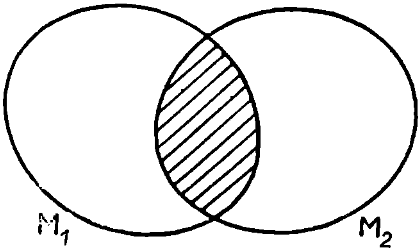
PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

I nadále se budeme zajímat o počty prvků jistých množin. Bude vhodné, když si pro počet prvků konečné množiny*) M zavedeme označení $|M|$. S absolutní hodnotou si to nespleteme, neboť vždy bude jasné, je-li uvnitř číslo, nebo množina.

Buďte dány konečné množiny $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Jak uvidíme, bude mnohdy velice užitečné vyjádřit počet prvků sjednocení těchto množin — v našem označení $|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k|$ — pomocí počtů prvků těchto množin a jejich průniků.



K schematickému obrázku jistě není třeba nic dodávat.

V případě $k = 2$ takové vyjádření snadno najdeme:

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|,$$

*) Této veličině se říká *mohutnost množiny* nebo *kardinální číslo* a značí se též moh M nebo card M.

V případě tří množin bude situace už trochu složitější, ani zde však není obtížné přesvědčit se o platnosti vztahu

$$\begin{aligned}|M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - \\ - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + \\ + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|.\end{aligned}$$

Obecně pak platí

$$\begin{aligned}(15) \qquad & |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| = \\ = & |M_1| + |M_2| + \ldots + |M_k| - \\ - & |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \ldots - |M_{k-1} \cap M_k| + \\ + & |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \ldots + |M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k| - \\ & \ldots\ldots \\ + & (-1)^{k+1} |M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k| = \\ = & \sum (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|,\end{aligned}$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$. Součet jsme uspořádali a napsali tak, že v i-tém řádku jsou sčítance odpovídající i-prvkovým podmnožinám, je tam tedy $\binom{k}{i}$ sčítanců (pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$).

Ještě než se pustíme do důkazu vzorce (15), předvedeme si ho na příkladě.

Tělovýchovná jednota má čtyři oddíly: atletický (A), kopané (K), odbíjené (O) a šachový ($Š$). Každý člen jednoty sportuje v některém oddílu, někteří v několika najednou. Přehled o členstvu podává tabulka

A	... 26	*AO*	... 18	*AKO*	... 5
K	... 17	*AŠ*	... 3	*AKŠ*	... 0
O	... 58	*KO*	... 9	*AOŠ*	... 2
Š	... 19	*KŠ*	... 0	*KOŠ*	... 0
AK	... 7	*OŠ*	... 5	*AKOŠ*	... 0

(např. AO znamená počet všech členů pěstujících atletiku

i odbíjenou bez ohledu na to, jsou-li případně ještě v dalším oddílu). Kolik členů má jednota?

Označíme-li M_1 množinu všech atletů, M_2 množinu všech fotbalistů, M_3 množinu všech volejbalistů a M_4 množinu všech šachistů, je potom

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$$

množina všech členů jednoty. Podle vzorce (15) je

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = 26 + 17 + 58 + 19 - \\ - 7 - 18 - 3 - 9 - 5 + 5 + 2 = 85$$

a jednota má tedy 85 členů.

Vzorec (15) vypadá na první pohled složitě, ale důkaz je jednoduchý: Zvolme libovolný prvek $m \in M_1 \cup M_2 \cup \cup \ldots \cup M_k$. Nechť $M_{q_1}, M_{q_2}, \ldots, M_{q_s}$ jsou právě všechny z uvažovaných k množin, do nichž prvek m patří. V kterých množinách typu

(16) $$M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}$$

je prvek m obsažen? Právě v těch, pro něž je

$$\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{q_1, q_2, \ldots, q_s\}.$$

Pro každé $r \in \{1, 2, \ldots, s\}$ je tedy prvek m započten v právě $\binom{s}{r}$ sčítancích typu (16) a pro $r > s$ v žádném. Celkový příspěvek prvku m k pravé straně vzorce (15) tedy činí

$$\binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \ldots + (-1)^{s+1}\binom{s}{s} = 1$$

(podle vzorce (8)). Na levé straně je prvek m započten samozřejmě také právě jednou. Důkaz je proveden.

