

# Matematika hrou i vážně

---

## V. kapitola. Teorie grafů a kombinatorika

In: Bohdan Zelinka (author): Matematika hrou i vážně. (Czech).  
Praha: Mladá fronta, 1979. pp. 114–146.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403953>

### Terms of use:

© Bohdan Zelinka, 1979

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## TEORIE GRAFŮ A KOMBINATORIKA

Jednou z moderních matematických disciplín je teorie grafů. Grafy, které tato teorie zkoumá, však nejsou grafy funkcí, ale jiné objekty, které s grafy funkcí mají společný jen název odvozený z řeckého „grafein“, což znamená „psáti“. Rozlišují se grafy neorientované a orientované.

Neorientovaný graf  $G$  je uspořádaná dvojice množin  $[U, H]$ , kde  $U$  je nějaká množina, jejíž prvky nazýváme uzly grafu  $G$ , a  $H$  je podmnožina množiny všech neuspořádaných dvojic různých prvků množiny  $U$ ; prvky množiny  $H$  nazýváme hranami grafu  $G$ .

Zaměníme-li v této definici slovo „neuspořádaných“ slovem „uspořádaných“, dostaneme definici orientovaného grafu.

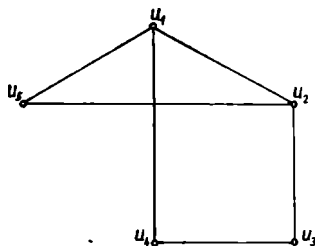
Zatím vám tyto definice asi mnoho neříkají; zvláště asi nechápete, proč se něčemu takovému říká zrovna graf. Povězme si tedy, jak se takovéto grafy znázorňují; omezíme se na případ, kdy množina  $U$  (a tedy i množina  $H$ ) je konečná.

Prvky množiny  $U$  (tedy uzly grafu) si nakreslíme jako malé kroužky. Jestliže  $u \in U$ ,  $v \in U$  a neuspořádaná dvojice  $\{u, v\} \in H$ , nakreslíme úsečku nebo oblouk spojující kroužky odpovídající uzlům  $u$  a  $v$ . Tak dostaneme znázornění neorientovaného grafu. Příklad vidíme na obr. V.1. Zde  $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ , hrany grafu jsou dvojice  $\{u_1, u_2\}$ ,  $\{u_1, u_4\}$ ,  $\{u_1, u_5\}$ ,  $\{u_2, u_3\}$ ,  $\{u_2, u_5\}$ ,  $\{u_3, u_4\}$ .

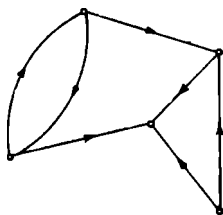
Místo  $\{u_1, u_2\}$  můžeme hranu zapsat stručně jako  $u_1u_2$ .

Podobně bychom zakreslili i orientovaný graf. Je-li  $u \in U, v \in U$  a uspořádaná dvojice  $[u, v] \in H$ , kreslíme úsečku nebo oblouk spojující kroužky odpovídající uzlům  $u$  a  $v$  se šipkou směřující ke kroužku znázorňujícímu uzel  $v$ . Příklad vidíme na obr. V.2.

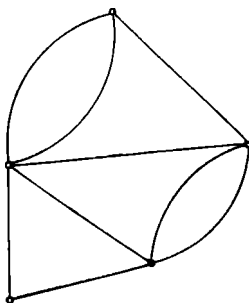
O hraně  $uv$  v neorientovaném grafu  $G$  říkáme, že spojuje uzly  $u$  a  $v$  a že je incidentní s uzly  $u$  a  $v$ . (Proč mluvíme o spojování, je zřejmé z toho, co jsme si právě



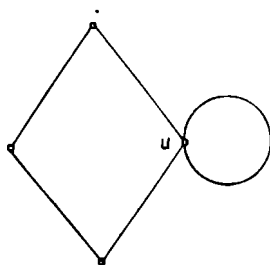
Obr. V.1



Obr. V.2



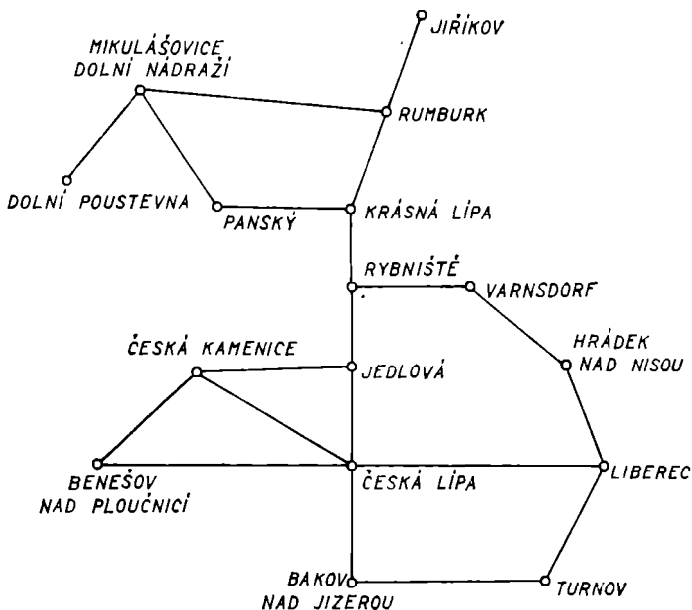
Obr. V.3



Obr. V.4

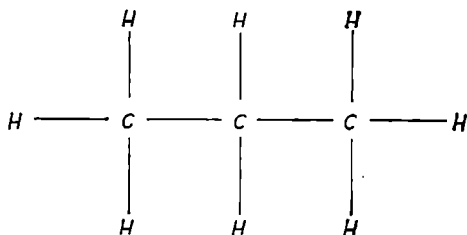
říkali.) Podobně v orientovaném grafu často píšeme místo  $[u, v]$  stručně  $\overrightarrow{uv}$  a říkáme, že tato hrana jde z uzlu  $u$  do uzlu  $v$ ,  $u$  je jejím počátečním uzlem a  $v$  je jejím koncovým uzlem.

Z naší definice vyplývá, že v neorientovaném grafu mohou být spojeny hranou pouze dva různé uzly a žádné dva uzly nemohou být spojeny více než jednou hranou. Skutečně nejčastěji se zkoumají grafy, v nichž je toto splněno. Někdy se však ukazuje účelným upravit



Obr. V.5

definici tak, aby mohlo existovat i více hran spojujících tutéž dvojici uzlu; takovéto grafy se často nazývají multigrafy, aby se tak odlišily od grafů, o nichž mluvíme zde. Příklad multigrafu je na obr. V.3. U orientovaných grafů připouští naše definice existenci hran  $\overrightarrow{uv}$  a  $\overleftarrow{vu}$ , které spojují tutéž dvojici uzlů, jsou však opačně orientované. Pokud bychom připouštěli existenci více



Obr. V.6

hran se společným počátečním i koncovým uzlem, mluvili bychom o orientovaném multigrafu.

