VÝSLEDKY CVIČENÍ

1.1 $P(32) = 32.31\ldots\ldots 2.1$

1.2 a) $V(4, 90) = 90.89.88.87$, b) $K(3, 90) = \dfrac{90.89.88}{3.2.1} =$
$= 117480$

1.3 $P(35) = 35.34.\ldots\ldots 2.1$

1.4 $K(2, 5) = \dfrac{5.4}{2.1} = 10$

1.5 $V(2, 3714) = 3714.3713$

1.6 $K(6, 49) = \dfrac{49.48.47.46.45.44}{6.5.4.3.2.1}$

1.7 $V(4, 7) = 7.6.5.4 = 840$

1.8 $P(8) = 8.7.\ldots.2.1 = 40320$

1.9 $K(3, 7) = \dfrac{7.6.5}{3.2.1} = 35$

1.10 $V(3, 6) = 6.5.4 = 120$

1.11 Čtverečky považujme přirozeným způsobem za souřadnicovou soustavu. Ten z bodů, který není více vpravo než druhý bod, považujeme za počátek, druhý bod má pak souřadnice $[m, n]$. Je-li $n < 0$, neexistuje žádná cesta, je-li $n \geqq 0$, existuje právě $K(n, m + n)$ cest.

1.12 $[0, k]$ a $[1, k]$ pro všechna nezáporná celá k.

1.13 Logaritmováním zjistíme, že $V(35, 50)$ má 53 číslic a $K(35, 50)$ má 13 číslic.

2.1 $7! = 5040, \binom{45}{3} = 14190, \binom{72}{68} = \binom{72}{4} = 1028790$

2.2 $\quad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$

$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$

$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$

2.3 $n! + (n - 1)!\, n^2 = (n - 1)!\, (n + n^2) = (n - 1)!\, n(n + 1) = (n + 1)!$

2.4 2

2.5 $\binom{11}{4}$

2.6 5

2.7 Druhé

2.8 První je rovno $n!\, [1 + (n + 1)(n + 2)(n + 3)]$, zatímco druhé jen $n!\, [(n + 1) + (n + 1)(n + 2)] = n!\, [(n + 1)(n + 3)]$.

2.9 Pro sudá n: $\binom{n}{n} < \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} < \binom{n}{2} =$

$$= \binom{n}{n-2} < \ldots < \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k+1} < \binom{n}{k},$$

kde $k = \dfrac{n}{2}$,

pro lichá n: $\binom{n}{n} < \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} < \binom{n}{2} =$

$$= \binom{n}{n-2} < \ldots < \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k}, \text{ kde } k = \frac{n+1}{2}.$$

2.10 b) Rozdělte množinu všech q-prvkových kombinací z čísel $1, 2, \ldots, p$ na disjunktní podmnožiny podle největšího čísla, které obsahují.

2.11 c) Rozdělte množinu všech dvojic čísel $1, 2, \ldots, k + 1$ na disjunktní podmnožiny podle většího z čísel, které obsahují.

2.12 b) Ke každé r-prvkové kombinaci z p prvků postupně přidejte všechny $(q - r)$-prvkové kombinace z ostatních

$p - r$ prvků. Dostanete tak všechny q-prvkové kombinace z p prvků, každou $K(r, q)$-krát.

2.13 31

2.14 Jsou-li čísla kladná, je jejich součin dělený číslem $j!$ roven kombinačnímu číslu $\binom{k}{j}$, kde k je největší z nich. Vzhledem ke svému kombinatorickému významu je $\binom{k}{j}$ celé číslo. Je-li některé z čísel rovno 0, je součin také 0 a je dělitelný jakýmkoli přirozeným číslem. Jsou-li čísla záporná, je jejich součin dělený číslem $j!$ - až na znaménko v případě lichého j - opět roven $\binom{k}{j}$, kde k je absolutní hodnota nejmenšího z nich.

3.5 Součet kombinačních čísel $\binom{n}{k}$ je pro lichá k roven součtu prvků $(n - 1)$-tého řádku Pascalova trojúhelníka. Totéž platí pro sudá k.

3.6 a) 2^{n-1}
b) $(-1)^n$

3.7 a) $(a + b)^{m+p} = (a + b)^p (a + b)^m$
b) Množinu všech m-prvkových podmnožin $(m + p)$-prvkové množiny rozdělte podle toho, kolik z určitých p prvků obsahují.

