný úhel $\widehat{BVA}$.

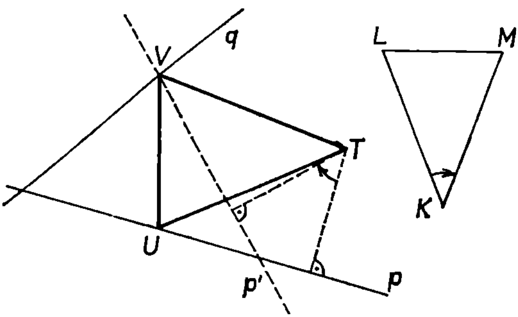
Otočení v rovině je jednoznačně určeno, je-li dán bod S a orientovaný úhel $\hat{\omega}$. Otočení se středem S a úhlem otočení $\hat{\omega}$ budeme značit $R(S, \hat{\omega})$.

Je-li dán (neorientovaný) úhel AVB, existují dvě otočení se středem V, která zobrazují jedno rameno úhlu v druhé rameno. Jsou to otočení $R_1(V, \widehat{AVB})$, $R_2(V, \widehat{BVA})$.

Je vám jistě zřejmé, že uvedené dvě rotace R_1, R_2 jsou zobrazení navzájem inverzní. Zvláštním případem rotace je středová souměrnost, která je, jak víme, totožná se zobrazením k ní inverzním.

Příklad 24. *Jsou dány dvě přímky p, q, bod T a rovnoramenný trojúhelník KLM. Sestrojte trojúhelník TUV podobný trojúhelníku KLM tak, aby vrchol U ležel na přímce d a vrchol V na q.*

Rozbor. Na obr. 44 je zakreslen trojúhelník TUV a dané útvary. Máme opět dva neznámé body U, V, jeden v druhý můžeme zobrazit rotací kolem středu T. Úhel této rotace je buď shodný s orientovaným úhlem $\widehat{LKM}$ nebo s orientovaným úhlem $\widehat{MKL}$.



Obr. 44

Neznámý bod V leží 1. *na přímce q,*
2. *na obrazu p' přímky p v otočení*
$R_1(T, \widehat{LKM})$ *nebo* $R_2(T, \widehat{MKL})$.

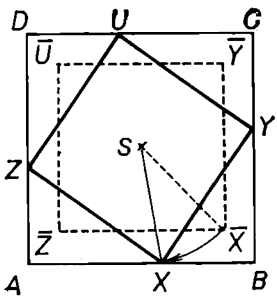
Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz přímky p v otočení* $R_1(T, \widehat{LKM})$.
K_2: *Sestrojíme společný bod V přímek p', q.*

K_3: *Sestrojíme obraz U bodu V v otočení* $R_1^{-1}(T, \widehat{MKL}) = R_2$.
K_4: *Sestrojíme trojúhelník TUV.*

Zapište sami konstrukci pomocí $R_2(T, \widehat{MKL})$ a proveďte zkoušku výsledků konstrukce. V diskusi dojdete k závěru, že může existovat také nekonečně mnoho řešení. Při jaké vzájemné poloze přímek p, q nastane takový případ? Narýsujte si jej.

Příklad 25. *Je dán čtverec ABCD a úsečka MN. Sestrojte čtverec XYUV, jehož každý vrchol leží na jedné straně čtverce ABCD a strana XY = MN.*



Obr. 45

Řešení je jednoduché, dokážete-li, že střed čtverce $XYUZ$ je totožný se středem čtverce $ABCD$. Sestrojíme-li libovolný čtverec $\bar{X}\bar{Y}\bar{U}\bar{Z}$ se středem S (obr. 45) shodný se čtvercem $XYUZ$, existuje rotace se středem S, která zobrazí $\bar{X} \to X$, $\bar{Y} \to Y$, $\bar{U} \to U$, $\bar{Z} \to Z$. Úloha je pozoruhodná tím, že neznáme úhel otočení, pouze jeho střed. Musíme proto uvažovat, kde leží obrazy bodu X ve všech otočeních se středem S. Snadno si dokážete, že tímto útvarem je kružnice $k(S, \overline{SX})$. Konstrukce a ostatní části řešení úlohy vycházejí z tohoto závěru rozboru:

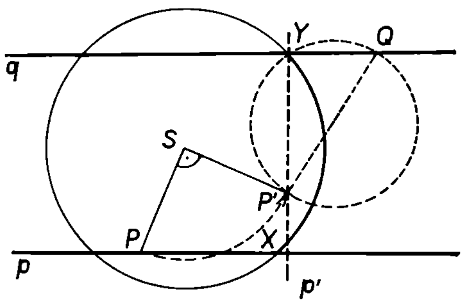
Neznámý bod X leží

1. *na úsečce* AB,
2. *na kružnici* $k(S, \overline{SX})$.

Poloměr kružnice k můžeme sestrojit i bez pomoci bodu $\overline{X}$, protože je zřejmě $\overline{SX} = \frac{1}{2} MN . \sqrt{2}$. V diskusi dojdete k nejvýše dvěma různým řešením.

Příklad 26. *Je dána kružnice* $k(S, r)$ *a dva různé body* P, Q. *Sestrojte dvě rovnoběžky* p, q *procházející body* P, Q *tak, aby protínaly kružnici* k *v bodech* X, Y *omezujících čtvrtinu kružnice.*

Řešení. I v tomto případě se nám osvědčí metoda užitá při řešení úloh v příkladech 11 a 20; zobrazíme bod X v bod Y (obr. 46).
Vhodným zobrazením je zřejmě otočení kolem bodu S o pravý úhel v kladném nebo záporném smyslu. Přímka



Obr. 46

p rovnoběžná s přímkou q přejde tímto otočením v přímku p' kolmou ke q. Docházíme k závěru, že

bod Y leží 1. *na dané kružnici k,*
2. *na Thaletově kružnici o průměru $P'Q$.*

Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme obraz P' bodu P v rotaci* $R_1(S, \hat{\omega} = 90°)$.
K_2: *Sestrojíme kružnici o průměru $P'Q$.*
K_3: *Sestrojíme společný bod Y kružnic k, k_1.*
K_4: *Sestrojíme bod X jako obraz bodu Y v otočení* R_1^{-1}.
K_5: *Sestrojíme přímky $p = PX$, $q = QY$.*

Popište konstrukci v případě, že použijete rotace $R_2(S, \hat{\omega} = -90°)$. Proveďte si podrobnou zkoušku výsledků konstrukce a diskusi. Kdy bude mít úloha nekonečně mnoho řešení? Jaký je největší možný konečný počet řešení? Narýsujte si jednotlivé případy.

Touto úlohou končí naše společná cesta, během níž jsme poznávali, jak nám mohou shodná zobrazení pomoci při řešení konstrukčních úloh. Pokud jste jen brožuru prolistovali, projděte si ji ještě jednou a zaměřte se na sledování logického postupu řešení a jeho formulování. Poznatky a zkušenosti získané v tomto směru můžete uplatnit při stylizaci řešení soutěžních úloh Matematické olympiády.

29. Je dána kružnice k a bod A. Sestrojte tětivu XY kružnice k, která má danou délku a prochází bodem A.

[Narýsujte si libovolnou tětivu dané délky a použijte vhodného otočení.]

30. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2 a bod A ležící na k_1. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vrchol B leží na k_1 a vrchol C na k_2.

[Znáte střed i úhel otočení převádějícího bod B v bod C.]

31. Jsou dány dvě různé kružnice k_1, k_2 se společným bodem A. Sestrojte čtverec $ABCD$, jehož vrchol B leží na k_1 a vrchol D na k_2.