Někdy se připouštějí (v neorientovaném i orientovaném grafu) i takzvané smyčky, to jest hrany spojující nějaký uzel se sebou samým. Příklad neorientovaného grafu se smyčkou u uzlu  $u$  je na obr. V.4.

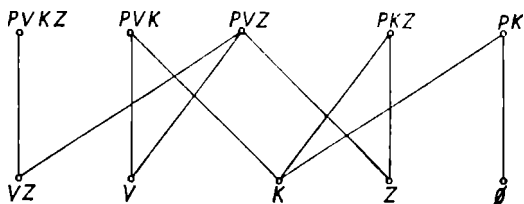
Je mnoho aplikací teorie grafů. Uvedme si jen, že schematické znázornění železniční sítě (obr. V.5) nebo chemický strukturní vzorec (vzorec propanu na obr. V.6) je grafem. Některé zajímavosti z této teorie poznáme v následujících odstavcích.

S teorií grafů těsně souvisí kombinatorika. Něco z ní už znáte ze školy (variace, kombinace). I ta má velký význam pro jiné obory matematiky (mluvíme o kombi-

natorické topologii a kombinatorické geometrii, důležitá je kombinatorika i pro teorii pravděpodobnosti) i pro praxi. I z ní poznáme některé zajímavosti.

## PŘEVOZNÍK, VLK, KOZA A ZELÍ

Známostou hádanku na toto téma jste jistě už slyšeli. Ukážeme si, jak ji můžeme řešit pomocí teorie grafů.



Obr. V.7

Převozník má převést přes řeku vlka, kozu a zelí. Všechny tři najednou vézt nemůže; může vzít současně buď vlka a kozu, nebo vlka a zelí, nebo kozu a zelí. Přitom však nemůže ponechat bez dozoru vlka s kozou, protože vlk by kozu sežral. Z podobného důvodu nemůže nechat osamotě kozu se zelím. Jak má postupovat při převážení?

Situaci si můžeme znázornit grafem na obr. V.7. Každý uzel tohoto grafu označuje jistou situaci při převozu; je označen začátečními písmeny názvů těch objektů, které jsou na prvním břehu; tedy například  $PK$  značí, že na prvním břehu je převozník s kozou a na druhém samozřejmě vlk a zelí. Symbolem prázdné množiny  $\emptyset$  je označena situace, kdy jsou všichni převezeni na druhý

břeh. Hrany znázorňují možné přechody od jedné situace k druhé. Vyloučené situace jako *VK* nebo *KZ* vynecháváme.

Jde nyní o to, nalézt v grafu cestu z uzlu *PVKZ* do uzlu  $\emptyset$ . Cestou z uzlu  $u_0$  do uzlu  $u_n$  v grafu *G* nazýváme konečnou posloupnost uzlů a hran tohoto grafu, která má tvar

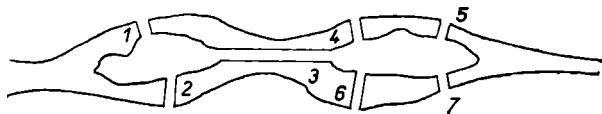
$$u_0, u_0u_1, u_1, u_1u_2, u_2, \dots, u_{n-1}, u_{n-1}u_n, u_n$$

a v níž se žádné uzly ani hrany neopakují. Na příslušném obrázku každé cestě odpovídá jednoduchá lomená čára.

Na obr. V.7 vidíme dvě takovéto cesty. Jedna má uzly *PVKZ*, *VZ*, *PVZ*, *V*, *PVK*, *K*, *PK*,  $\emptyset$ , druhá má uzly *PVKZ*, *VZ*, *PVZ*, *Z*, *PKZ*, *K*, *PK*,  $\emptyset$ . Tyto cesty nám udávají dvě možná řešení. První řešení: převést nejprve kozu, vrátit se sám zpět, převést zelí, vrátit se zpět s kozou, převést vlka, vrátit se sám zpět, převést kozu. Druhé řešení: převést nejprve kozu, vrátit se sám zpět, převést vlka, vrátit se zpět s kozou, převést zelí, vrátit se sám zpět, převést kozu.

## SEDM MOSTŮ V KRÁLOVCI

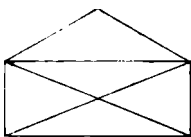
O Leonhardu Eulerovi jsme už mluvili v III. kapitole v souvislosti s číslem *e*. Tento veliký matematik prožil část svého života v městě Královci (Königsberg) ve



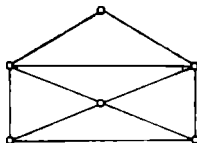
Obr. V.8

Východním Prusku (dnešní Kaliningrad v SSSR). V tomto městě v Eulerově době bylo sedm mostů přes řeku Pregel; jsou znázorněny na obr. V.8.

Obyvatelé Královce si tehdy lámali hlavu s hádankou, zda by si mohli udělat procházku městem tak, aby přes každý most přešli právě jednou a vrátili se nakonec zpět na místo, odkud vyšli. Pro matematika, jakým byl Euler, ovšem i takováto maličkost byla podnětem k vy-



Obr. V.9



Obr. V.10

tvoreni matematické teorie. Tak vznikl důležitý pojem eulerovského grafu.

Představme si, že nějaký obrázek chceme nakreslit jedním tahem tak, abychom nezvedali tužku s papíru a abychom žádnou čáru nekreslili dvakrát. Vezměme si třeba dopisní obálku na obr. V.9. Takovýto obrázek můžeme upravit na znázornění grafu. Jestliže z nějakého bodu vychází jiný počet čar než dvě, budeme tento bod považovat za znázornění uzlu grafu a nakreslíme tam příslušný kroužek. I bod, z něhož vycházejí dvě čáry, můžeme považovat někdy za znázornění uzlu, nechceme-li dostat multigraf. Z oné obálky nám tedy vznikne graf na obr. V.10.

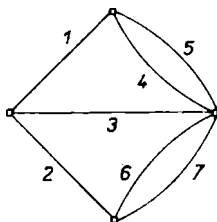
Tah v grafu  $G$  je definován podobně jako cesta. Je to posloupnost

$$u_0, u_0u_1, u_1, u_1u_2, u_2, \dots, u_{n-1}, u_{n-1}u_n, u_n$$



uzlů a hran grafu  $G$ . Na rozdíl od cesty uzly se mohou v této posloupnosti opakovat, ale hrany nikoliv. Jestliže  $u_0$  splývá s  $u_n$ , pak mluvíme o uzavřeném tahu, v opačném případě jde o otevřený tah. Obsahuje-li tento tah všechny hrany grafu  $G$  (každou ovšem právě jednou), říkáme mu eulerovský tah.

Nakreslit obrázek jedním tahem tedy znamená najít v příslušném grafu eulerovský tah. Máme-li se navíc



Obr. V.11

nakonec vrátit na totéž místo, odkud jsme vyšli, musí jít o uzavřený eulerovský tah. V případě hádanky o sedmi mostech města Královce jde o to, nalézt uzavřený eulerovský tah v multigrafu na obr. V.11. Uzly tohoto multigrafu odpovídají břehům řeky a ostrovům, hrany znázorňují příslušné mosty.