3.8 $(a + b)^p = (b + a)^p$

3.9 $3^6 \binom{10}{4} = 153090$, ano

3.10 $t^{18} - 6\sqrt{3}\, t^{15} u + 45t^{12}u^2 - 60\sqrt{3}\, t^9u^3 + 135t^6u^4 - 54\sqrt{3}\, t^3u^5 + 27u^6$

3.11 $(10 + 1)^{10} - 1$

3.12 1

3.13 Pravá strana jsou první dva členy mnohočlenu na levé straně, ostatní jeho členy jsou nezáporné.

3.14 $2^9 - 1 = 511$

3.15 $2730 = 2 . 3 . 5 . 7 . 13$, $2^5 = 32$ dělitelů
(Prázdné množině odpovídá dělitel 1.)

3.16 d) Jde o součet počtů prvků všech podmnožin n-prvkové množiny. Jeho dvojnásobek dostaneme tak, že ke každé podmnožině přidáme její doplněk a počty prvků sečteme; vyjde $n\ 2^n$.

3.17 Vepsáním nul vzniklo číslo $(10^{k+1} + 1)^4$. Jeho druhá odmocnina vznikne vepsáním k nul do každé mezery mezi číslicemi čísla 121.

4.2 Uspořádejme prvky k-prvkové množiny. Její podmnožiny si vzájemně jednoznačně odpovídají s uspořádanými k-ticemi znamének $+$ a $-$ tak, že na j-tém místě je $+$ právě když j-tý prvek množiny je obsažen v příslušné podmnožině; je jich $V_0(k, 2) = 2^k$.

4.4 Platí až na to, že pro $k = 0$ není pravá strana vzorce (12) definována.

4.5 $K(j, k) = \binom{k}{j} = \dfrac{k!}{j!\,(k-j)!} = P_0(j, k-j)$. Za situace popsané v řešení 4.2 si j-prvkové kombinace odpovídají s uspořádanými k-ticemi znamének obsahujícími právě j znamének $+$.

4.6 $P_0(17, 8, 6, 4) = \dfrac{35!}{17!\ 8!\ 6!\ 4!}$

4.7 $V_0(6, 26) = 26^6$

4.8 Pro $n \geqq 4$ si průsečíky úhlopříček vzájemně jednoznačně odpovídají se čtveřicemi vrcholů a je jich tedy $\binom{n}{4}$.

4.9 $4 . 6 . 3 . 23 . 4 . 5 . 2 . 12 = 794880$

4.10 $V_0(12, 3) = 3^{12} = 531441$

4.12 Přihlížíme-li k pořadí vagonů, $V_0(5, 3) = 3^5 = 243$.

4.13 $K_0(10,4) = \binom{13}{10} = 286$

4.14 $P_0(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5) = \dfrac{35!}{(5!)^7}$

4.15 Pořadí rozdělíme na $\binom{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{p_1}$ disjunktních skupin podle toho, na kterých místech se vyskytují prvky 1. druhu. Je tedy

$$P_0(p_1, p_2, \ldots, p_k) =$$
$$= \binom{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{p_1} P_0\,(p_2, \ldots, p_k).$$

Opakováním tohoto postupu dostaneme vzorec ze cvič. 4.16. Ten přejde ve vzorec (13) zkrácením faktoriálů.

4.17 a) $K_0(n, k) = \binom{n + k - 1}{n}$. Řešení $x_1, x_2, \ldots. x_k$ si totiž vzájemně jednoznačně odpovídají s n-prvkovými kombinacemi s opakováním z prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$, v nichž se pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ prvek m_i opakuje právě x_i-krát.

b) Ekvivalentní rovnice

$$(x_1 - c_1) + (x_2 - c_2) + \ldots + (x_k - c_k) =$$
$$= n - c_1 - c_2 - \ldots - c_k$$

má v daném oboru právě tolik řešení jako rovnice

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - c_1 - c_2 - \ldots - c_k$$

v oboru nezáporných celých čísel, totiž

$\binom{n + k - c_1 - c_2 - \ldots - c_k - 1}{k - 1}$ v případě $c_1 + c_2 + \ldots + c_k \leq n$ a žádné v případě $c_1 + c_2 + \ldots + c_k > n$.

c) Právě tolik jako rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = n$$

v oboru celých nezáporných čísel, tedy podle a) $\binom{n+k}{n}$.

