V. kapitola. Řešení kombinatorických úloh

In: Antonín Vrba (author): Kombinatorika. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 36–47.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403968

V. KAPITOLA

ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÝCH ÚLOH

Při řešení kombinatorických úloh určitého typu kombinujeme základní poznatky odvozené v předešlých odstavcích a případně je doplňujeme dalšími úvahami. Ukážeme si to na několika příkladech.

Úloha 1. *Kolik různých slov, v nichž nejsou žádná dvě písmena o vedle sebe, je možno získat záměnou pořadí písmen ve slově* lokomotiva*?*

Řešení. Hledáme počet všech uspořádaných desetic písmen a, i, k, l, m, t, v, o, o, o takových, že žádná dvě o nejsou vedle sebe. Rozdělme všechna tato slova na $P(7)$ disjunktních skupin podle toho, v jakém pořadí jsou v nich písmena, vynecháme-li všechna tři o. V každé skupině je pak tolik slov, kolika způsoby lze přidat po písmeni o na tři z následujících osmi míst: do mezer mezi ostatními písmeny (těch je 6), před první písmeno a za poslední písmeno; tedy $K(3, 8)$ slov. Hledaný počet bude

$$P(7)\,K(3,8) = 7!\binom{8}{3} = 282\,240\,.$$

Úloha 2. *Kolika způsoby se dá z karetní hry (po osmi kartách čtyř barev) vybrat* 6 *karet tak, aby mezi nimi byly karty všech čtyř barev?*

Řešení. Všechny možnosti se rozpadají na dvě disjunktní podmnožiny M_1, M_2. V první budou všechny šestice karet, v nichž je po dvou kartách dvou barev a po jedné kartě zbylých dvou barev; ve druhé šestici složené z tří karet jedné barvy a po jedné kartě ostatních tří barev. Množina M_1 se rozpadá na $K(2, 4)$ disjunktních skupin podle toho, které barvy mají ony dvě dvojice. Vzhledem k tomu, že dvě karty některé barvy lze vybrat $K(2, 8)$ způsoby a jednu kartu $K(1, 8)$ způsoby, snadno zjistíme, že každá skupina obsahuje právě

$$K(2, 8)^2\, K(1, 8)^2$$

šestic karet. Množina M_1 má tedy právě

$$K(2, 4)\, K(2, 8)^2\, K(1, 8)^2$$

prvků. Analogicky zjistíme, že množina M_2 obsahuje právě

$$K(1, 4)\, K(3, 8)\, K(1, 8)^3$$

šestic karet. Výsledek je pak

$$\binom{4}{2}\binom{8}{2}^2\binom{8}{1}^2 + \binom{4}{1}\binom{8}{3}\binom{8}{1}^3 = 415\,744.$$

Ti, kdo jsou v podobných úvahách zběhlejší, postupují většinou rychleji a vyjadřují se stručněji. Řešení předešlé úlohy pak vypadá asi takto:

Jsou dvě možnosti — buď po dvou kartách dvou barev a po jedné ostatních nebo tři karty jedné barvy a po jedné ostatních. V prvním případě lze barvy vybrat $\binom{4}{2}$ způsoby a karty $\binom{8}{2}^2 8^2$ způsoby, ve druhém případě barvy čtyřmi způsoby a karty $\binom{8}{3} 8^3$ způsoby.

Nesporná výhoda takových formulací je jejich přehlednost. Musíme však dbát na to, abychom neztratili ponětí o tom, co za takovými zkratkami ve skutečnosti je, a mít se napozoru, abychom se nedopustili chyby. Ukažme si, jak snadno se můžeme zmýlit, na jiném, na první pohled elegantnějším řešení úlohy.

Nejprve vybereme po jedné kartě každé barvy, což lze provést 8^4 způsoby. Pak vybereme zbývající dvě karty, pro což je $\binom{28}{2}$ možností. Dostaneme tak $8^4\binom{28}{2}$ šestic karet.