Stupeň uzlu  $u$  v grafu  $G$  je počet hran incidentních s uzlem  $u$  v grafu  $G$ . Počet uzlů lichého stupně v konečném grafu je vždy sudý. Je tomu tak proto, že součet stupňů všech uzlů v grafu je roven dvojnásobku počtu hran, tedy číslu sudému. Platí to i pro multigrafy.

Uzavřený eulerovský tah v konečném grafu (nebo multigrafu)  $G$  existuje právě tehdy, mají-li všechny uzly v tomto grafu sudý stupeň. Znamená to, že takovýto

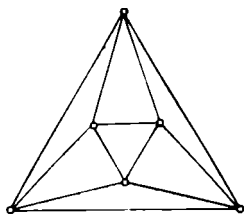
graf lze nakreslit jedním tahem tak, že začneme kdekoliv a opět se vrátíme tam, odkud jsme vyšli. Takovýto graf se nazývá eulerovský. V multigrafu na obr. V.11 to zřejmě nelze; tam dokonce všechny uzly mají lichý stupeň. Žádanou procházku po mostech města Královce tedy nelze provést. (Přesně bychom vlastně měli mluvit o souvislých grafech, tedy o grafech té vlastnosti, že v nich k libovolným dvěma uzlům existuje cesta, která je spojuje. Pokud graf není souvislý, samozřejmě jej jedním tahem nakreslit nelze. V celém tomto odstavci však pro jednoduchost budeme mlčky předpokládat, že jde vždy o souvislý graf, popřípadě multigraf.)

Pokud v grafu existují právě dva uzly lichého stupně, neexistuje v něm uzavřený eulerovský tah, ale existuje otevřený eulerovský tah, který vychází z jednoho uzlu lichého stupně a končí v druhém. Příkladem je graf na obr. V.10. Tento graf lze nakreslit jedním tahem, nemůžeme však začít kdekoliv, ale musíme vyjít z některého ze dvou uzlů, které jsou na obrázku dole, a skončit v druhém. (Zkuste to!)

Pokud je uzlů lichého stupně více než dva, eulerovský tah v grafu neexistuje. Nejmenší počet tahů takových, že každá hrana grafu patří právě do jednoho z nich, je roven polovině tohoto počtu uzlů lichého stupně (tento



Obr. V.12



Obr. V.13

počet uzlů je sudý). Multigraf na obr. V.11 lze tedy nakreslit dvěma tahy. Abychom nakreslili zalepenou dopisní obálku na obr. V.12, potřebujeme tři tahy.

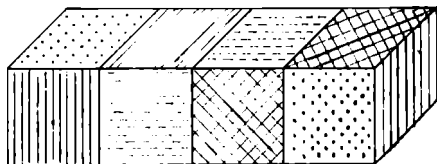
Příklad eulerovského grafu, tedy grafu, který lze nakreslit jedním tahem, je na obr. V.13.

V době, kdy žil Euler, teorie grafů jako samostatný matematický obor ještě neexistovala. Pro Eulera byla hádanka se sedmi mosty spíše rozptýlením při jeho vážné vědecké práci. Nicméně — veden kratochvilnou hříčkou — položil už tehdy základy této teorie a jistě zasluženě dodnes mluvíme o eulerovských tazích a eulerovských grafech.

## HLAVOLAM S BAREVNÝMI KOSTKAMI

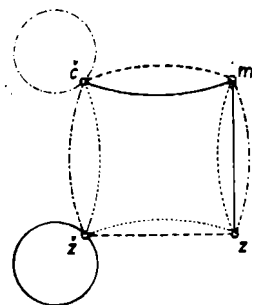
Možná, že se vám už někdy dostal do ruky hlavolam sestávající ze čtyř krychlí s různě zbarvenými stěnami. Krychle jsou čtyři a na jejich stěnách se vyskytují čtyři barvy: červená, modrá, zelená a žlutá. Úkolem je srovnat krychle do řady, to jest vytvořit z nich kvádr s rozměry  $4 \times 1 \times 1$  tak, aby se na každé obdélníkové stěně kváдру vyskytovaly všechny čtyři barvy (obr. V.14).

Také k řešení této úlohy můžeme použít teorie grafů. Nejprve uspořádáme krychle v libovolném pořadí, to



Obr. V.14

jest označme je symboly  $K_1, K_2, K_3, K_4$ . Sestrojíme multigraf  $G$ , jehož uzly budou označeny  $\check{c}, m, z, \check{z}$  a budou odpovídat barvám s příslušným začátečním písmenem. (V matematice zpravidla neužíváme jako symbolů písmen s háčky, ale zde to uděláme, abychom měli dobrý přehled.) Hrany grafu  $G$  budou znázorňovat dvojice



Obr. V.15

protilehlých stěn jednotlivých krychlí; hrany odpovídající jedné krychli odlišíme v grafu od hran odpovídajících ostatním krychlím (na obr. V.15 jsou rozlišeny tak, že jsou kresleny plně, čárkovaně, čerchovaně nebo tečkovaně, podle toho, o kterou krychli jde). Protože na každé krychli jsou tři dvojice protilehlých stěn, obsahuje graf celkem dvanáct hran rozdělených do čtyř tříd po třech hranách. Hrana patřící do  $i$ -té třídy spojuje dva uzly  $x, y$  grafu  $G$  právě tehdy, jestliže se na  $i$ -té krychli  $K_i$  vyskytuje dvojice protilehlých stěn majících barvy  $x, y$ . Je zřejmé, že  $G$  může být multigrafem a může obsahovat i smyčky.

Předpokládejme, že máme sestrojen graf  $G$  odpovída-

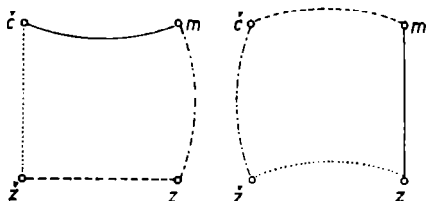
jíci dané čtveřici krychlí a že máme hlavolam vyřešen, to jest máme sestaven kvádr s požadovanými vlastnostmi. Předpokládejme dále, že tento kvádr leží na stole a že tedy můžeme mluvit o stěně dolní, horní, přední a zadní, které mají vesměs rozměry  $4 \times 1$ . Podobně nazýváme stěny jednotlivých krychlí tvořící tyto stěny kvádru.

Mějme nyní zobrazení  $p_1$ , které každé barvě  $x$  přiřazuje barvu  $p_1(x)$  tak, že  $p_1(x)$  je barva dolní stěny krychle, jejíž horní stěna má barvu  $x$ . Protože horní stěny krychlí mají navzájem různé barvy a dolní stěny rovněž, je to vzájemně jednoznačné zobrazení naší množiny barev opět na tuto množinu, to jest permutace této množiny. Bereme-li místo horní stěny přední a místo dolní stěny zadní, dostaneme podobně permutaci  $p_2$ .