Poněkud jsme v něm zpřesnili původní názornou ideu, která ke vzorci vedla: V součtu $|M_1| + |M_2| +$

$+ \ldots + |M_k|$ jsou započteny právě jednou právě ty prvky, které leží v jediné z množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$; všechny ostatní prvky jsou tam započteny vícekrát. Odečteme-li $\Sigma|M_i \cap M_j|$, budou uvedeny na pravou míru i prvky ležící právě ve dvou množinách, přičemž počty prvků ležících ve více množinách byly zredukovány příliš. To se u prvků ležících právě v třech množinách napraví přičtením $\Sigma|M_i \cap M_j \cap M_k|$ atd.

Vzorec (15) se nazývá *princip inkluze a exkluze* a z předcházející úvahy je patrno proč*).

Často jsme postaveni před úkol určit počet objektů, které mají alespoň jednu z daných k vlastností. Označíme-li pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ jako M_i množinu všech uvažovaných objektů, které mají i-tou vlastnost, hledáme tedy $|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k|$. Leckdy je přímá cesta neschůdná, zatímco sčítance typu (16) na pravé straně vzorce (15), vyjadřující počet prvků, které mají současně j_1-tou, j_2-tou, $\ldots$, j_r-tou vlastnost (a třeba ještě další z uvažovaných vlastností), se dají snadno spočíst. V tom je hlavní význam principu inkluze a exkluze. Předvedeme to na příkladě.

Úloha 9. *Určete počet všech pořadí s opakováním dvou prvků* 1. *druhu, dvou prvků* 2. *druhu, $\ldots$, dvou prvků n-tého druhu, v nichž alespoň pro jeden druh jsou oba prvky vedle sebe.*

Řešení. Označme M množinu všech pořadí s opakováním po dvou prvcích n druhů. Dále označme pro každé

*) Latinsky includere — vložit, pojmout, vsadit; excludere — vyloučit, nevpustit, zabránit v přístupu. Někdy se setkáváme i s počeštěným názvem „princip zapojení a vypojení“. Přesný překlad odpovídající smyslu by však byl spíše „princip zahrnutí a odstranění“ nebo „princip zařazení a vyřazení“. Zůstaneme raději u cizích slov.

$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jako M_i množinu všech pořadí z množiny M, v nichž jsou prvky i-tého druhu vedle sebe. Hledaný počet pak bude roven

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n|.$$

Užijeme principu inkluze a exkluze. Buď

$$\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Množina $M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}$ obsahuje právě všechna pořadí z množiny M, v nichž jsou současně vedle sebe prvky j_1-tého, j_2-tého, ..., j_r-tého druhu (přičemž na to, zda jsou prvky ostatních druhů vedle sebe, nehledíme, což podstatně zjednodušuje situaci). Těchto pořadí je zřejmě právě tolik, kolik je všech pořadí s opakováním po jednom prvku j_1-tého, j_2-tého, ..., j_r-tého druhu a po dvou prvcích ostatních $n - r$ druhů, tedy

$$|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}| = \frac{(2n - r)!}{2^{n-r}}.$$

Stejný výsledek dostaneme pro každou z r-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, kterých je $\binom{n}{r}$, a podle vzorce (15) je

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{(2n - r)!}{2^{n-r}}.$$

Sledovali jsme typické využití principu inkluze a exkluze. Zajímavé bylo, že všech $\binom{n}{r}$ sčítanců $|M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \ldots \cap M_{j_r}|$ vyšlo stejně, a tak se do výsledku dostala kombinační čísla. To se stává často, ale ne vždycky, jak hned uvidíme.

V první a ve čtvrté kapitole jsme odvodili vzorce pro počet všech j-prvkových kombinací z k prvků bez opakování a s opakováním. To můžeme chápat jako speciální případy obecnější úlohy:

Úloha 10. *Jsou dána přirozená čísla j, k a nezáporná celá čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Určete počet všech j-prvkových kombinací s opakováním z k prvků, v nichž se pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ opakuje i-tý prvek nejvýše c_i-krát.*

Pro $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 1$ dostáváme kombinace bez opakování, pro $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = j$ všechny kombinace s opakováním.