Kdybychom číslo, k němuž jsme tak došli, spočetli, ukázalo by se, že je větší než výsledek, který jsme dostali předtím. Je to způsobeno tím, že při druhém řešení jsme některé způsoby započetli vícekrát: tak např. vybereme-li nejprve čtyři esa a pak červeného a kulového krále, dostaneme stejný výsledek, jako když nejprve vybereme žaludské eso, zelené eso, červeného krále a kulového krále a potom přidáme červené a kulové eso. Sečetli jsme totiž počty prvků 8^4 skupin, které nebyly disjunktní.

Úloha 3. *Kolika způsoby je možno rozdělit* 8 *chlapců a* 4 *děvčata na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu bylo alespoň jedno děvče?*

Řešení. Nejprve určíme počet rozdělení, při nichž bude v obou družstvech po dvou děvčatech. Děvčata do prvního družstva lze vybrat $K(2, 4)$ způsoby a přidat k nim chlapce vždy $K(4, 8)$ způsoby. První družstvo lze tedy sestavit $K(2, 4)\ K(4, 8)$ způsoby, zbývající hráči vytvoří druhé družstvo. Vzhledem k tomu, že nám nezáleží na tom, které družstvo bude první, dostaneme $\frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{8}{4}$ rozdělení, při nichž je po dvou děvčatech v družstvu. Zbývá určit, kolika způsoby lze hráče rozdělit tak, aby v jednom družstvu bylo jediné děvče. Lze je vybrat $K(1, 4)$ způsoby a chlapce k němu vždy $K(5, 8)$ způsoby. Dostaneme tak $4\binom{8}{5}$ rozdělení. Hledaný počet tedy bude

$$\frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{8}{4} + 4\binom{8}{5} = 434.$$

Jiné řešení. Kdybychom nepožadovali, aby v každém družstvu hrálo děvče, mohli by se hráči rozdělit celkem $\frac{1}{2}$ $K(6, 12)$ způsoby. V $K(2, 8)$ případech by byla všechna děvčata v jednom družstvu. Hledaný počet je tedy

$$\frac{1}{2}\binom{12}{6} - \binom{8}{2} = 434.$$

Úloha 4. *K orientačnímu závodu se přihlásilo k závodníků, mezi nimi Kacerovský, Pařízek a Wenig. Závodníci budou vybíhat na trať jednotlivě v určitém intervalu. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh startů tak, aby žádní dva z uvedených závodníků nestartovali těsně po sobě?*

Řešení. Všech možných rozvrhů je $P(k)$. Nejprve určeme, v kolika rozvrzích startuje Kacerovský hned po Pařízkovi. Tuto uspořádanou dvojici si můžeme představit jako jediného závodníka a hledaných rozvrhů bude právě tolik, kolik by bylo všech rozvrhů $k — 1$ závodníků, totiž $P(k — 1)$. Ke stejnému počtu dojdeme pro každou z $V(2, 3)$ uspořádaných dvojic uvažovaných závodníků. Celkový počet rozvrhů, při nichž dva z uvažovaných závodníků startují těsně po sobě, není však $V(2, 3)$ $P(k — 1)$, neboť uvažovaných $V(2, 3)$ množin rozvrhů není navzájem disjunktních. Rozvrhy, v nichž startují všichni tři uvažovaní závodníci těsně po sobě (např. v pořadí Kacerovský, Pařízek, Wenig), jsou obsaženy ve dvou množinách rozvrhů (pro dvojice Kacerovský, Pařízek i Pařízek, Wenig). Každou z $P(3)$ uspořádaných trojic uvažovaných závodníků si představme jako jediného závodníka: vidíme, že počet rozvrhů, které by byly započteny dvakrát, je $P(3)\,P(k-2)$. Ve více než dvou množinách se žádný rozpis nevyskytuje. Hledaný počet je tedy

$$P(k) - V(2,3)\,P(k-1) + P(3)\,P(k-2) =$$
$$= k! - 6(k-1)! + 6(k-2)!$$

(Poznamenejme, že zde i dále zápis $ab!$ znamená $a(b!)$ a ne $(ab)!$.)