4.18 Věta se dokazuje analogicky k důkazu binomické věty, jejímž je zobecněním: Roznásobíme-li nm členů $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \ldots (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)$, dostaneme sčítanec $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$ tolikrát, kolik je pořadí s opakováním k_1 prvků a_1, k_2 prvků $a_2, \ldots, k_m$ prvků a_m, totiž $\dfrac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!}$ -krát. Vpravo je $\binom{n+m-1}{m}$ sčítanců.

4.19 a) Jde o součet všech počtů pořadí s opakováním k_1 prvků 1. druhu, k_2 prvků 2. druhu, ..., k_m prvků m-tého druhu, čili o počet všech $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$-prvkových variací s opakováním z m prvků.

b) Dosaďte do multinomické věty $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 1$.

4.20 Vzhledem ke kombinatorickému významu je

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!}{a_1! a_2! \ldots a_n!} \geq 1.$$

4.21 j-prvkové variace s opakováním z prvků množiny $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ jsou právě prvky kartézského součinu $\underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{j\text{-krát}}$.

5.1 $K_0(7, 3)\, K_0(5, 3) = \binom{9}{2}\binom{7}{2} = 756$

5.2 $P(5)\, K(2, 32)\, K(3, 32) = 5! \binom{32}{2}\binom{32}{3}$

5.3 $P_0(8, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)\, K(6, 38) =$

$$= \frac{39!}{8!5!(4!)^2 (3!)^3 (2!)^2} \binom{38}{6}$$

5.4 $P(3) P(5) + K(2, 4) P(3) P(5) = 3!\,5! + \binom{4}{2} 3!\,5! = 5040$

5.5 a) nezmění se,
b) bude poloviční.

5.6 $\dfrac{P(k)}{P(3)} = V(k - 3, k) = \dfrac{k!}{3!}$ (k je počet závodníků)

5.7 Metodou matematické indukce.

5.8 Označme s_n počet vlajek, které se nezmění obrácením. Hledaný počet bude $s_n + \frac{1}{2}(v_n - s_n) = \frac{1}{2}(v_n + s_n)$. Pro sudá n je $s_n = v_{\frac{n}{2}-1}$ a pro lichá n je $s = v_{\frac{n-1}{2}} + v_{\frac{n-1}{2}-1} = v_{\frac{n+1}{2}}$.

5.9 V prvním případě je každá šestice počítána čtyřikrát a ve druhém případě třikrát. Výsledek má tedy být

$$8^4 \left[\frac{1}{4}\binom{4}{2}\binom{7}{1}^2 + \frac{1}{3}\binom{4}{1}\binom{7}{2}\right] = 415\,744$$

5.10 $K(2, 4)\, K(4, 7) + K(3, 4)\, K(3, 7) + K(4, 4)\, K(2, 7) =$

$$= \binom{4}{2}\binom{7}{4} + \binom{4}{3}\binom{7}{3} + \binom{4}{4}\binom{7}{2} = 371$$

5.11 Není. Vybereme-li nejprve Petru a Pavlu a pak k nim přidáme Janu, Karla, Frantu a Vaška, dostaneme totéž, jako když nejprve vybereme Pavlu a Janu a pak k nim přidáme Petru a ty tři chlapce.

5.12 $\dfrac{P(20 + 4)}{P(4)} = \dfrac{24!}{4!}$

5.13 $K(4, 10) - K(2, 8) = \binom{10}{4} - \binom{8}{2} = 182.$

5.14 $P_0(2, 1, 1, 1, 1, 1)\, P_0(2, 2)\, K(4, 8) = \dfrac{7!}{2!} \dfrac{4!}{(2!)^2} \binom{8}{4}$

5.15 $\dfrac{P(8)^2}{2^8 P(4)} + V(2, 8)^2 \dfrac{P(6)^2}{2^6 P(3)} = \dfrac{17(8!)^2}{2^8 4!}$

5.16 V úvahu přicházejí případy *FaTaFaTaFaTaF* nebo *TaFaTaFaTaFaT*, kde *a* označuje Angličana, *F* blok Francouzů a *T* blok Turků. Hledaný počet bude

$$P(6)P(7)\,P(10)\,[K(3,6)\,K(2,9) + K(2,6)\,K(3,9)] =$$

$$6!\,7!\,10!\left[\binom{6}{3}\binom{9}{2} + \binom{6}{2}\binom{9}{3}\right] = 6!\,7!\,10!\,.\,1980$$

5.17 $K(1, 3)\,K(11, 33)\,V_0(22, 2) - 2P_0(11, 11, 11) =$

$$= \binom{3}{1}\binom{33}{11} 2^{22} - 2\,.\,\frac{33!}{(11!)^3}$$

Jiné řešení:

$$P(3) \sum_{u=0}^{10} P_0(11, u, 22 - u) + P_0(11, 11, 11) =$$

$$= 6 \sum_{u=0}^{10} \frac{33!}{11!\,u!\,(22 - u)!}.$$

5.18 1568

5.19 $(4!)^2$

5.20 ČísLic neobsahujících pětku; je jich $9^6 = 531\,441$.

