IV. kapitola. Variace s opakováním, kombinace s opakováním a pořadí s opakováním

In: Antonín Vrba (author): Kombinatorika. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1980. pp. 29–35.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403967

VARIACE S OPAKOVÁNÍM, KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM A POŘADÍ S OPAKOVÁNÍM

Vraťme se ještě k 35 výletníkům, které jsme v 1. kapitole nechali přespat v noclehárně, a představme si, že jdou kolektivně na večeři. *Na jídelním lístku je celkem 12 druhů jídel a každý výletník si jedno objedná. Kolik různých objednávek může skupina učinit?*

I zde nejdříve musíme stanovit, co budeme rozumět různými objednávkami. Z hlediska číšníka (a samozřejmě i výletníků) bude důležité, kdo si který druh jídla objednal. Půjde tedy o uspořádané 35-tice z 12 druhů jídel. Kuchaři, jenž připravuje porce, bude však lhostejné, kdo objednal které jídlo, podstatné pro něho bude jen kolik porcí kterého jídla má připravit. Z tohoto hlediska půjde o neuspořádané 35-tice z 12 druhů jídel.

Obecně předpokládejme, že je dána neprázdná k-prvková množina M a přirozené číslo j. Budeme hledat

a) *počet všech uspořádaných j-tic prvků množiny M*,

b) *počet všech neuspořádaných j-tic prvků množiny M*.

(Množina M odpovídá množině všech druhů jídel na jídelním lístku.) Od podobné úlohy, kterou jsme řešili v 1. kapitole, se úloha liší v tom, že teď už nepožadujeme, aby se každá j-tice skládala z navzájem různých prvků, prvky se mohou v každé j-tici opakovat. (Zatímco jsme mlčky předpokládali, že na žádné posteli nespal více než jeden nocležník, může si totéž jídlo objednat více strávníků.) Proto se mluví o j-prvkových *variacích s opakováním* (v případě uspořádaných j-tic) a o j-prvkových *kombinacích s opakováním* (v případě neuspořádaných j-tic) z k prvků. Jejich počty budeme značit $V_0(j, k)$ a $K_0(j, k)$. Tam, kde je třeba zdůraznit, že se jedná o variace či kombinace zavedené v 1. kapitole, se užívá názvů *variace* či *kombinace bez opakování*.

Tak např. ze tří prvků množiny $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ můžeme utvořit následujících 27 tříprvkových variací s opakováním

$$\begin{array}{lll}
(m_1, m_1, m_1) & (m_2, m_2, m_1) & (m_1, m_3, m_2) \\
(m_1, m_1, m_2) & (m_1, m_3, m_3) & (m_2, m_2, m_2) \\
(m_1, m_2, m_1) & (m_3, m_1, m_3) & (m_2, m_2, m_3) \\
(m_2, m_1, m_1) & (m_3, m_3, m_1) & (m_2, m_3, m_2) \\
(m_1, m_1, m_3) & (m_1, m_2, m_3) & (m_3, m_2, m_2) \\
(m_1, m_3, m_1) & (m_2, m_1, m_3) & (m_3, m_3, m_2) \\
(m_3, m_1, m_1) & (m_3, m_2, m_1) & (m_3, m_2, m_3) \\
(m_1, m_2, m_2) & (m_2, m_3, m_1) & (m_2, m_3, m_3) \\
(m_2, m_1, m_2) & (m_3, m_1, m_2) & (m_3, m_3, m_3)
\end{array}$$

a následujících 10 tříprvkových kombinací s opakováním

$$\begin{array}{lll}
(m_1, m_1, m_1) & (m_1, m_2, m_2) & (m_2, m_2, m_3) \\
(m_1, m_1, m_2) & (m_1, m_2, m_3) & (m_2, m_3, m_3) \\
(m_1, m_1, m_3) & (m_1, m_3, m_3) & (m_3, m_3, m_3) \\
 & (m_2, m_2, m_2) &
\end{array}$$

Je tedy $V_0(3, 3) = 27$ a $K_0(3, 3) = 10$.

Rozdělme všechny $(n + 1)$-prvkové variace s opakováním z k prvků na k disjunktních skupin podle toho, který prvek mají na prvním místě. V každé skupině je pak zřejmě právě tolik variací, kolik je všech n-prvkových variací s opakováním z k prvků. Platí tedy $V_0(n + 1, k) = kV_0(n, k)$. Vzhledem k tomu, že existuje právě k jednoprvkových variací s opakováním z k prvků, dostáváme:

Pro každá dvě přirozená čísla j, k je

$$V_0(j, k) = k^j. \tag{11}$$

Podle něho si výletníci mohli objednat večeři (z číšníkova hlediska) celkem $V_0(35, 12) = 12^{35}$ způsoby. Že $V_0(3, 3) = 3^3 = 27$ víme už od dřívějška.