Úloha 5. *V zápise o volejbalovém utkání je uvedeno, jak se měnil stav (např.* 0:1, 0:2, 1:2, 2:2 *atd. pro každý set). Kolik je všech možných zápisů zápasu, hraného na tři vítězné sety, pokud každý set skončil patnáctým bodem družstva, které ho vyhrálo (takže druhé družstvo v něm dosáhlo nejvýše 13 bodů)?*

Řešení. Nejprve určíme pro každé $m \in \{0, 1, \ldots, 13\}$, kolik existuje setů, v nichž domácí zvítězili v poměru $15 : m$. Snadno uvážíme, že je jich právě

$$P_0(14, m) = \binom{14+m}{14},$$

uvědomíme-li si, že patnáctý bod domácích vždy ukončuje set. Je tedy celkem

$$\binom{14}{14} + \binom{15}{14} + \ldots + \binom{27}{14}$$

setů, v nichž vítězí domácí (a ovšem stejný počet setů, v nichž vítězí hosté). Podle cvič. 2.10 je však tento součet kombinačních čísel roven $\binom{28}{15}$. To se dá kombinatoricky snadno vysvětlit. Představíme-li si, že družstvo, které dosáhne patnáctého bodu, dovolí pak ještě (proti pravidlům) soupeři hrát dál a dosáhnout stav na přijatelných 15 : 13, zjistíme, že na počtu všech možných setů se nic nezmění. Při těchto podivných praktikách je však zřejmě počet možností $P_0(15, 13)$.

Analogickým postupem dojdeme k tomu, že pokud jde o průběh zápasu počítaný na sety, je pro každé $m \in \{0, 1, 2\}$ pro vítězství domácích v poměru $3 : m$ právě $\binom{2+m}{2}$ možností.

Celkem tedy existuje

$$2\left[\binom{28}{15}^3 + 3\binom{28}{15}^4 + \binom{4}{2}\binom{28}{15}^5\right]$$

zápasů.

Následující úloha je snad až příliš jednoduchá, její výsledek však budeme později několikrát potřebovat.

Úloha 6. *Kolik je všech pořadí s opakováním p prvků 1. druhu a q prvků 2. druhu, v nichž žádné dva prvky 1. druhu nejsou vedle sebe?*

Řešení. Je jich právě tolik, kolika způsoby lze rozmístit p prvků 1. druhu na $q + 1$ míst, totiž do $q - 1$ mezer mezi prvky 2. druhu a před první a za poslední z nich. Hledaný počet je tedy $\binom{q+1}{p}$ v případě $p \leqq q + 1$ a 0 jinak.

Úloha 7. *Jsou dána přirozená čísla c, m $(c + m \geqq 3)$ a $(c + m)$-úhelník $A_1, A_2, \ldots, A_{c+m}$. Kolika způsoby lze obarvit jeho vrcholy tak, aby jich c bylo červených, m modrých a přitom žádné dva sousední vrcholy nebyly červené?*

Řešení. Hledaný počet označme $b(c, m)$. Pro $c > m$ je zřejmě $b(c, m) = 0$. Buď nadále $c \leqq m$. Na první pohled je patrna souvislost s úlohou 6, na niž také úlohu 7 převedeme. Všechna obarvení s popsanou vlastností rozdělme na dvě disjunktní skupiny podle toho, je-li vrchol A_1 červený nebo modrý. Označme ještě $z(p, q)$ výsledek úlohy 6. Potom je zřejmě v první skupině právě $z(c - 1, m - 2)$ a ve druhé $z(c, m - 1)$ obarvení. Je tedy

$$b(c, m) = z(c - 1, m - 2) + z(c, m - 1) =$$

$$= \binom{m-1}{c-1} + \binom{m}{c} = \frac{c+m}{m}\binom{m}{c}.$$

Úloha 8. *Kolik existuje různých vlajek složených z n vodorovných stejně širokých červených a bílých pruhů tak, že žádné dva bílé pruhy nejsou vedle sebe?*

