IV. KAPITOLA

GEOMETRIE A TOPOLOGIE

Všichni jistě dobře víte, že geometrií se zabývali lidé už ve starověkém Řecku — setkáváte se v ní přece neustále s jmény jako Pythagoras, Eukleides nebo Thales. Ovšem ještě dříve nežli Řekové ji pěstovaly jiné národy, například Egypťané a Babylóňané. U nich však šlo veskrze o praktické otázky vyměřování pozemků a staveb — odtud vlastně pochází její název, který znamená (v řečtině) zeměměřictví. Ale až v Řecku se stala geometrie skutečně exaktní vědou, a to především díky Eukleidovi (IV. století př. n. l.) a jeho slavnému spisu „Základy geometrie". Eukleides zavedl do geometrie soustavu axiomů a z ní odvozoval jednotlivé věty — tak se to v matematice dělá podnes. Geometrie tím značně předběhla ostatní matematické obory, v nichž se s něčím takovým začalo až podstatně později. Není bez zajímavosti, že filozof Baruch Spinoza (1630 až 1677) napsal dílo „Ethica ordine geometrico demonstrata" čili „Etika předvedená geometrickým způsobem". Proč zrovna geometrickým? Užívá snad nějakých bodů, přímek nebo kružnic? Nikoliv; s geometrií má tento výklad etiky společné pouze to, že je psán formou jednotlivých vět (pouček), za nimiž následují důkazy. Dnes bychom tento způsob nazvali spíše matematickým, protože se ho užívá všude v matematice. Ve Spinozově době se však užíval především v geometrii; ostatní matematické obory se vlastně teprve rodily.

Jak vypadá geometrie dnes? Eukleidův systém axiomů přetrval do dnešní doby, ovšem v modernizované podobě, kterou mu dal David Hilbert (1862—1943). V souvislosti s ním mluvíme o euklidovské geometrii, euklidovské rovině a euklidovském prostoru.*)

Soustava axiomů euklidovské geometrie je rozdělena na několik skupin. Jednou z nich jsou axiomy metrické, to jest týkající se měření délek a velikostí úhlů. Užíváme-li v geometrii měření, mluvíme o geometrii metrické. Pokud se nezajímáme o délky úseček ani oblouků ani o velikosti úhlů a všímáme si pouze vzájemné polohy jednotlivých geometrických útvarů, jde o geometrii afinní. V afinní geometrii však stále rozlišujeme mezi vlastními a nevlastními**) body a přímkami; pokud všechny body a přímky, vlastní i nevlastní, „zrovnoprávníme", dostáváme geometrii projektivní. Každá z těchto geometrií se vždy zabývá vlastnostmi geometrických útvarů, které se nemění při zobrazeních určitého typu, odborně řečeno invarianty určité grupy transformací. Toto rozdělení provedl Felix Klein (1849—1925) ve svém Erlangenském programu.

V souvislosti s tímto rozdělením si můžeme uvést i takzvanou absolutní geometrii, jejíž soustava axiomů se získá ze soustavy axiomů euklidovské geometrie vynecháním axiomu o rovnoběžkách. Ale o tom se zmíníme podrobněji v samostatném odstavci.

---

*) Jméno Eukleides v polatinštěné podobě zní Euclides; odtud je název „euklidovský". Dříve se říkalo také „eukleidovský".

**) Každé přímce se přiřazuje jistý prvek zvaný nevlastní bod této přímky tak, že dvěma přímkám je přiřazen tentýž nevlastní bod právě tehdy, jsou-li rovnoběžné. Množina všech nevlastních bodů dané roviny se nazývá nevlastní přímka této roviny. Pak lze tvrdit, že libovolné dvě různé přímky v rovině mají společný bod (vlastní nebo nevlastní).

Dále se však geometrie dělí ještě na další odvětví podle toho, jakou metodou se geometrické útvary zkoumají. Používá-li se algebry, jde o algebraickou geometrii. Zavedou-li se metody diferenciálního počtu, jde o geometrii diferenciální a podobně existuje i geometrie integrální. Užívá-li se kombinatoriky, mluvíme o kombinatorické geometrii. Pohybem geometrických útvarů se zabývá kinematická geometrie. Zobrazení třírozměrných útvarů v rovině (promítací metody) zkoumá deskriptivní geometrie. (Deskriptivní geometrie je samozřejmě také součástí matematiky, i když se jí na střední škole vyučuje jako samostatnému předmětu.)