Zbývá nám ještě určit počet všech j-prvkových kombinací s opakováním z k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Každou takovou kombinaci s opakováním si můžeme znázornit následujícím způsobem: Postupujeme odleva doprava. Nejprve napíšeme tolik teček, kolikrát je v kombinaci s opakováním zastoupen prvek m_1. Pak napíšeme oddělovací čárku/. Dále napíšeme tolik teček, kolikrát je v kombinaci s opakováním zastoupen prvek m_2, a za nimi čárku. Tak pokračujeme dále, až nakonec po čárce následující za tečkami odpovídajícími prvku m_{k-1} bude následovat tolik teček, kolikrát je v kombinaci s opakováním obsažen prvek m_k (za nimi už čárka nebude). (Tak např. schémata

$$\cdots // \qquad \cdot / \cdot\cdot / \qquad / \cdot\cdot / \cdot$$

budou odpovídat prvnímu řádku seznamu tříprvkových kombinací s opakováním ze tří prvků na str. 30). Vždy tak dostaneme schéma obsahující j teček a $k - 1$ čárek. Obráceně, každému řádku složenému z j teček a $k - 1$ čárek zřejmě odpovídá j-prvková kombinace s opakováním z k prvků. Hledaný počet kombinací s opakováním je tedy roven počtu všech řádků složených z $j + k - 1$ znamének, a to z j teček a $k - 1$ čárek. Jde tedy vlastně o to určit, kolika způsoby lze na $j + k - 1$ míst napsat j teček a $k - 1$ čárek. Hledaný počet je ovšem roven počtu všech j-prvkových podmnožin (teček) $(j + k - 1)$-prvkové množiny (znamének), tj. $\binom{j + k - 1}{j}$.

Pro každá dvě přirozená čísla j, k platí

$$K_0(j, k) = \binom{j + k - 1}{j}. \tag{12}$$

Kuchař mohl tedy dostat celkem $K_0(35, 12) = \binom{46}{35} = \binom{46}{11}$ různých objednávek, a jak už víme, je $K_0(3, 3) = \binom{5}{3} = 10$.

Závěrem vyřešme ještě jednu úlohu: *Kolik různých slov lze utvořit ze slova* **abrakadabra** *změnou pořadí písmen?* Jedno ze slov, které dostaneme, bude např. *barbaradaka* a jiné těžko vyslovitelné *aabrardaakb*. Jde vlastně o to určit, kolik existuje různých pořadí pěti písmen a, dvou písmen b, jednoho písmene d, jednoho písmene k a dvou písmen r. Kdybychom ještě rozlišovali mezi sebou písmena téhož druhu (např. je graficky odlišili), bylo by celkem $(5 + 2 + 1 + 1 + 2)! = 11!$ různých pořadí těch jedenácti navzájem různých písmen. Přitom by stejné slovo dávala právě pořadí, která se navzájem liší jen tím, že mají zaměněna písmena téhož druhu mezi sebou. V každém uvažovaném slově lze mezi sebou zaměnit písmena a $5!$ způsoby, písmena b $2!$ způsoby, písmeno d $1!$ způsobem, písmeno k také $1!$ způsoby a písmena r $2!$ způsoby. Zřejmě lze provést celkem $5!\ 2!\ 1!\ 1!\ 2!$ záměn písmen téhož druhu mezi sebou a tolik je tedy pořadí těch jedenácti písmen, dávajících stejné slovo. Z daného slova lze tedy sestavit celkem

$$\frac{11!}{5!\ 2!\ 1!\ 1!\ 2!}$$

různých slov.

Obecně se mluví o *pořadích s opakováním* p_1 *prvků* 1. *druhu*, p_2 *prvků* 2. *druhu*, ..., p_k *prvků* k-*tého druhu*. Jsou to vlastně $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)$-prvkové variace s opakováním z k prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k$, v nichž se (pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) prvek m_i opakuje právě p_i-krát. Jejich počet je

$$P_0(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \frac{(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)!}{p_1! \; p_2! \; \ldots \; p_k!} \tag{13}$$

Cvičení

4.1 Zformulujte podrobně, co rozumí pod různými objednávkami číšník a co kuchař.

4.2 Určete pomocí látky této kapitoly počet všech podmnožin k-prvkové množiny. (Jiným způsobem jsme jej určili při kombinatorickém odvození vzorce (7).)