5.21 Pro n schodů označme počet způsobů s_n. Zřejmě $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 4$. Pro $n > 4$ platí rekurentní vzorec

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3}.$$

Odtud po několika krocích dostaneme

$$s_{10} = 274.$$

5.22 a) Je jich právě tolik, jako je všech řádků složených z j znamének $+$ a $k - j$ znamének $-$, přičemž žádná dvě $+$ nejsou vedle sebe. Podle úlohy 6 je jich $\binom{k - j + 1}{j}$ pro $2j \leqq k + 1$, 0 jinak.

b) Podobně jako v a) převedeme problém na úlohu 7.

5.23 Pro $n \geqq k$ právě $\binom{n-1}{k-1}$ řešení, jinak žádné.

a) Řešení si vzájemně jednoznačně odpovídají s n-prvkovými kombinacemi s opakováním z k prvků, v nichž se každý prvek opakuje alespoň jednou. Ty si vzájemně jednoznačně odpovídají se všemi pořadími s opakováním n teček a $k-1$ čárek takovými, že žádné dvě čárky nejsou vedle sebe. Dále viz úlohu 6.

b) Ve cvič. 4.17b) položíme $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 1$.

5.24 Je-li $k = 1$, žádné takové řešení neexistuje. Pro $k = 2$ existuje jediné takové řešení. Dále buď $k > 2$. Řešení, pro něž $x_1 < x_k$, je stejný počet jako těch, pro něž $x_1 > x_k$. Všech řešení je právě $\binom{2n+k-1}{k-1}$ (viz cvič. 4.17).

Určíme, pro kolik z nich je $x_1 = x_k$. Uvažujme rovnici

$$x_2 + \ldots + x_{k-1} = 2(n-x)$$

o neznámých $x_2, \ldots, x_{k-1}$. To má pro každé celé $x \in \{0, 1, \ldots, n\}$ právě

$$\binom{2(n-x)+k-3}{k-3}$$

řešení. Počet všech řešení, pro něž $x_1 = x_k$, je tedy

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{2(n-x)+k-3}{k-3}.$$

Hledaný počet je pak

$$\frac{1}{2}\left[\binom{2n+k-1}{k-1} - \sum_{x=0}^{n}\binom{2(n-x)+k-3}{k-3.}\right].$$

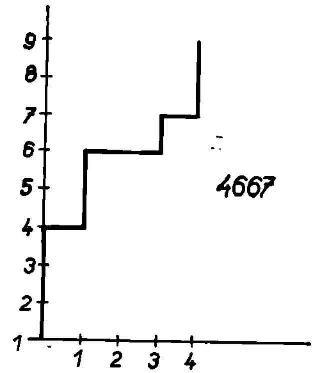
5.25 a) $\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$

b) $\sum\limits_{r=1}^{\min(m,n)} (m-r+1)(n-r+1)$

5.26 $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$

5.27 Pokud $a + 1 < b$, budeme psát $a \ll b$.
Jestliže
$$1 \leqq a_1 \ll a_2 \ll \ldots \ll a_6 \leqq 49,$$
potom
$$1 \leqq a_1 < a_2 - 1 < \ldots < a_6 - 5 \leqq 44.$$
Obráceně: Jestliže
$$1 \leqq b_1 < b_2 < \ldots < b_6 \leqq 44,$$
je
$$1 \leqq b_1 \ll b_2 + 1 \ll \ldots \ll b_6 + 5 \leqq 49.$$
Šestic, které vyhovují podmínce, je tedy právě tolik jako všech šestic z $\{1, 2, \ldots, 44\}$, totiž $\binom{44}{6}$.

5.28 Je jich právě tolik jako všech desetiprvkových kombinací s opakováním z n prvků (nulu ale nepočítáme), tedy
$$\binom{n+9}{9} - 1.$$
Také je to vidět z obrázku (srovnej cvič. 1.11).



6.1 $|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| = |M_1| + |M_2| + \ldots + |M_k|$, všechny ostatní členy vypadnou.