Řešení. Označme M množinu všech j-prvkových kombinací s opakováním z k prvků a M_i buď pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ množina všech kombinací z množiny M, v nichž se i-tý prvek vyskytuje více než c_i-krát. Hledaný počet bude roven

$$|M| - |M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k|.$$

Jak víme (viz vzorec (12) na str. 32), je

$$|M| = \binom{j + k - 1}{k - 1}.$$

K určení $|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k|$ užijeme principu inkluze a exkluze. Buď $\emptyset \neq \{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset \{1, 2, \ldots$ $\ldots, k\}$. Množina $M_{v_1} \cup M_{v_2} \cup \ldots \cup M_{v_r}$ obsahuje právě všechny kombinace z množiny M, v nichž se v_1-tý, v_2-tý, $\ldots$, v_r-tý prvek opakují po řadě alespoň $c_{v_1} + 1, c_{v_2} + 1, \ldots, c_{v_r} + 1$-krát, a těch je zřejmě právě tolik, kolik je všech $\left(j - \sum_{i=1}^{r} (c_{v_i} + 1)\right)$-prvkových kombinací s opakováním z k prvků.

Je tedy

$$|M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \ldots \cap M_{v_r}| = \binom{j - \sum\limits_{i=1}^{r} c_{v_i} - r + k - 1}{k - 1},$$

pokud $j - \sum\limits_{i=1}^{r} c_{v_i} - r \geqq 0$, jinak je

$$|M_{v_1} \cap M_{v_2} \cap \ldots \cap M_{v_r}| = 0.$$

Podle principu inkluze a exkluze je počet všech zakázaných kombinací roven

$$|M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k| =$$

$$= \sum (-1)^{r+1} \binom{j - \sum\limits_{i=1}^{r} c_{v_i} - r + k - 1}{k - 1},$$

kde se sčítá přes všechny neprázdné podmnožiny $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{r} c_{v_i} + r \leqq j.$$

Hledaný počet pak můžeme psát ve tvaru

$$(17) \qquad \sum (-1)^{r} \binom{j - \sum\limits_{i=1}^{r} c_{v_i} - r + k - 1}{k - 1},$$

kde se sčítá přes všechny podmnožiny $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\} \subset \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{r} c_{v_i} + r \leqq j$$

— tedy i přes množinu prázdnou, pro kterou dostaneme člen

$$|M| = \binom{j+k-1}{k-1}.$$

O tom, jak silný nástroj princip inkluze a exkluze je, se v této knížce ještě mnohokrát přesvědčíme.

Cvičení

6.1 Co říká princip inkluze a exkluze v případě disjunktních množin?

6.2 Dokažte princip inkluze a exkluze matematickou indukcí.

6.3 Dokažte, že pro libovolných k konečných množin M_1, $M_2, \ldots, M_k$ platí

$$|M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_k| = \Sigma(-1)^{r+1} |M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \ldots \cup M_{j_r}|,$$

kde se sčítá přes všechny $\emptyset \neq \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$. (Tento vzorec vznikne z principu inkluze a exkluze záměnou sjednocení a průniku.)

6.4 Kolika způsoby můžete posadit v kině n manželských párů do poslední řady, kde je $2n$ míst tak, aby žádný manželský pár neseděl vedle sebe?

6.5 Z pytlíku, v němž jsou 3 žluté, 1 modrá, 10 červených a 19 zelených kuliček, nabereme hrst deseti kuliček. Kolik různých hrstí můžeme dostat? (Srv. cvič. 4.13.)

6.6 Všimněte si, že pokud v úloze 10 pro některé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ je $c_i \geq j$, nevyskytuje se c_i v žádném členu vzorce (17) a nemá tedy vliv na výsledek. Vysvětlete to na základě kombinatorické představy.

6.7 a) Buďte j, k přirozená čísla. Označme $m = \min\left(k, \left[\frac{j}{2}\right]\right)$. Dokažte, že součet

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{j-2r+k-1}{k-1}$$

je v případě $j \leq k$ roven $\binom{k}{j}$ a jinak 0.*)

b) Buďte j, k přirozená čísla. Označme $m = \min(j, k)$. Potom

$$\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{j - r + k - 1}{k - 1} = 0 .$$

Dokažte.

6.8 Buďte n, k přirozená čísla. Kolik řešení má rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

a) v oboru nezáporných celých jednociferných čísel,

b) v oboru celých čísel, přičemž

$a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$, $\ldots$, $a_k \leq x_k \leq b_k$,

kde $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, $\ldots$, $a_k \leq b_k$ jsou daná celá čísla?

6.9 Na škole pracuje 54 žáků v 11 zájmových kroužcích. Každý kroužek má aspoň 15 členů. Žádný žák nepracuje ve víc než třech kroužcích, ale každé tři kroužky mají alespoň jednoho společného člena. Dokažte, že existují dva kroužky, které mají společných alespoň 6 členů.

*) Symbolem [x] značíme celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než x.