Samostatným oborem, který se již do geometrie nezahrnuje, je topologie. Ta jde v Kleinově Erlangenském programu vlastně nejdále — zkoumá invarianty spojitých transformací. Nebudeme definovat, co to je, ale popíšeme si to názorně. Představme si, že máme dvě křivky vymodelované z plastického drátu. Můžeme-li jednu z nich tak zdeformovat, aby byla geometricky podobná druhé, říkáme, že tyto křivky jsou topologicky ekvivalentní; přitom nesmíme drát nikde přetrhnout ani svařovat či spájet. Takto například úsečka je ekvivalentní kruhovému oblouku, ale nikoli kružnici; kružnice je zase ekvivalentní elipse nebo obvodu čtverce. V topologii se ekvivalentní křivky prostě považují za stejné, nečiní se mezi nimi rozdílu. Podobně se mluví i o topologicky ekvivalentních plochách či jiných útvarech. Topologie se ovšem neomezuje pouze na toto, ale zkoumá obecně pojem spojitosti a pojmy s ním související. Těsně souvisí s funkcionální analýzou, o níž jsme mluvili ve III. kapitole.

Analogií mnohoúhelníka v třírozměrném prostoru je mnohostěn (polyedr). Je to těleso omezené mnohoúhelníkovými stěnami; příkladem mnohostěnu je hranol nebo jehlan.

Jestliže geometrický útvar s libovolnými dvěma body obsahuje celou úsečku, která tyto body spojuje, říkáme mu konvexní útvar; mluvíme tedy také o konvexních mnohostěnech. Pro konvexní mnohostěny platí Eulerův vzorec:

$$n + v = h + 2,$$

kde n je počet stěn, v počet vrcholů a h počet hran. (Ověřte si to na nějakém známém mnohostěnu.)

Víme, že ke každému $n \geqq 3$ existuje v rovině pravidelný konvexní n-úhelník, tedy n-úhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny úhly shodné. (Pravidelnému trojúhelníku říkáme rovnostranný trojúhelník, pravidelný čtyřúhelník se nazývá čtverec.) Jeho analogií je pravidelný konvexní n-stěn. Všechny stěny pravidelného n-stěnu jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v každém jeho vrcholu se stýká stejný počet hran.

Čekali bychom, že opět pro každé přirozené $n \geqq 4$ bude existovat pravidelný konvexní n-stěn. Uvidíme, že tomu tak není.

Nechť stěny pravidelného konvexního n-stěnu jsou pravidelné p-úhelníky a nechť se v každém vrcholu stýká q hran. Jestliže n, v, h mají stejný význam jako ve výše uvedeném Eulerově vzorci, pak tedy sečtením počtů hran všech stěn dostaneme číslo np, které je dvojnásobkem počtu h hran našeho n-stěnu; každá hrana totiž náleží právě dvěma stěnám, proto se při tomto sčítání počítá dvakrát. Je tedy

$$np = 2h.$$

Sečteme-li počty hran vycházejících z jednotlivých vrcholů, dostaneme číslo qv, které je opět dvojnásobkem počtu hran; každá hrana spojuje dva vrcholy, a tedy se opět počítá dvakrát. Máme

$$qv = 2h.$$

Z toho vypočteme

$$h = \frac{1}{2} np,$$

$$v = 2h/q = np/q,$$

Dosadíme do Eulerova vzorce:

$$\frac{np}{q} + n = \frac{1}{2} np + 2$$

a tedy

$$n = 4q/(2p + 2q - pq).$$

Počet stěn n tedy musí být takový, aby se dal vyjádřit tímto výrazem, kde p a q jsou přirozená čísla a samozřejmě $p \geqq 3$, $q \geqq 3$. Jmenovatel zlomku lze psát jako

$$p(2 - q) + 2q.$$

Protože $q \geqq 3$, je $2 - q$ záporné. Tedy je-li $p \geqq 6$, je

$$p(2 - q) + 2q \leqq 6(2 - q) + 2q = 4(3 - q) \leqq 0.$$

V tomto případě by bylo n záporné nebo nedefinované, protože čitatel zlomku je kladný. Pro $p \geqq 6$ tedy zmíněný mnohostěn neexistuje a můžeme se omezit na hodnoty p rovné 3, 4 a 5. Pro $p = 3$ je

$$n = 4q/(6 - q).$$

Vidíme, že v tomto případě musí být $q \leqq 5$, aby výraz byl kladný a pro q tedy padají v úvahu pouze hodnoty 3, 4 a 5.