Řešení. Nejprve určeme, kolik lze sestavit vlajek, které mají uvedenou vlastnost a obsahují právě k červených pruhů (a tedy právě $n - k$ bílých pruhů). Podle úlohy 6 jich bude $\binom{k+1}{n-k}$ v případě $k + 1 \geqq$ $\geqq n - k$ $\left(\text{neboli } k \geqq \frac{n-1}{2}\right)$ a 0 v případě $k < \frac{n-1}{2}$. (Stále předpokládáme, že $k \leqq n$.) Celkový počet bude

$$\binom{a+1}{n-a} + \binom{a+2}{n-a-1} + \cdots + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{0},$$

kde $a = \frac{n}{2}$ pro sudá n, $a = \frac{n-1}{2}$ pro lichá n.

Jiné řešení. Hledaný počet vlajek označme v_n. Předpokládejme, že $k > 2$ je přirozené číslo. Všechny vlajky složené z k pruhů, z nichž spodní je červený, lze získat tak, že se ke všem v_{k-1} vlajkám složeným z $k - 1$ pruhů přišije dolů červený pruh. Všechny vlajky složené z k pruhů, z nichž spodní je bílý, lze získat tak, že ke všem v_{k-2} vlajkám složeným z $k - 2$ pruhů přišijeme dolů červený pruh a pod něj bílý pruh. Platí tedy

$$v_k = v_{k-1} + v_{k-2} \tag{14}$$

pro každé přirozené $k > 2$. Zřejmě je $v_1 = 2$ (červená vlajka a bílá vlajka) a $v_2 = 3$ (červenobílá, bíločervená a červená). Podle odvozeného vzorce je dále

$$\begin{aligned} v_3 &= v_2 + v_1 = 3 + 2 = 5, \\ v_4 &= v_3 + v_2 = 5 + 3 = 8, \\ v_5 &= v_4 + v_3 = 8 + 5 = 13 \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Chceme-li určit číslo v_n pro konkrétní n, pokračujeme tak dlouho, až dojdeme k hledané hodnotě.*)

Tato metoda se často používá. Někdy se nedaří najít bezprostřední vyjádření n-tého členu pomocí n, jako se to podařilo v prvním řešení úlohy 8; většinou se však *rekurentní***) vzorce* (jak se říká obdobám vzorce (14), v nichž se členy nějaké posloupnosti vyjadřují pomocí předcházejících členů) dobře hodí k numerickému vý-

*) Možná, že jste poznali tzv. Fibonacciova čísla, se kterými se v matematice často setkáváme.

**) z latinského recurrere — běžet zpět

počtu. S rekurentními vzorci se v této knížce ještě několikrát setkáme a vlastně jsme s nimi už pracovali i v předešlých kapitolách — viz např. (1).

Cvičení

5.1 Kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit 7 stejných hrušek a 5 stejných jablek, aniž by je krájely?

5.2 Kolika způsoby lze postavit na šachovnici pět různých figurek tak, aby dvě stály na bílých a tři na černých polích?

5.3 Kolik různých vět skládajících se ze sedmi slov, lze sestavit ze všech 39 písmen věty *Aequam memento rebus in arduis servare mentem* (bez ohledu na smysl)? *)

5.4 V kupé je 10 míst. Tři pasažéři chtějí sedět ve směru jízdy, jeden proti směru. Ostatním šesti, mezi něž patří Venoušek s maminkou, je to jedno až na to, že Venoušek chce sedět u okna a vedle maminky. Kolika způsoby se mohou cestující usadit, aby byli všichni spokojeni?

5.5 Jak se změní výsledek předchozího cvičení, bude-li cestujících bez nároků

a) o jednoho

b) o dva

méně? (V kupé pak bude jen 9, resp. 8 cestujících.)

5.6 Kolika způsoby lze sestavit rozvrh startů orientačního závodu tak, aby Pařízek vyběhl až po Wenigovi a Kacerovský až po nich.

5.7 Dokažte, že pro číslo v_n z úlohy 8 platí

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

*) Latinská sentence nás nabádá, abychom se i v kritických situacích řídili rozumem.