6.2 Pro $k = 1$ je tvrzení triviální. Pro $k = 2$ princip platí. Buď $n > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro n množin vzorec (15) platí. Dokážeme, že pak platí i pro $n + 1$ množin:

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n \cup M_{n+1}| = |(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n) \cup M_{n+1}| = |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| + |M_{n+1}| - |(M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n) \cap M_{n+1}| = |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| + |M_{n+1}| - |(M_1 \cap M_{n+1}) \cup (M_2 \cap M_{n+1}) \cup \ldots \cup (M_n \cap M_{n+1})|.$$

Podle indukčního předpokladu odtud dostaneme

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_{n+1}| = \Sigma(-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}| + |M_{n+1}| - \Sigma(-1)^{r+1}|(M_{j_1} \cap M_{n+1}) \cap (M_{j_2} \cap M_{n+1}) \cap \ldots \cap (M_{j_r} \cap M_{n+1})|,$$

kde se sčítá přes všechny $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Vzhledem k tomu, že

$$(M_{j_1} \cap M_{n+1}) \cap (M_{j_2} \cap M_{n+1}) \cap \ldots \cap (M_{j_r} \cap M_{n+1}) = M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r} \cap M_{n+1},$$

dostáváme

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_{n+1}| = \Sigma(-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|,$$

kde se sčítá přes všechny $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n + 1\}$, což jsme měli dokázat.

6.3 Buď $m \in M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$. Všechny z uvažovaných množin, do nichž prvek m patří, buďte $M_{q_1}, M_{q_2}, \ldots, M_{q_v}$. Na pravé straně je prvek m započten právě v těch sčítancích, které odpovídají podmnožinám $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ majícím neprázdný průnik s množinou $\{q_1, q_2, \ldots, q_v\}$. Každá taková podmnožina je tedy sjednocením neprázdné podmnožiny $P \subset \{q_1, q_2, \ldots, q_v\}$ a podmnožiny $P' \subset \{1, 2, \ldots, k\} - \{q_1, q_2, \ldots, q_v\}$, a obráceně. Prvek m je tedy na pravé straně započten právě v $(2^v - 1)\, 2^{k-v}$ sčítancích, vždy se znaménkem $(-1)^{|P|+|P'|+1}$. Rozdělíme-li množiny P, P' podle počtu prvků, vidíme, že příspěvek prvku m k pravé straně tedy je

$$p(m) = \Sigma(-1)^{i+j+1}\binom{v}{i}\binom{k-v}{j},$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané dvojice (i, j) takové, že $i \in \{1, 2, \ldots, v\}$ a $j \in \{0, 1, \ldots, k-v\}$. To přepíšeme a upravíme:

$$p(m) = \sum_{j=0}^{k-v} (-1)^j \binom{k-v}{j} \sum_{i=1}^{v} (-1)^{i+1}\binom{v}{i} = \\ = \sum_{j=0}^{k-v} (-1)^j \binom{k-v}{j}.$$

Poslední sčítanec je roven nule s výjimkou $v = k$ (tj. $m \in \in M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k$), kdy je roven 1. Tím je důkaz proveden.

Jiné řešení: Všechny sčítance na pravé straně rozvineme podle principu inkluze a exkluze. Analogickými úvahami jako předtím zjistíme, že se pak všechny členy tvaru $|M_{q_1} \cap M_{q_2} \cap \ldots \cap M_{q_v}|$ vyruší s výjimkou členu $|M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k|$.

Ještě jiné řešení dostaneme, postupujeme-li matematickou indukcí analogicky ke cvič. 6.2.

6.4 $2^n \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \dfrac{(2n-r)!}{2^{n-r}}$

6.5 V úloze 10 bude $k = 4$, $j = 10$, $c_1 = 3$, $c_2 = 1$, $c_3 = 10$, $c_4 = 19$, vyjde

$$\binom{13}{3} - \binom{9}{3} - \binom{11}{3} + \binom{7}{3} = 72\,.$$

6.7 Plyne ze vzorce (17) pro

a) $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 1$.

b) $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

6.8 a) Právě tolik, kolik je n-prvkových kombinací s opakováním z k prvků, přičemž se žádný prvek neopakuje více než devětkrát. Podle vzorce (17) je hledaný počet

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{n - 10r + k - 1}{k - 1},$$

kde $m = \min\left(k, \left[\frac{n}{10}\right]\right)$.

b) Právě tolik, kolik řešení má rovnice

$$(x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) + \ldots + (x_k - a_k) = \\ = n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$$

v daném oboru. Stejný počet řešení má rovnice

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$$

v oboru nezáporných celých čísel takových, že

$$y_1 \leqq b_1 - a_1,\ y_2 \leqq b_2 - a_2,\ \ldots,\ y_k \leqq b_k - a_k.$$

Těch je právě tolik jako všech $\left(n - \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\right)$-prvkových kombinací s opakováním z k prvků, přičemž pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ se i-tý prvek opakuje nejvýše $(b_i - a_i)$-krát.