32. Je dána kružnice k, bod B a úsečka MN. Sestrojte tětivu $XY = MN$ kružnice k tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60°.

[Postupujte obdobně jako ve cvičení 22.]

Obtížnější úlohy

33. Zobecněte úlohu v příkladě 26 v tom smyslu, aby hledané body X, Y omezovaly oblouk kružnice příslušející středovému úhlu α.

34. Dokažte, že složením středové souměrnosti S a posunutí T vznikne středová souměrnost s jiným středem.

[Zobrazte několik bodů X roviny ve zobrazení ST ($X \to X'$) a sestrojte středy úseček XX'. Používejte vlastností střední příčky trojúhelníka.]

35. Dokažte, že složením lichého počtu středových souměrností vznikne středová souměrnost, kdežto složením sudého počtu středových souměrností vznikne posunutí nebo identita.

[Použijte věty formulované ve cvičení 34 a známé věty, že složením dvou posunutí vznikne posunutí nebo identita.]

36. Narýsujte si čtverec $S_1 S_2 S_3 S_4$. Zdůvodněte pomocí věty vyslovené ve cvičení 35, že každá lomená čára $XYZUV$, jejíž úsečky XY, YZ, ZU, UV mají po řadě středy S_1, S_2, S_3, S_4, je uzavřená, tj. bod $X \equiv V$.

[Zobrazte bod X ve zobrazení, které vznikne složením souměrností S_1, S_2, S_3, S_4 se středy S_1, S_2, S_3, S_4. Porovnejte zobrazení $\mathsf{S}_1\mathsf{S}_2$, $\mathsf{S}_3\mathsf{S}_4$.]

37. V rovině je dáno pět libovolných bodů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5. Sestrojte uzavřenou lomenou čáru $ABCDEA$, která má tu vlastnost, že dané body jsou po řadě středy úseček AB, BC, CD, DE, EA lomené čáry.

[Při rozboru úlohy sestrojte obraz bodu A a libovolného bodu X v zobrazení $\mathsf{S}_1\mathsf{S}_2\mathsf{S}_3\mathsf{S}_4\mathsf{S}_5$, které dostanete složením středových souměrností podle středů S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.]

38. Je dána přímka p s bodem M, kružnice k a úhel α. Sestrojte kružnici, která se dotýká v bodě M přímky p a protíná

danou kružnici tak, že tečny těchto kružnic ve společném bodě svírají úhel o velikosti α.

[V rozboru zvolte osu souměrnosti tak, abyste zobrazili průsečík obou kružnic do bodu M. Obraz kružnice k v této souměrnosti označte k'. Zamyslete se nad tím, zda je možno sestrojit kružnici k' dříve než znáte osu souměrnosti.]

39. Jsou dány tři přímky procházející bodem O a dále je dán bod $A \neq O$. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který nastane jedna z možností:

1. jeho výšky leží na daných přímkách,
2. jeho těžnice leží na daných přímkách,
3. osy jeho vnitřních nebo vnějších úhlů leží na daných přímkách.

[První případ je snadný, v dalších užijte vhodné souměrnosti.]

40. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, jsou-li dány velikosti úseček AC, AD, BC a velikosti úhlů ADB, DBC.

[Jedno z možných řešení začíná konstrukcí jistého trojúhelníku, jehož vnitřní úhel je shodný s rozdílem daných úhlů. Jako část řešení se objevuje úloha obdobná úloze v příkladě 18. Můžete však najít jiné řešení.]

41. Jsou dány přímky a, b procházející po řadě danými body A, B. Dále je dán směr s. Sestrojte přímku daného směru tak, aby protínala přímku a v bodě X, přímku b v bodě Y a aby platilo $AX = BY$.

[Úsečku AX můžete zobrazit na úsečku BY vhodným otočením. Zjistěte velikost některého úhlu s vrcholem X nebo Y, jehož ramena procházejí danými body nebo středem otočení převádějícího přímku a v přímku b.]