II. KAPITOLA

FAKTORIÁLY A KOMBINAČNÍ ČÍSLA

Abychom např. nemuseli vypisovat součin p činitelů b, byl zaveden symbol b^p a jeho slovní vyjádření „b na p-tou". Jeho užívání značně zrychlí práci s algebraickými výrazy, které se nadto stanou přehlednými. Tak je tomu i u zavádění jiných matematických symbolů. V kombinatorice (i jinde) se vyplatí označit součin $n(n-1) \ldots 2.1$ prvních n přirozených čísel*) symbolem $n!$, který se čte „*n-faktoriál*". Tak např. $4! = 4.3.2.1 = 24$. Vzorec pro počet všech pořadí k prvků nabude přehledného tvaru

$$P(k) = k!.$$

Už jsme si vysvětlili, proč se pokládá $P(0) = 1$, v souhlase s tím položíme $0! = 1$. Vzorce pro počet variací a kombinací můžeme pomocí faktoriálů zapsat přehledněji ve tvaru

$$V(j, k) = \frac{k!}{(k-j)!},$$

$$K(j, k) = \frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

(Na případech $j = k$ a $j = 0$ je zde vidět, jak vhodné

*) Pro $n = 1$ to znamená 1.

bylo položit $0! = 1$. Vzorce platí pro všechny dvojice nezáporných celých čísel $j \leqq k$.)

Užitečné bude nějak označit i často se vyskytující zlomky $\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$, kde $p \geqq q$ jsou nezáporná celá čísla. Značíme je symbolem $\binom{p}{q}$, což se čte „p *nad* q", a říká se jim *kombinační čísla**). Tak např. bude $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$. Vzorec pro počet kombinací nabude ještě přehlednějšího tvaru

$$K(j, k) = \binom{k}{j}.$$

Dokážeme si nyní dvě důležité vlastnosti kombinačních čísel:

Pro celá nezáporná čísla $p \geqq q$ platí

$$\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q} \tag{2}$$

Důkaz. Postupně dostáváme

$$\binom{p}{p-q} = \frac{p!}{(p-q)!(p-(p-q))!} =$$

$$= \frac{p!}{(p-q)!\,q!} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \binom{p}{q}.$$

Jiný důkaz. Kombinační číslo $\binom{p}{q}$ udává počet q-prv-

*) V rusky psaných publikacích se místo $\binom{p}{q}$ užívá symbolu C_p^q.

kových kombinací z p prvků. Přiřaďme každé q-prvkové podmnožině p-prvkové množiny její doplněk. To je vzájemně jednoznačné zobrazení všech q-prvkových podmnožin, jichž je $\binom{p}{q}$, na všechny $(p - q)$-prvkové podmnožiny, jichž je $\binom{p}{p-q}$. Je tedy $\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}$.

Pro celá nezáporná čísla $p > q$ platí

$$\binom{p}{q} + \binom{p}{q+1} = \binom{p+1}{q+1}. \tag{3}$$

Důkaz. Postupně dostáváme

$$\binom{p}{q} + \binom{p}{q+1} = \frac{p!}{q!(p-q)!} +$$

$$+ \frac{p!}{(q+1)!\,(p-q-1)!} = \frac{p!(q+1) + p!(p-q)}{(q+1)!\,(p-q)!} =$$

$$= \frac{p!(p+1)}{(q+1)!\,(p-q)!} = \frac{(p+1)!}{(q+1)!\,(p+1-(q+1))!} =$$

$$= \binom{p+1}{q+1}.$$

Jiný důkaz. Všechny $(q + 1)$-prvkové kombinace z $p + 1$ prvků $m_1, m_2, \ldots, m_p, m_{p+1}$, jichž je $\binom{p+1}{q+1}$, rozdělme na dvě disjunktní skupiny: v první budou ty, které obsahují prvek m_{p+1} a ve druhé ty, co ho neobsahují. První skupina zřejmě vznikne tak, že ke každé q-prvkové kombinaci z prvků $m_1, m_2, \ldots, m_p$, jichž je $\binom{p}{q}$, přidáme prvek m_{p+1}. Druhá skupina je tvořena právě všemi $(q+1)$-prvkovými kombinacemi z p prvků $m_1, m_2, \ldots, m_p$, jichž je $\binom{p}{q+1}$. Je tedy $\binom{p+1}{q+1} = \binom{p}{q} + \binom{p}{q+1}$.