Budeme nyní orientovat některé hrany grafu  $G$ , to jest přikreslovat k nim šipky. Každá barva  $x$  je spojena v grafu  $G$  s barvou  $p_1(x)$ ; k této hraně přikreslíme šipku vedoucí od  $x$  k  $p_1(x)$ . Graf, který obsahuje všechny uzly grafu  $G$  a všechny hrany, které jsme takto orientovali, označme  $F_1$ . Je to takzvaný faktor grafu  $G$ . (Graf, jehož množina uzlů je podmnožinou množiny uzlů grafu  $G$  a jehož množina hran je podmnožinou množiny hran grafu  $G$ , nazýváme podgrafem grafu  $G$ . Podgraf grafu  $G$ , jehož množina uzlů je rovna množině uzlů grafu  $G$ , nazýváme faktorem grafu  $G$ .) Každý jeho uzel má stupeň rovný dvěma (je-li uzel incidentní se smyčkou, počítá se tato smyčka při určování stupně uzlu jako dvě hrany). Říkáme mu tedy faktor stupně dvě neboli kvadratický faktor. Navíc má  $F_1$  tu vlastnost, že obsahuje právě čtyři hrany a každá z těchto hran je z jiné třídy. Podobně k permutaci  $p_2$  najdeme kvadratický faktor  $F_2$  grafu  $G$ , který má rovněž tuto vlastnost. Dále je zřejmé, že faktory  $F_1$  a  $F_2$  nemají společnou

hranu (takováto hrana by musela odpovídat dvojici horní a dolní stěny některé krychle a současně přední a zadní stěny téže krychle, což není možné); říkáme, že jsou hranově disjunktní.

Nyní si představme, že jsme v grafu  $G$  našli faktory  $F_1$  a  $F_2$  popsaných vlastností. Ukážeme si, že pak můžeme hlavolam vyřešit. Hrany každého z faktorů  $F_1$ ,  $F_2$  orientujeme tak, aby každý uzel byl počátečním uzlem právě



Obr. V.16

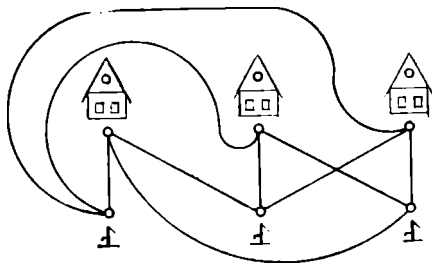
jedné hrany příslušného faktoru. To lze vždy provést a jistě snadno přijdete na to, jak se to provede. Hraně  $i$ -té třídy směřující od uzlu  $x$  k uzlu  $y$  bude v řešení odpovídat poloha  $i$ -té krychle, při které má její horní stěna barvu  $x$  a dolní barvu  $y$ . Uvedeme krychle do této polohy a sestavíme z nich kvádr; pak na horní i dolní stěně budou všechny čtyři barvy. Podobně hraně  $i$ -té třídy směřující od uzlu  $x$  k uzlu  $z$  v  $F_2$  bude odpovídat poloha  $i$ -té krychle, při které má její přední stěna barvu  $x$  a zadní barvu  $z$ . Protože  $F_2$  je hranově disjunktní s  $F_1$ , jeho hrany odpovídají jiným dvojicím stěn krychlí než jsou ty, které jsou nahoře a dole. Krychle tedy můžeme do požadované polohy uvést pouze otáčením kolem vodorovné osy bez měnění polohy horní a dolní stěny. Takto získáme řešení hlavolamu.

Obvykle se prodávají krychle vybarvené tak, že odpovídají grafu na obr. V.15. V tom případě je řešením hlavolamu kvádr, na jehož horní stěně jsou barvy v pořadí červená, zelená, modrá, žlutá, na dolní stěně modrá, žlutá, zelená, červená, na přední stěně modrá, červená, žlutá, zelená, na zadní stěně zelená, modrá, červená, žlutá. Další řešení úlohy získáte například přeskupením krychlí, záměnou protilehlých stěn (každou krychli otočíte o  $180^\circ$  kolem svislé osy) nebo otočením kvádrů podle jeho podélné osy.

Popsané kvadratické faktory grafu  $G$  vyhledáváme při tak malém počtu hran zkusmo, systematicky probereme jednotlivé možnosti. Uvedené metody lze použít i v případech, kdy počet krychlí a barev jejich stěn je jiný než čtyři; dostáváme pak pouze grafy s jiným počtem uzlů a tříd hran, jinak je postup stejný.

## ROVINNÉ GRAFY

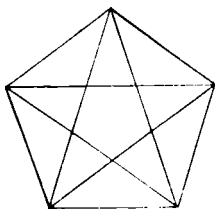
Jsou tři domy a tři studně. Majitel každého domu by chtěl mít od svého domu cesty ke všem třem studním, ale žádný z těchto majitelů nechce, aby se některá jeho



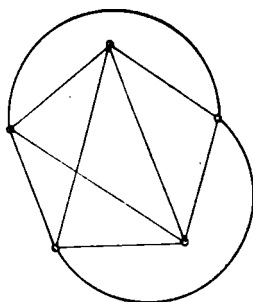
Obr. V.17

cesta křížovala se sousedovou. Je to možné tak zařídit?

Tato úloha se týká takzvaných rovinných grafů. Jak jsme uváděli na začátku této kapitoly, grafy znázorňujeme tak, že uzly kreslíme jako malé kroužky a hrany jako úsečky nebo oblouky spojující tyto kroužky. Přitom jsme zatím nehleděli na to, zda lze tyto úsečky nebo



Obr. V.18



Obr. V.19

oblouky kreslit tak, aby se nikde neprotínaly. Pokud to lze, říkáme příslušnému grafu rovinný graf.

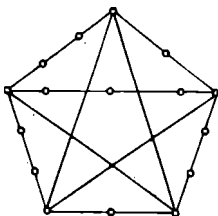
Znázorníme-li domy i studně jako uzly grafu a příslušné cesty jako jeho hrany, dostaneme graf, který se v teorii grafů často označuje symbolem  $K_{3,3}$ . Tento graf není rovinný; v nejlepší případě jej lze nakreslit tak, že se pouze dva oblouky znázorňující hrany spolu protínají (obr. V.17). Majitelům domů tedy nezbývá nic jiného, než aby se alespoň dva z nich dohodli, že se jejich cesty budou křížovat.

Ve středověku se věřilo, že jisté znamení zvané muří noha může chránit člověka před nástrahami ďábla; je o tom zmínka i v Goethově „Faustovi“. Muří noha je



pravidelný pětiúhelník se všemi úhlopříčkami (obr. V.18). Odpovídá mu graf, který se označuje  $K_5$ ; má pět uzlů, každé dva uzly jsou v něm spojeny hranou. Ani tento graf není rovinný; na obr. V.19 vidíme jeho náskres, na němž se právě dva oblouky protínají.

Jestliže některé hrany grafu  $G$  nahradíme cestami, které obsahují ještě další uzly, a dostaneme tak graf  $G'$ , říkáme, že graf  $G'$  byl získán z grafu  $G$  dělením hran.



Obr. V.20

Na obr. V.20 vidíme graf získaný dělením hran z grafu  $K_5$ .