5.8 Převrátíme-li vlajku, může vzniknout jiná vlajka. Jaký nejmenší počet vlajek musíme mít, abychom mohli vyvěsit kteroukoli z v_n vlajek z úlohy 8?

5.9 Opravte chybné řešení úlohy 2.

5.10 Kolika způsoby lze ze sedmi chlapců a čtyř dívek vybrat šestičlenné družstvo tak, aby v něm byla alespoň dvě děvčata?

5.11 Je správné následující řešení předcházející úlohy? Nejprve vybereme dvě děvčata, což lze $K(2, 4)$ způsoby. Ze zbylých devíti osob k nim přidáme čtyři, což lze $K(4, 9)$ způsoby. Hledaný počet je tedy $\binom{4}{2}\binom{9}{4}$.

5.12 Kolika způsoby lze dát 20 různých knížek do knihovničky, v níž je 5 polic, vejdou-li se všechny knížky do každé police?

5.13 Kolika způsoby lze z 10 kosmonautů vybrat čtyřčlennou posádku, není-li vhodné, aby jistí dva kosmonauté letěli spolu?

5.14 Kolik různých slov, v nichž žádné dvě samohlásky nejsou vedle sebe, lze získat záměnou pořadí písmen slova *protoplazma*?

5.15 Deset manželských párů nasedá do pěti loděk pro čtyři osoby. Kolika způsoby se mohou rozdělit na pět skupin tak, aby Klímovi jeli spolu v loďce a Podešvovi také a aby v každé loďce byli dva muži a dvě ženy? (Na uspořádání skupin ani osob ve skupinách nebereme zřetel.)

5.16 Kolika způsoby lze postavit do řady 6 Angličanů, 7 Francouzů a 10 Turků tak, aby každý Angličan stál mezi Francouzem a Turkem a žádný Francouz nestál vedle Turka?

5.17 Kolika způsoby si mohou 3 osoby rozebrat 33 různých knih tak, aby dvě měly dohromady dvakrát více než třetí?

5.18 Kolika způsoby lze na šachovnici postavit dvě věže tak, aby se neohrožovaly?

5.19 Kolika způsoby lze na černá pole šachovnice postavit 8 věží, aby se žádné dvě neohrožovaly?

5.20 Kterých čísel je více mezi prvním miliónem přirozených čísel: těch, která mají některou číslici rovnu 5 nebo těch, která číslici 5 neobsahují?

5.21 Kolika způsoby můžete vyběhnout 10 schodů, děláte-li kroky buď o jeden schod, o dva nebo o tři schody?

5.22 Určete počet všech j-prvkových kombinací z k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$ takových, že

a) pro žádné $i \in \{1, 2, \ldots, k - 1\}$ neobsahují současně oba prvky m_i, m_{i+1},

b) kromě dvojic uvedených v a) neobsahují ani dvojici m_1, m_k.

5.23 Kolik řešení má rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

v oboru přirozených čísel? Řešte

a) kombinatorickou úvahou,

b) pomocí cvič. 4.17.

5.24 Buďte n, k přirozená čísla.

Pro kolik řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 2n$$

v oboru nezáporných celých čísel platí $x_1 > x_k$?

5.25 Obdélník o stranách m, n (přirozená čísla) je rozdělen na mn jednotkových čtverců. Kolik je v něm

a) obdélníků,

b) čtverců?

5.26 Jsou dány dvě různé rovnoběžky. Na jedné z nich je dáno m různých bodů a na druhé n různých bodů. Spojme každý z bodů jedné přímky se všemi body druhé přímky. Kolik dostaneme průsečíků, pokud se žádné tři spojnice neprotínají v jediném bodě?

5.27 Kolika způsoby je možno vylosovat 6 čísel sportky tak, aby rozdíl žádných dvou z nich nebyl roven 1?

5.28 Řekneme, že číslo je srovnané, platí-li pro každé dvě jeho číslice, že ta, co je více vlevo, není větší. (Např. 4667 je srovnané a 1213 není.) Kolik je všech n-ciferných srovnaných čísel?