Máme tedy tyto možnosti:

a) $p = 3, q = 3, n = 4$;
b) $p = 3, q = 4, n = 8$;
c) $p = 3, q = 5, n = 20$.

Pro $p = 4$ je

$$n = 2q/(4 - q).$$

Zde pro q padá v úvahu pouze hodnota 3. Máme další možnost:

d) $p = 4, q = 3, n = 6$.

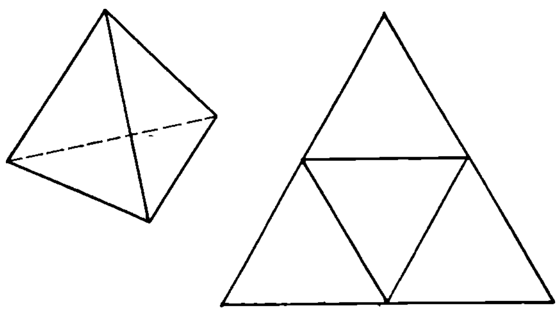
Pro $p = 5$ je

$$n = 4q/(10 - 3q).$$

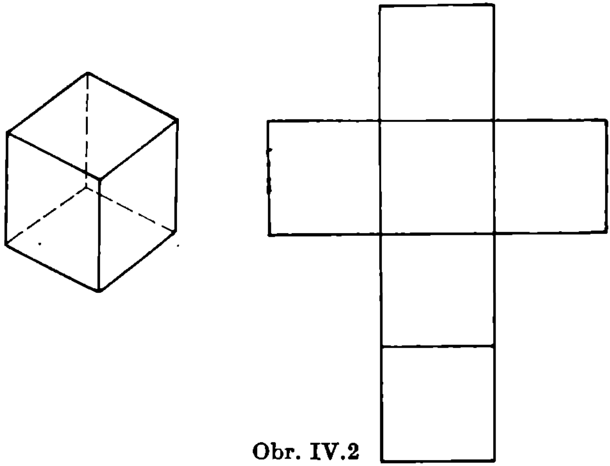
Zde také musí být $q = 3$ a máme poslední možnost:

e) $p = 5, q = 3, n = 12$.

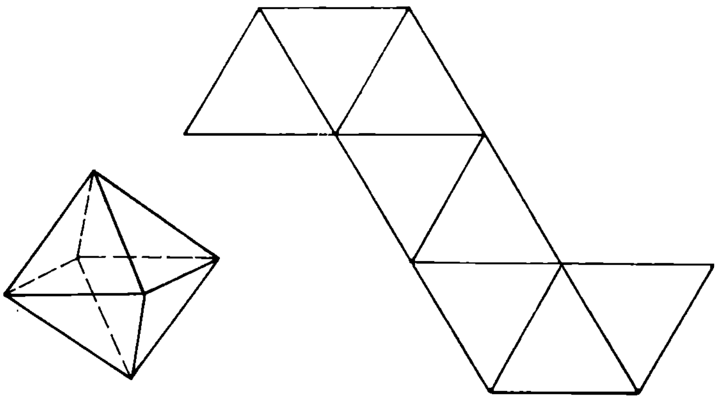
Vidíme tedy, že neexistují jiné pravidelné konvexní