4.3 Vysvětlete, proč v úvahách o j-prvkových variacích s opakováním a kombinacích s opakováním z k prvků už nevystupuje předpoklad $j \leqq k$, který nás provázel u variací a kombinací bez opakování.

4.4 Platí vzorce (11) a (12) i v singulárních případech $j = 0$ a $k = 0$?

4.5 Vysvětlete souvislost mezi kombinačním číslem a počtem pořadí s opakováním prvků dvou druhů.

4.6 Našich 35 výletníků se před cestou zpět rozdělilo na čtyři skupiny: 17 se jich vracelo vlakem, 8 autobusem, 6 lodí a 4 pěšky. Kolika způsoby se mohli rozdělit?

4.7 Latinská abeceda se skládá z 26 písmen. Kolik šestipísmenových slov z ní lze utvořit?

4.8 V kolika bodech se protínají úhlopříčky konvexního n-úhelníka, neprotínají-li se žádné tři v tomtéž bodě?

4.9 Na jídelním lístku jsou 4 aperitivy, 6 předkrmů, 3 polévky, 23 hlavních jídel, 4 studené nápoje, 5 moučníků, 2 teplé nápoje a 12 vín. Kolika způsoby lze sestavit menu skládající se ze všech osmi součástí?

4.10 V sazce se tipují výsledky 12 zápasů — zda vyhrají domácí, hosté či zápas skončí nerozhodně. Kolik je všech možných tipů?

4.11 Vysvětlete podrobně, co se skrývá za slůvkem „zřejmě" v závěru výkladu o pořadích s opakováním.

4.12 Na seřazovacím nádraží stojí 5 lůžkových, 7 jídelních a 20 obyčejných osobních vagónů. Bude z nich sestavena souprava o pěti vagónech. Kolik různých souprav je možno dostat?

4.13 Z pytlíku, v němž je 73 žlutých, 41 modrých, 50 červených a 19 zelených kuliček, nabereme hrst deseti kuliček. Kolik různých hrstí je možno dostat?

4.14 V průčelní stěně školní budovy je 35 oken. Školník dostal po pěti praporcích sedmi spřátelených států. Kolika způsoby jimi může ozdobit okna tak, aby žádné nezůstalo prázdné?

4.15 Vysvětlete, proč j-prvkových kombinací (resp. variací) z k prvků s opakováním je více než bez opakování, ale pořadí s opakováním p_1 prvků 1. druhu, p_2 prvků 2. druhu, ..., p_k prvků k-tého druhu není více než pořadí $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ prvků bez opakování.

4.16 Dokažte vzorec pro počet pořadí s opakováním tak, že nejprve odvodíte vzorec

$$P_0(p_1, p_2, \ldots, p_k) =$$

$$= \binom{p_1 + p_2 + \ldots + p_k}{p_1} \binom{p_2 + \ldots + p_k}{p_2} \ldots \binom{p_{k-1} + p_k}{p_{k-1}} \binom{p_k}{p_k}.$$

4.17 Buďte n, k přirozená čísla. Určete, kolik řešení má rovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

a) v oboru nezáporných celých čísel,

b) v oboru celých čísel, přičemž $x_1 \geqq c_1$, $x_2 \geqq c_2$, ..., $x_k \geqq c_k$, kde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou daná celá čísla,

c) Kolik řešení má nerovnice

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leqq n$$

v oboru celých nezáporných čísel?

4.18 Dokažte *multinomickou*) větu*: Buďte m, n přirozená čísla, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ reálná čísla. Potom

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \Sigma \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m},$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané m-tice $(k_1, k_2, \ldots \ldots, k_m)$ celých nezáporných čísel takových, že $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. (Mocniny s exponentem 0 klademe rovny 1.) Kolik je na pravé straně sčítanců?

4.19 Sčítáme-li přes všechny uspořádané m-tice $(k_1, k_2, \ldots \ldots, k_m)$ celých nezáporných čísel takových, že $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, je

$$\Sigma \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} = m^n .$$

Dokažte

a) kombinatorickou úvahou,

b) pomocí multinomické věty.

4.20 Dokažte pro nezáporná celá čísla nerovnost

$$a_1!\, a_2! \ldots a_n! \leqq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)!.$$

4.21 Jak souvisí kartézský součin s látkou, kterou jsme probrali?

---

*) Často se také říká *polynomická věta*.