Samozřejmě není-li nějaký graf rovinný, není rovinný ani graf získaný z něho dělením hran. A jestliže nerovinný graf  $G_1$  je podgrafem (to jest částí) grafu  $G_2$ , pak ani graf  $G_2$  nemůže být rovinný. Tedy žádný graf, který obsahuje jako podgraf graf  $K_{3,3}$  nebo  $K_5$  nebo graf získaný z některého z těchto grafů dělením hran, není rovinný.

Platí to však i obráceně. Mluví o tom věta, kterou dokázal K. Kuratowski:

Graf  $G$  je rovinný právě tehdy, neobsahuje-li jako podgraf graf  $K_{3,3}$  nebo  $K_5$  nebo graf získaný z některého z těchto grafů dělením hran.

Tato významná věta nám umožňuje určit, zda je nějaký graf rovinný, aniž bychom se jej pokoušeli kreslit žádaným způsobem.

## BAREVNÉ MAPY

Zeměpisné mapy se zpravidla barví tak, že území každého státu je vybarveno jednou barvou a území sousedních států jsou vybarvena různými barvami.

Představme si, že máme takovouto mapu nakreslenou v rovině nebo na globu. Můžeme vzít zcela libovolnou mapu, která vůbec nemusí odpovídat skutečné situaci na zeměkouli. Chtěli bychom ji obarvit předepsaným způsobem. Území, která mají společný jen jeden bod (jako například Arizona a Colorado), za sousední nepokládáme a můžeme je barvit stejnou barvou. Území, která jsou od sebe oddělena územím jiného státu (popřípadě mořem), pokládáme za různá; neuvažujeme o tom, že třeba patří témuž státu (například USA a Aljaška). Kolik barev na to potřebujeme?

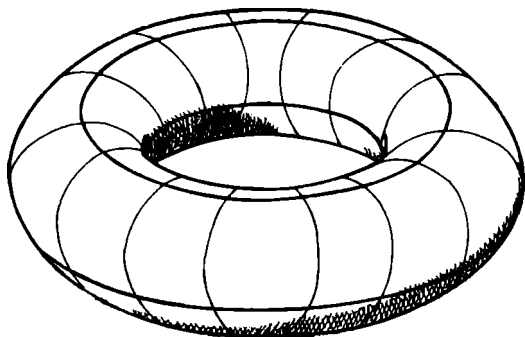
Tři barvy nestačí. Najdeme-li si na mapě Lucembursko a jeho tři sousedy, Francii, Belgie a NSR, vidíme, že každý z těchto sousedů sousedí s oběma ostatními a že tedy každý ze zmíněných čtyř států musí být obarven jinou barvou.

P. J. Heawood na konci minulého století dokázal, že pět barev stačí. Dlouho však nebylo jasné, zda by nestačily čtyři barvy. Tento problém vešel do dějin matematiky jako problém čtyř barev.

Úvahy o barvení map lze převést na úvahy o rovinných grafech. Uvnitř každého území na mapě zvolíme jeden bod — třeba hlavní město příslušného státu. Ten

bude uzlem určitého grafu. Hranou v tomto grafu spojíme dva uzly právě tehdy, leží-li tyto uzly na územích, která spolu sousedí. Takovýto graf bude rovinný.

Nyní tedy jde o to, obarvit uzly tohoto grafu tak, aby libovolné dva uzly spojené hranou měly různou barvu. Jinými slovy, máme rozložit množinu uzlů grafu na



Obr. V.21

disjunktní třídy tak, aby žádné dva uzly z téže třídy nebyly spojeny hranou. Nejmenší počet takovýchto tříd (čili barev) se nazývá chromatické číslo grafu. Problém čtyř barev tedy spočívá v tom, zda chromatické číslo rovinného grafu může být větší než čtyři.

Problém čtyř barev odolával snahám matematiků až do července 1976. Tehdy američtí matematikové W. Haken a K. Appel dokázali, že chromatické číslo rovinného grafu nemůže být větší než čtyři a tedy čtyři barvy stačí k obarvení libovolné mapy. Podařilo se jim najít konečný (ale velmi vysoký) počet grafů, o nichž dokázali, že lze-li tyto grafy žádaným způsobem obarvit, lze tak obarvit

všechny rovinné grafy. Obarvení těchto grafů pak provedli na samočinném počítači.

Je zajímavé, že pro složitější plochy než rovina nebo kulová plocha byla podobná tvrzení dokázána podstatně dříve. Například už dlouho je známo, že libovolnou mapu na anuloidu (plocha podobná pneumatice na obr. V.21) lze obarvit sedmi barvami.

S větou o čtyřech barvách je ekvivalentní věta, kterou vyslovil (tehdy pouze jako hypotézu) P. G. Tait: Je-li  $G$  rovinný graf, v němž každý uzel má stupeň 3, pak lze hrany grafu  $G$  obarvit třemi barvami tak, že žádné dvě hrany incidentní s tímž uzlem nemají stejnou barvu.

## BLUDIŠTĚ

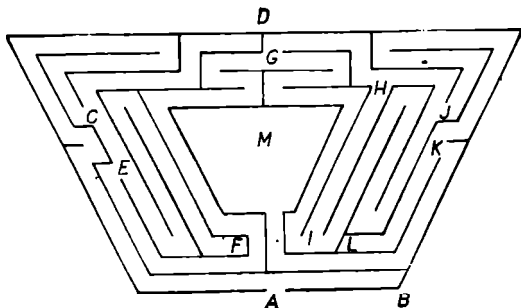
Z řecké mytologie známe báji o labyrintu, který postavil všeměl Daidalos pro krétského krále Mínoa. V labyrintu byl ukryt Mínoátauros, člověk s býčí hlavou, syn býka a Mínoovy manželky Pásifaé. Tomuto netvoru musel athénský král Aigeus každých devět let posílat jako stravu sedm mladíků a sedm dívek. Konec tomu učinil Aigeův syn Théseus, který Mínoátaura zabil. Musel ho však nejprve v labyrintě najít a po svém hrdinském činu se dostat z labyrintu ven. K tomu mu pomohla Ariadné, dcera krále Mínoa. Dala mu klubko nití; Théseus táhl nit za sebou, čímž si značil cestu.

Báje má určité historické jádro; zbytky labyrintu byly skutečně na Krétě nalezeny.

Dnes slouží bludiště jako atrakce. Všichni jistě znáte zrcadlové bludiště v Praze na Petříně. Anglický humorista Jerome Klapka Jerome poutavě popisuje bloudění v bludišti v Hampton Courtu ve své knize „Tři muži ve

člunu kromě psa“ (v novějším překladu „Tři muži ve člunu, o psu nemluvě“):\*)

„Nakonec vedli si všickni jako diví a volali průvodce; milý průvodce přišel, vylezl na žebřík před bludištěm a se žebříku jim vysvětloval, kudy ven. Všem však už v hlavě vířilo a byli tak popleteni, že nic nechápali, takže



Obr. V.22

je průvodce vyzval, aby zůstali, kde jsou, že pro ně přijde. Srazili se v houfec a čekali; průvodce slezl a vstoupil do bludiště.