Podle vzorce (17) je jich

$$\sum (-1)^{|M|} \binom{n - \sum\limits_{i \in M'} a_i - \sum\limits_{i \in M} b_i - |M| + k - 1}{k - 1},$$

kde se sčítá přes všechny $M \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že

$$|M| + \sum_{i \in M'} a_i + \sum_{i \in M} b_i \leqq n$$

(symbolem M' jsme označili množinu $\{1, 2, \ldots, k\} - M$).

6.9 Označme $M_1, M_2, \ldots, M_{11}$ množiny žáků v kroužcích. Podle podmínek v úloze je $|M_1 \cup \ldots \cup M_{11}| = 54$, $|M_i| \geqq 15$, $|M_i \cap M_j \cap M_k| \geqq 1$, $|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_l| = 0$. Podle principu inkluze a exkluze je $|M_1 \cup \ldots \cup M_{11}| = \Sigma|M_i| - \Sigma|M_i \cap M_j| + \Sigma|M_i \cap M_j \cap M_k|$ (ostatní členy jsou nulové). Je tedy

$$54 \geqq 11 . 15 - \Sigma|M_i \cap M_j| + \binom{11}{3} . 1$$

a odtud

$$\Sigma|M_i \cap M_j| \geqq 276 .$$

Vlevo je $\binom{11}{2} = 55$ sčítanců a aspoň jeden z nich tedy musí být větší než 5.

7.1 Ze vzorce (19) je patrno, že se obě strany liší tím, že na levé straně jsou činitele $\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ ve druhé mocnině, právě když se prvočíslo p vyskytuje v rozkladech obou čísel m, n na prvočinitele. Protože uvedený činitel je menší než 1, platí dokazovaná nerovnost. Rovnost nastane, právě když jsou čísla m, n nesoudělná.

7.2 Plyne ze vzorce (19).

Je-li $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_h^{k_h}$, můžeme ho totiž přepsat na tvar

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \ldots p_h^{k_h-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_h - 1).$$

Je-li $n > 2$, vyskytuje se v rozkladu čísla n lichý prvočinitel a činitel $p_i - 1$ je sudý.

Jiné řešení: Je-li k přirozené číslo, $k < n$ a čísla k, n jsou nesoudělná, je $0 < n - k < n$ a čísla $n - k$, k jsou také nesoudělná a přitom různá. Z toho vidíme, že počet přirozených čísel menších než n a zároveň nesoudělných s n je sudý.

7.3 Číslo 1 je mocninou jen sebe sama a tak je můžeme vynechat. Označme M_i množinu všech i-tých mocnin mezi čísly 2, 3, ..., 100 000. Vzhledem k tomu, že $2^{16} < 100\,000 < 2^{17}$, jsou od M_{17} počínaje množiny M_i prázdné. Je-li přirozené číslo mocninou jiného přirozeného čísla, je též prvočíselnou mocninou nějakého přirozeného čísla. Úloha se tedy redukuje na spočtení $|M_2 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7 \cup M_{11} \cup M_{13}|$. Ještě si uvědomme, že pro navzájem různá prvočísla $p, q, \ldots, r$ platí $M_p \cap M_q \cap \ldots \cap M_r = M_{pq\ldots r}$. Zkusmo nebo pomocí logaritmických tabulek zjistíme

$|M_2| = 315$, $|M_3| = 45$, $|M_5| = 9$, $|M_7| = 4$, $|M_{11}| = 1$, $|M_{13}| = 1$,

$|M_2 \cap M_3| = |M_6| = 5$, $|M_2 \cap M_5| = |M_{10}| = 2$,

$|M_2 \cap M_7| = |M_{14}| = 1$, $|M_3 \cap M_5| = |M_{15}| = 1$,

a ostatním kombinacím prvočísel odpovídají prázdné množiny. Podle principu inkluze a exkluze je hledaný počet

$$315 + 45 + 9 + 4 + 1 + 1 - 5 - 2 - 1 - 1 = 366.$$

7.4 a) Je-li $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ rozklad na prvočinitele, jsou nenulové právě sčítance $\mu(p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r})$, kde $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ a $\mu(1) = 1$. Pro každé $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$ dostáváme $\binom{k}{r}$ sčítanců rovných $(-1)^r$, celkem tedy $1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$.