Obr. IV.1

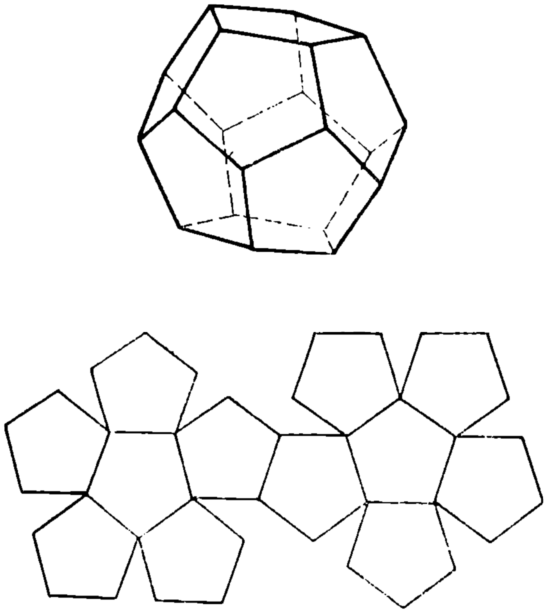


Obr. IV.2



Obr. IV.3

mnohostěny než čtyřstěn (tetraedr), osmistěn (oktaedr), dvacetistěn (ikosaedr), šestistěn (hexaedr) a dvanáctistěn (dodekaedr). Nedokázali jsme zatím, že takovéto



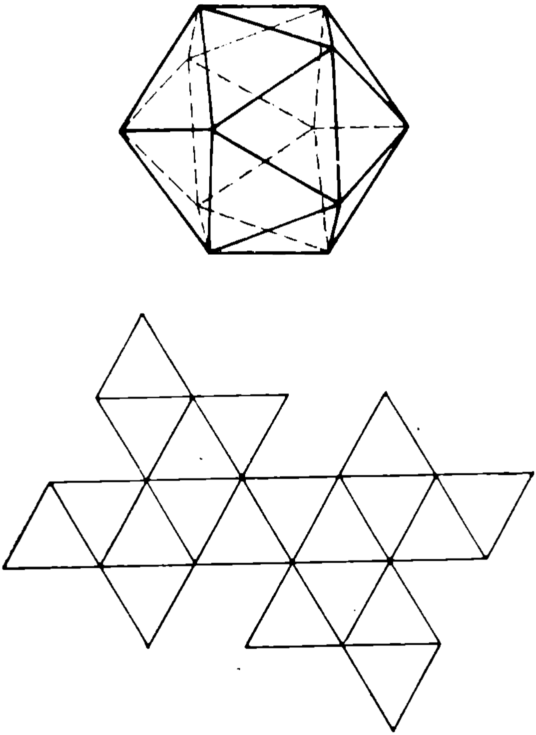
Obr. IV.4

pravidelné konvexní mnohostěny existují; dokázali jsme pouze, že nemohou existovat žádné jiné.

Tyto mnohostěny však existují a byly známy již ve starém Řecku. Někdy se jim podle filozofa Platóna říká platónovská tělesa.

Pravidelný čtyřstěn má čtyři stěny, které jsou rovnostrannými trojúhelníky. Má čtyři vrcholy a šest hran. Na obr. IV.1 vidíme názorný nákres čtyřstěnu a rozvinutí jeho povrchu do roviny.

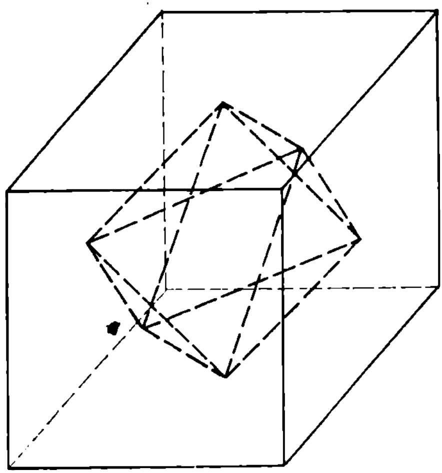
Pravidelný šestistěn se zpravidla nazývá krychle. Má šest stěn, které jsou čtverci. Má osm vrcholů a dvanáct hran (obr. IV.2).



Obr. IV.5

Pravidelný osmistěn má osm stěn, které jsou rovnostrannými trojúhelníky. Má šest vrcholů a dvanáct hran (obr. IV.3).

Pravidelný dvanáctistěn má dvanáct stěn, které jsou



Obr. IV.6

pravidelnými pětiúhelníky. Má dvacet vrcholů a třicet hran (obr. IV.4).

Pravidelný dvacetistěn má dvacet stěn, které jsou rovnostrannými trojúhelníky. Má dvanáct vrcholů a třicet hran (Obr. IV.5).