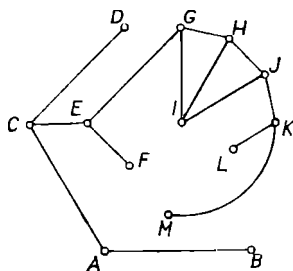
Byl naneštěstí, jak už tomu osud někdy chce, nováčkem a nevyznal se valně ve své živnosti; v bludišti sice byl, ale naléztí jich nemohl. Chodil sem tam, aby se k nim dostal, a konečně sám zabloudil. Občas jej zahlédli, jak se žene na druhé straně přepážky; pokaždé, když je uviděl, hnál se k nim a oni čekali pět minut; ale průvodce objevil se za chvíli opět na místě, kde byl dříve, a divil se, kudy prý chodili.

\*) Překlad T. a E. Háchů. Vydalo nakladatelství F. Topič v Praze 1902.

Nezbylo nic jiného než čekat, až přijde od oběda starý dozorce, a pak teprve dostali se ven.

Harris tvrdil, že, pokud prý dovede posoudit, je to bludiště výtečné; i dohodli jsme se, že tam budeme hledět vlákat Jiřího, až poplujeme zpět.“

Plán bludiště v Hampton Courtu je na obr. V.22. Takovéto bludiště lze znázornit grafem; je na obr. V.23.



Obr. V.23

Představme si, že by Théseus neměl Ariadninu nit, ale zato křídu, kterou by si mohl značit cesty, kterými prošel. Jak by postupoval, aby zaručeně Mínótaura našel a dostal se opět ven? Na to existují různé předpisy čili algoritmy (o algoritmech se podrobněji dočtete v VII. kapitole). Jeden z nich popsál Norbert Wiener (1895 až 1964), zvaný „otec kybernetiky“.

Chodbu, kterou prošel jednou, bude Théseus značit jedním křížkem; pokud ji projde podruhé, nakreslí ještě druhý křížek. Z každého rozcestí se vždy dá některou chodbou, která dosud nebyla označena; pokud jsou všechny chodby označeny, půjde tou jednodokřížkovou chodbou, které použil naposledy při příchodu na toto rozcestí (to je vždy možné). Nikdy nevstoupí do chodby

označené dvěma křížky. Při tomto postupu zaručeně Mínótaura najde. Kdyby byl oklamán a žádný Mínótauros by v bludišti nebyl, mohl by se o tom Théseus přesvědčit tím, že by se podle tohoto algoritmu dostal zpět ke vchodu, kterým do labyrintu vešel; algoritmus zaručuje, že v tomto případě by byl celý labyrint prohledán. Pokud Théseus Mínótaura najde a zabije, vrátí se tak, že používá stále chodeb s jedním křížkem; ty ho bezpečně dovedou k východu. Zkuste si to s labyrintem na obr. V.22.

## MAGICKÉ ČTVERCE

Magickým čtvercem nazýváme tabulku rozdělenou na  $n$  řádků a  $n$  sloupců, do jejichž políček jsou vepsána čísla od 1 do  $n^2$  tak, aby součet čísel v každém řádku, v každém sloupci a v obou úhlopříčkách byl stejný.

Kdysi se věřilo, že tyto čtverce mají skutečně magický význam. Dnes se na ně díváme pouze jako na zajímavou hříčku.

Na grafickém listě Albrechta Dürera „Melancholie“ můžeme nalézt magický čtverec z obr. V.24.

Popíšeme si nejstarší metodu sestavování magických čtverců pro  $n$  liché. Tato metoda se nazývá indická nebo také siamská (Siam je starý název Thajska).

Řádky budeme číslovat zdola nahoru číslly 1 až  $n$ , sloupce zleva doprava rovněž číslly 1 až  $n$ . Symbol  $(x, y)$  značí políčko v  $x$ -tém řádku a  $y$ -tém sloupci. Jestliže se v popisu metody vyskytne výraz  $x + 1$  a budeme mít  $x = n$ , budeme za  $x + 1$  považovat číslo 1; podobně pro  $y + 1$ . Vyskytne-li se výraz  $x - 1$  a bude  $x = 1$ , budeme za  $x - 1$  považovat číslo  $n$ . Řekli jsme, že  $n$  je liché; má tedy tvar  $n = 2m + 1$ , kde  $m$  je přirozené číslo.

Tohoto čísla  $m$  budeme v popisu metody používat.

Nyní můžeme popsat jednotlivá pravidla indické metody:

- 1) Číslo 1 vepíšeme do políčka  $(n, m + 1)$ .
- 2) Jestliže číslo  $z$  je vepsáno do políčka  $(x, y)$  a políčko  $(x + 1, y + 1)$  je dosud volné, vepíšeme číslo  $z + 1$  do políčka  $(x + 1, y + 1)$ .

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Obr. V.24

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Obr. V.25

3) Jestliže číslo  $z$  je vepsáno do políčka  $(x, y)$  a políčko  $(x + 1, y + 1)$  je už obsazeno, pak číslo  $z + 1$  vepíšeme do políčka  $(x - 1, y)$ . (Lze dokázat, že toto políčko musí být volné.)

Mějme  $n = 3$ , tedy  $m = 1$ . Číslo 1 podle pravidla 1) zapíšeme do  $(3, 2)$ . Políčko  $(1, 3)$  je volné, napíšeme tam 2. Políčko  $(2, 1)$  je volné, napíšeme tam 3. Políčko  $(3, 2)$  je už obsazeno číslem 1, tedy číslo 4 píšeme do políčka  $(1, 1)$ . Políčko  $(2, 2)$  je volné, píšeme tam 5. Políčko  $(3, 3)$  je volné, píšeme tam 6. Políčko  $(1, 1)$  je obsazeno číslem 4, tedy číslo 7 píšeme do políčka  $(2, 3)$ . Políčko  $(3, 1)$  je volné, píšeme tam 8. Konečně 9 píšeme do volného políčka  $(1, 2)$ . Magický čtverec je hotov (obr. V.25).

Existují ovšem i další metody sestavování magických čtverců.



## LATINSKÉ ČTVERCE

Jiný druh zajímavých čtvercových tabulek jsou latinské čtverce. Máme opět tabulku o  $n$  řádcích a  $n$  sloupcích. Tentokrát do ní vepisujeme čísla od 1 do  $n$  tak, aby se každé z těchto čísel v každém řádku a v každém sloupci vyskytovalo právě jednou.

5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1
1	2	3	4	5

Obr. V.26

4	3	2	1
3	1	4	2
2	4	1	3
1	2	3	4

Obr. V.27

Latinské čtverce mají pro moderní matematiku podstatně větší význam než čtverce magické. Souvisejí s teorií grup, o níž jsme mluvili v II. kapitole, a jí podobnou teorií kvazigrup. Rovněž mají význam pro zkoumání konečných geometrií, které jsme poznali v IV. kapitole.