b) Jiný tvar vzorce (18).

c) Jiný tvar vzorce (20).

d) Analogicky jako u vyšetřování funkce $\pi(n)$ dostaneme

$$n - 1 = \Sigma\, (-1)^{r+1} \left[\frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \ldots p_{j_r}} \right],$$

kde se sčítá přes všechny $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots$
$\ldots, \pi(n)\}$. To je jiná forma dokazovaného vztahu.

8.1 a) $p_2 = s_2 - \binom{3}{2} s_3 + \binom{4}{2} s_4$, kde $s_2 = 7 + 18 + 3 +$ $+ 9 + 5 = 42$, $s_3 = 5 + 2 = 7$ a $s_4 = 0$, tedy $p_2 = 21$

b) $a_2 = s_2 - \binom{2}{1} s_3 + \binom{3}{2} s_4 = 28$

8.2 a) M_i buďte televizory s i-tou vadou. Známe $a_1 = 10$, $s_1 = 7 + 5 + 4 = 16$ a $p_2 = 1 + 1 + 2 = 4$. Hledáme $p_3 (= a_3 = s_3)$. Z rovnic

$$a_1 = s_1 - s_2 + s_3,$$
$$p_2 = s_2 - 3s_3$$

dostaneme sečtením

$$s_3 = \frac{1}{2}(s_1 - a_1 - p_2) = 1.$$

b) M_i buďte televizory s poškozenou skříní a i-tou další vadou (pro $i \in \{1, 2\}$). Známe $p_1 = 1 + 2 = 3$ a z a) $p_2 = 1$. Odtud $a_1 = p_1 + p_2 = 4$. Každý ze čtyř televizorů s poškozenou skříní měl tedy ještě nějakou další vadu, takže pouze poškozenou skříň neměl žádný televizor.

8.3 Podle (24), (22), (3) a (2) dostáváme

$$s_j = p_j + \binom{j+1}{j} p_{j+1} + \ldots + \binom{k}{j} p_k = (a_j - a_{j+1}) +$$
$$+ \binom{j+1}{j}(a_{j+1} - a_{j+2}) + \ldots + \binom{k}{j} a_k = a_j +$$
$$+ \left[\binom{j+1}{j} - 1\right] a_{j+1} + \left[\binom{j+2}{j} - \binom{j+1}{j}\right] a_{j+2} +$$
$$+ \ldots + \left[\binom{k}{j} - \binom{k-1}{j}\right] a_k = a_j + \binom{j}{j-1} a_{j+1} +$$

$$+\binom{j+1}{j-1}a_{j+2}+\dots+\binom{k-1}{j-1}a_k = a_j + \binom{j}{1}a_{j+1}+$$
$$+\binom{j+1}{2}a_{j+2}+\dots+\binom{k-1}{k-j}a_k\,.$$

8.4 Označme M_i množinu tlumočníků, kteří znají i-tý jazyk ($i \in \{1, 2, \dots, 6\}$). Známe $s_1 = 36 + 32 + 31 + 30 + 28 + 26 = 183$, $a_2 = 53$, $a_3 = 24$, $a_4 = 9$, $a_5 = 3$ a $a_6 = 1$, hledáme a_1. Podle cvič. 8.3 je

$$a_1 = s_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 = 93.$$

8.5 Rovnají se, pokud $f(m) = 1$ pro všechna $m \in M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$.

8.6 Obsah (objem) množiny M budeme nyní raději značit $o(M)$. Pro každou $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \dots, j_r\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$ označme $M_{j_1 j_2 \dots j_r}$ množinu všech bodů roviny (prostoru), které leží právě ve všech množinách $M_{j_1}, M_{j_2}, \dots, M_{j_r}$ (a ne v ostatních). (Pro koláčovité množiny M_i, jaké se ve škole obvykle pro názornost malují, odpovídají množiny $M_{j_1 j_2 \dots j_r}$ jednotlivým políčkům, na něž se rozpadá obrázek). V těch, které jsou neprázdné, zvolme bod $B_{j_1 j_2 \dots j_r}$ a položme $f(B_{j_1 j_2 \dots j_r}) = o(M_{j_1 j_2 \dots j_r})$. Názorně: do bodů $B\dots$ je soustředěn obsah (objem) množiny $M\dots$ podobně jako ve fyzice hmota tělesa do hmotného bodu. Pro každou množinu $T \subset M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ definujme jako T' množinu všech $B\dots \in T$ a položme $f(T') = \sum_{B \in T'} f(B)$.