V předešlém odstavci jsme pro počet kombinací odvodili vzorec

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\ldots(k-j+1)}{j(j-1)\ldots 1}. \tag{4}$$

Podle (2) je však také

$$\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j} = \frac{k(k-1)\ldots(j+1)}{(k-j)(k-j-1)\ldots 1}. \tag{5}$$

Zatímco ve vzorci (4) je v čitateli i ve jmenovateli součin j činitelů, jsou ve vzorci (5) součiny $(k-j)$ činitelů. Při praktickém výpočtu kombinačního čísla je tedy v případě $j > \frac{k}{2}$ výhodnější postupovat podle vzorce (5). Tak např. podle vzorce (4) je

$$\binom{175}{170} = \frac{175.174.\ \ldots\ .6}{170.169.\ \ldots\ .1},$$

zatímco podle vzorce (5) je

$$\binom{175}{170} = \frac{175.174.\ \ldots\ .171}{5.4.\ \ldots\ .1}.$$

Od prvního zlomku bychom ovšem dospěli ke druhému zkrácením činitelů vyskytujících se současně v čitateli i ve jmenovateli.

Představme si, že bychom měli vypočíst kombinační číslo $\binom{k}{j}$ z daných hodnot j, k nebo naprogramovat jeho výpočet na počítači. Jedna možnost by byla nejprve rozhodnout, zda použít vzorce (4) nebo (5) a pak spočíst příslušný zlomek. Pokud by se nejprve spočítaly součiny v čitateli a ve jmenovateli a ty se pak vydělily, často by se stávalo, že oba součiny by byly obrovské, což by vedlo k technickým potížím. Tomu bychom se vyhnuli, kdyby se nejprve spočítaly podíly činitelů a ty se pak vynásobily. To má zase tu nevýhodu, že by se mnohokrát dělilo, což je operace časově náročná. Kromě toho by jednotlivé podíly nebyly vždy celá čísla a to by vedlo ke kumulaci chyb způsobených zaokrouhlováním.

Existuje však vhodnější metoda výpočtu kombinačních čísel. Sestavme kombinační čísla do schématu

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

atd.

tj.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

atd.

(Říká se mu *Pascalův*) trojúhelník*). Podle vzorce (2) je schéma souměrné podle svislé osy a podle (3) je součet dvou sousedních čísel v témže řádku roven číslu, které je mezi nimi o řádek níže. To umožňuje rychle dojít podle schématu k hledanému kombinačnímu číslu, přičemž se používá pouze operace sčítání. Souměrnost umožňuje pracovat jen s jednou polovinou schématu a výhodné je i to, že k výpočtu určitého řádku je zapotřebí pouze předchozí řádek, ostatní se nemusejí uchovávat.

Závěrem poznamenejme, že hodnoty faktoriálů $n!$ a kombinačních čísel $\binom{p}{q}$ a jejich logaritmy bývají pro nevelká n, p, q uvedeny v běžných matematických tabulkách.

Cvičení

2.1 Spočtěte: $7!$, $\binom{45}{3}$, $\binom{72}{68}$.

*) Francouzský učenec Blaise Pascal (1623—1662) vynikl v matematice, filozofii a fyzice.

2.2 Doplňte další tři řádky Pascalova trojúhelníka na str. 12 a určete $\binom{8}{4}$.

2.3 Dokažte: $n! + (n-1)!\, n^2 = (n+1)!$

2.4 Sečtěte: $\dfrac{(n+2)!}{n!} - 2\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!}$.

2.5 Vyjádřete jedním kombinačním číslem: $\binom{10}{6} + \binom{10}{3}$.

2.6 Nalezněte všechna čísla x, pro něž platí
$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9.$$

2.7 Které z kombinačních čísel $\binom{153}{17}$, $\binom{154}{136}$ je větší?

2.8 Které ze dvou čísel $n! + (n+3)!$, $(n+1)! + (n+2)!$ je větší?

2.9 Seřaďte kombinační čísla $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ podle velikosti.

2.10 Dokažte, že pro přirozená čísla $p \geqq q$ platí
$$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-2}{q-1} + \ldots + \binom{q-1}{q-1}$$
a) opakovaným použitím vzorce (3),
b) pomocí kombinací,
c) metodou matematické indukce,
d) pomocí cvič. 1.11.

2.11 Dokažte, že pro každé přirozené číslo k platí
$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$
a) metodou matematické indukce,
b) vhodnou organizací sčítání,
c) pomocí kombinací,
d) pomocí vzorce ze cvič. 2.10.

2.12 Dokažte, že pro nezáporná celá čísla $p \geqq q \geqq r$ platí

$$\binom{p}{r}\binom{p-r}{q-r} = \binom{p}{q}\binom{q}{r}$$

a) úpravou levé strany,

b) pomocí kombinací.

2.13 Kolika nulami končí číslo 129!?

2.14 Dokažte, že součin j po sobě následujících celých čísel je vždy dělitelný číslem $j!$.