Latinský čtverec můžeme sestavit poměrně jednoduše. Budeme políčka značit  $(x, y)$  jako v předešlém odstavci. Do políčka  $(x, y)$  vepíšeme zbytek získaný při dělení čísla  $x + y - 1$  číslem  $n$ ; je-li tento zbytek 0, píšeme místo něj  $n$ . Tak například pro  $n = 5$  dostaneme latinský čtverec na obr. V.26.

Je-li  $n$  takové číslo, že  $n + 1$  je prvočíslo, můžeme také do políčka  $(x, y)$  vepsat zbytek při dělení čísla  $xy$

číslem  $n + 1$ . Příklad takového čtverce pro  $n = 4$  je na obr. V.27.

Počet různých latinských čtverců o  $n$  řádcích a  $n$  sloupcích je velmi vysoký; pro každé  $n$  je to nejméně

$$1! \cdot 2! \cdot 3! \dots n!$$

Sestrojování latinských čtverců tedy není nic těžkého. Horší je to však s ortogonálními dvojicemi latinských čtverců. Dva latinské čtverce o  $n$  řádcích a  $n$  sloupcích nazveme ortogonálními, jestliže ke každé uspořádané dvojici  $[a, b]$  celých čísel mezi 1 a  $n$  existuje právě jedna dvojice  $(x, y)$  taková, že  $a$  je v políčku  $(x, y)$  v prvním čtverci a  $b$  je v políčku  $(x, y)$  v druhém čtverci. Příklad ortogonálních latinských čtverců je na obr. V.28.

Utvoříme-li nyní z ortogonálních latinských čtverců čtverec, v jehož každém políčku je uspořádaná dvojice čísel, která leží v odpovídajících políčkách obou daných čtverců, nazývá se tento čtverec řecko-latinský. V našem případě je to čtverec na obr. V.29 (čárky mezi čísly nepíšeme).

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	1	2	3	4
2	3	4	5	1
4	5	1	2	3

Obr. V.28

Zde se opět setkáváme s jménem L. Eulera. Ten dokázal, že pro každé liché  $n$  a pro každé  $n$  dělitelné čtyřmi existují ortogonální latinské čtverce o  $n$  řádcích a  $n$  sloupcích. Pro ostatní čísla  $n$  mohou existovat a nemusejí. Neexistují například pro  $n = 6$ , pro  $n = 10$  existují. Euler se zabýval úlohou, zda lze postavit 36 důstojníků o šesti různých hodnotech a ze šesti různých pluků do

11	22	33	44	55
23	34	45	51	12
35	41	52	13	24
42	53	14	25	31
54	15	21	32	43

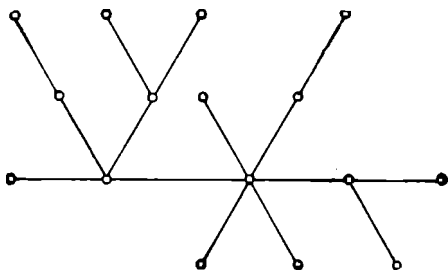
Obr. V.29

čtverce tak, aby v každé řadě a v každém zástupu byli důstojníci vesměs různých hodnotí a z různých pluků. Řešením by byl řecko-latinský čtverec o šesti řádcích a šesti sloupcích: jak jsme uvedli, tento čtverec neexistuje. Úloha tedy nemá řešení.

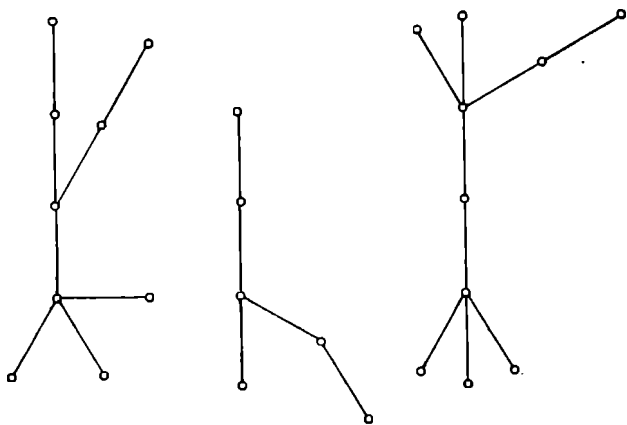
Ukázalo se, že řecko-latinské čtverce mají aplikace v agronomii. Představme si, že máme sedm odrůd pšenice a sedm druhů umělého hnojiva. Chceme vyzkoušet vliv jednotlivých hnojiv; k dispozici máme pole tvaru čtverce. Nejprůkaznější je pokus tehdy, utvoříme-li na poli řecko-latinský čtverec a do políčka s dvojicí  $[a, b]$  nasejeme  $a$ -tou odrůdu pšenice a pohnojíme ji  $b$ -tým hnojivem.

## ŽIVÁ PŘÍRODA V MATEMATICE

Co byste řekli matematickým termínům „strom“, „les“, „kostra“, „had“, „housenka“? V teorii grafů se skutečně vyskytují.



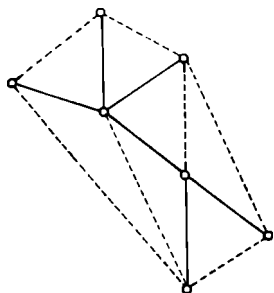
Obr. V.30



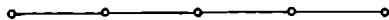
Obr. V.31

Uzavřený tah, v němž se neopakují uzly, se nazývá kružnice. Graf nazýváme souvislým, jestliže ke každým dvěma jeho uzlům existuje cesta, která je spojuje. Graf bez kružnic se nazývá les; je-li navíc souvislý, je to strom. Les se skládá z jednoho nebo více stromů. Na obr. V.30 vidíme strom, na obr. V.31 les.

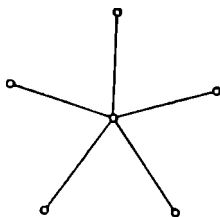
Každý souvislý graf  $G$  obsahuje faktor, který je stromem; tento faktor se nazývá kostrou grafu  $G$ . Na obr. V.32 vidíme takovou kostru; její hrany jsou kresleny plně, ostatní hrany grafu  $G$  čárkovaně.



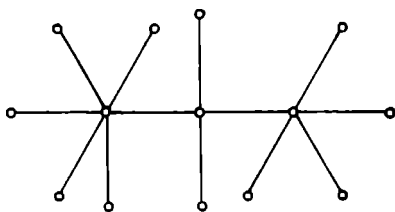
Obr. V.32



Obr. V.33

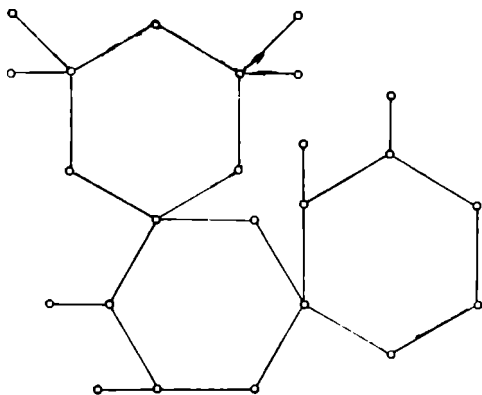


Obr. V.34



Obr. V.35

Strom neobsahující uzly stupně většího než dvě je had (obr. V.33). Strom, v němž právě jeden uzel má stupeň větší než jedna, je hvězda (obr. V.34). Hvězdy sice do živé přírody nepatří, ale tento graf připomíná spíše mořskou hvězdici. Strom, z něhož odstraněním všech uzlů stupně jedna a hran s nimi incidentních vznikne



Obr. V.36

had, se nazývá housenka (obr. V.35). Graf, jehož každá hrana náleží nejvýše jedné kružnici, je kaktus (obr. V.36).