(Všimněte si, že množiny T' jsou konečné a že pro množiny M_i, jejich průniky a sjednocení platí $f(M') = o(M)$.) Vzorce platí podle cvič. 8.5.

Poznamenejme ještě, že místo s body $B\dots$ jsme mohli pracovat přímo s množinami $M\dots$ a chápat je jako prvky množin T'.

8.7 a) První matice je matice soustavy lineárních rovnic vyjadřujících čísla s_j pomocí čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Druhá matice je maticí soustavy lineárních rovnic vyjadřujících čísla a_j pomocí čísel $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Obě matice jsou proto inverzní.

b) Skalární součin p-tého řádku první matice a q-tého sloupce druhé matice je zřejmě pro $p > q$ roven 0 a pro $p = q$ roven 1. Pro $p < q$ je roven

$$\sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{s-1}{p-1} \binom{q-1}{s-1} =$$

$$= \sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{q-1}{p-1} \binom{q-s}{s-p} =$$

$$= \binom{q-1}{p-1} \sum_{s=p}^{q} (-1)^{q+s} \binom{q+s}{s-p} = 0.$$

9.1 d_{26}

9.2 $360!\, d_{360}$

9.3 $2n!\, d_n$

9.4 $z! \binom{k}{z} d_z$ pro $k \geqq z$

9.5 $n!\, d_n^{n-1}$

9.6 Užijte rekurentního vzorce z 2. řešení úlohy 11.

9.7 Vzorec plyne z (28) i z odvozených rekurentních vzorců, z nichž je pro numerický výpočet nejvýhodnější.

9.8 $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (2n - j)!$

9.9 Rozdělme uvažovaná pořadí na disjunktní skupiny podle toho, kde v nich jsou prvky m_1, m_2. Jsou-li na 2. a 1. místě, dostáváme d_{k-2} pořadí, jsou-li na 2. a 3. místě, dostáváme podle principu inkluze a exkluze

$$\sum_{j=0}^{k-3} (-1)^j \binom{k-3}{j} (k-2-j)!$$

pořadí, a pro každou z dalších $2(k-3)$ možností opět podle principu inkluze a exkluze

$$\sum_{j=0}^{k-4} (-1)^j \binom{k-4}{j} (k-2-j)!$$

pořadí.

Celkem

$$\sum_{j=0}^{k-4} (-1)^j \left[\binom{k-2}{j} + \binom{k-3}{j} + \right.$$

$$\left. + 2(k-3)\binom{k-4}{j}\right] (k-2-j)! + (-1)^{k-3} (k-2)$$

pořadí.

9.10 Je-li knížek n, c_n způsoby.

9.11 Plyne to srovnáním výsledků úloh 11 a 12. Pokuste se o kombinatorické vysvětlení.

9.13 $z(k, p)$

9.14 a) Na obou stranách je $z(p, p)$.

b) $z(p, p + 1) = 0$.

9.15 Použijte vzorce (30).

9.16 Označme p, q počty prvků množin P, Q.

a) q^p

b) $\dfrac{q!}{(q-p)!}$ pro $p \leq q$

c) $z(p, q)$

d) $p!$ pro $p = q$

e) $(q + 1)^p - 1$

f) $$\binom{p}{1} \frac{q!}{(q-1)!} + \binom{p}{2} \frac{q!}{(q-2)!} + \ldots +$$

$$+ \binom{p}{m} \frac{q!}{(q-m)!}, \text{ kde } m = \min(p, q)$$

g) $\binom{p}{q}z(q, q) + \binom{p}{q+1}z(q+1, q) + \ldots +$

$+ \binom{p}{p} z(p, q)$ pro $p \geqq q$

h) $\dfrac{p!}{(p-q)!}$ pro $p \geqq q$

9.17 Vyjde k^j.

9.18 $\binom{30}{15} - \binom{30}{16}$

9.19 V případě $u \leqq v$ $\quad u!\,v!\left[\binom{u+v}{u} - \binom{u+v}{u+1}\right]$

způsoby.

9.21 Pro $n = 1$ je jen jedna mezera mezi dvěma židlemi.