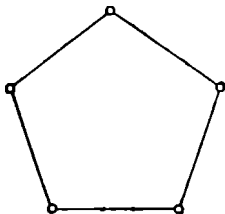
V teorii grafů se setkáme i s listy a kořeny. Jiné zajímavé termíny jsou kolo, mlýn, vřeten a podobně.

## Úlohy

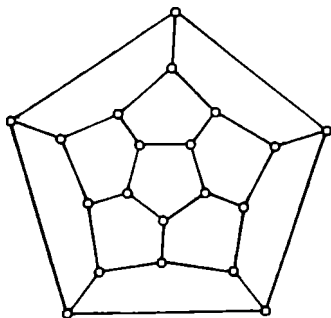
1. Podobným způsobem jako úlohu o převozníkovi lze řešit tuto úlohu: Tři cestovatelé cestují zemí lidojedů. Mají tři průvodce z řad domorodců. Nedůvěřují jim, a proto se snaží, aby lido-

jedi nad nimi neměli nikdy přesilu. Všechny šest lidí se potřebuje přeplavit přes řeku lodkou, v níž je místo jen pro dvě osoby. Jak to provedou ?

2. Podobným způsobem se mají přeplavit tři manželské páry. Muži jsou žárliví a žádný z nich nedovolí, aby jeho manželka byla v jeho nepřítomnosti ve společnosti jiného muže. Jak se přeplaví ?



Obr. V.37



Obr. V.38

3. Řešte analogickou úlohu pro více než tři manželské páry za předpokladu, že v řece je ostrov.

4. Na šachovnici je osm dam, každá z nich může brát libovolnou jinou. Rozestavte je tak, aby se navzájem neohrožovaly.

5. Obvyklou šachovnici může projít kůň tak, že každé pole navštíví právě jednou a nakonec se vrátí na výchozí pole. Bylo by to možné i na čtvercové šachovnici o lichém počtu řad a sloupců ? Bylo by to možné na obvyklé šachovnici, z níž jsou vyřazena pole a1 a h8 ?

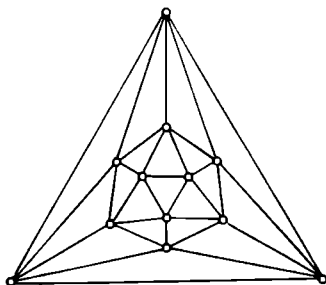
6. Graf na obr. V.37 nakreslete tak, aby se každé dvě hrany, které nejsou incidentní s tímž uzlem, protínaly právě v jednom bodě.

7. V grafu na obr. V.38 najdete uzavřený tah, který prochází každým uzlem právě jednou. (Jde o takzvanou Hamiltonovu kružnici.)

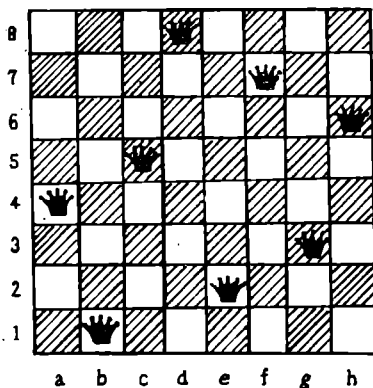
8. Totéž pro graf na obr. V.39.

9. Indickou metodou sestavte magický čtverec o pěti řádcích a pěti sloupcích.

10. Čemu je roven součet čísel v libovolném řádku magického čtverce o  $n$  řádcích a  $n$  sloupcích?



Obr. V.39



Obr. V.40

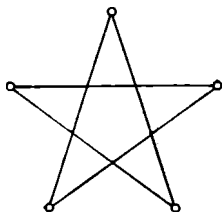
## Řešení úloh

1. Nejprve přepluje cestovatel s lidojedem, cestovatel se vrátí. Přeplují dva lidojedi, jeden se vrátí. Přeplují dva cestovatelé, vrátí se jeden cestovatel s lidojedem. Přeplují dva cestovatelé, vrátí se jeden lidojed. Přeplují dva lidojedi, jeden z nich se vrátí. Nakonec přeplují dva lidojedi.

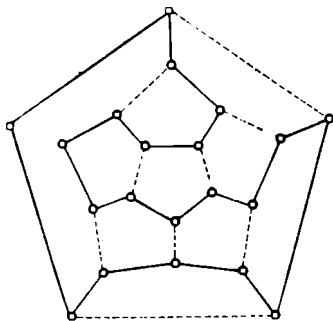
2. Manželské páry označme A, B, C. Nejprve přepluje paní A a paní B, paní A se vrátí. Přepluje paní A a paní C, paní A se vrátí. Přepluje pan B a pan C, manželé B se vrátí. Přepluje pan A a pan B, paní C se vrátí. Přepluje paní A a paní C, paní A se vrátí. Nakonec přepluje paní A a paní B.



8. Nejdříve paní A odveze postupně všechny ostatní ženy na ostrov a vrátí se. Potom pan B odveze postupně všechny ostatní muže kromě pana A na druhý břeh a vrátí se. Přeplyjí manželé A, pan C se vrátí. Přeplyjí pan B a pan C. Nakonec paní A postupně převezve všechny ostatní ženy z ostrova na druhý břeh.



Obr. V.41



Obr. V.42

4. Jedno možné řešení je na obr. V.40.

5. Není to možné. Kůň musí postupně střídat bílá a černá pole, tedy na šachovnici musí být stejný počet černých a bílých polí. V obou popsáných případech jsou tyto počty různé.

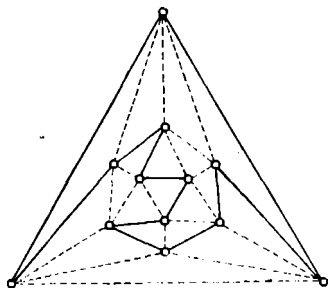
S chodem koně na šachovnici souvisí hádanka zvaná koníček. Určitý text je vepsán po jednotlivých slabikách do políček tabulky tak, že každá slabika je v políčku, které lze dosáhnout tahem koně z políčka s předchozí slabikou; úkolem je tento text najít. S touto hádankou se můžete často setkat v časopise „Hádanka a křížovka“.

6. Řešení je na obr. V.41.

7. Řešení je na obr. V.42.

8. Řešení je na obr. V.43.

9. Řešení je na obr. V.44.



Obr. V.43

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Obr. V.44

10. Ve čtverci jsou všechna čísla do 1 do  $n^2$ , jejich součet je  $\frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$ . Řádků je  $n$ , v každém z nich je součet stejný, je tedy roven  $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$ .