Víme, že každému pravidelnému mnohoúhelníku lze opsat i vepsat kružnici; středy obou kružnic splývají. Můžeme tedy vzít pravidelný konvexní mnohostěn, na každé stěně najít takovýto střed; dostaneme tak vrcholy jiného pravidelného konvexního mnohostěnu, který nazýváme duálním mnohostěnem k danému mnohostěnu. Ke krychli je duálním mnohostěnem pravidelný osmistěn a k němu je duální opět krychle (obr. IV.6). Podobně pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn jsou navzájem duální. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě.

Zmiňme se ještě o tom, že každému pravidelnému mnohostěnu lze opsat i vepsat kulovou plochu; středy obou těchto kulových ploch spolu splývají.

VČELY A GEOMETRIE

Představme si, že by si včelí královna pozvala nějakého matematika a požádala by ho o navržení optimálního tvaru včelí buňky. Požadavky by byly asi takovéto:

a) Včelí buňka má mít tvar mnohoúhelníka; všechny buňky v plástvi musejí být stejné.

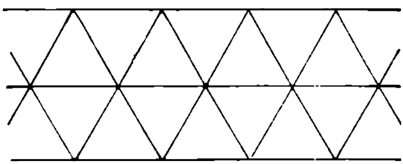
b) Buňky mají být co největší, aby se do nich vešlo co nejvíce medu, přičemž se však musí šetřit stavebním materiálem, to jest voskem. Měly by to být tedy mnohoúhelníky, které při daném obvodu mají maximální obsah.

c) Buňky mají vyplňovat plástev co nejekonomičtěji; mělo by jít tedy o mnohoúhelníky, jimiž lze pokrýt rovinu, to jest rozložit rovinu na takovéto mnohoúhelníky tak, aby žádné dva z nich neměly společný vnitřní bod a aby každý bod roviny náležel některému z nich.

Matematik by se zamyslil a načrtl by příslušný návrh. Jak by asi uvažoval?

Je-li počet vrcholů mnohoúhelníka pevně dán, pak ze všech mnohoúhelníků o daném obvodu má největší obsah pravidelný mnohoúhelník. Ze všech trojúhelníků o daném obvodu má tedy největší obsah rovnostranný trojúhelník, ze všech čtyřúhelníků o daném obvodu čtverec a tak dále. (Důkaz nebudeme uvádět.) Buňky by tedy měly mít tvar pravidelných mnohoúhelníků.

Máme nyní pokrýt rovinu pravidelnými mnohoúhelníky podle podmínky c). Je-li nějaký bod A vrcholem některého z těchto mnohoúhelníků, pak je vrcholem několika takových mnohoúhelníků. Součet velikostí úhlů při vrcholu A všech těchto mnohoúhelníků je roven 360°.



Obr. IV.7

Protože jde o shodné pravidelné mnohoúhelníky, jsou všechny tyto úhly shodné a jejich velikost ve stupních je $360/q$, kde q je počet mnohoúhelníků se společným vrcholem A.

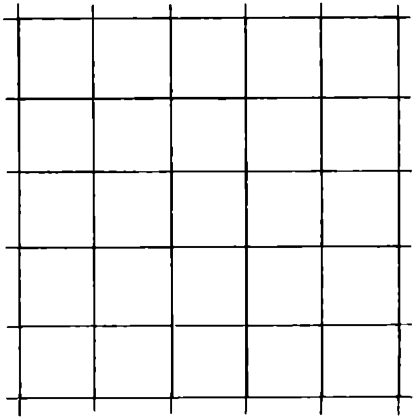
Každý úhel pravidelného n-úhelníka má velikost $180(n - 2)/n$ stupňů. Hledáme tedy takové přirozené n, aby platilo

$$180(n - 2)/n = 360/q,$$

kde q je přirozené číslo. Úpravou dostaneme:

$$n = 2 + 4/(q - 2).$$

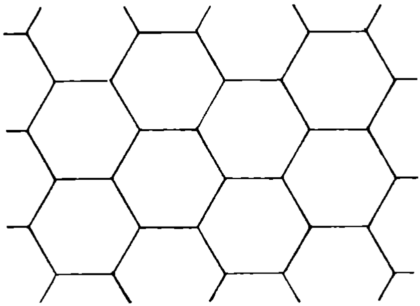
Číslo n má být přirozené. Z toho tedy plyne, že číslo $q - 2$ musí být dělitelem čísla 4. Protože zřejmě $q \geqq 3$, musí být $q - 2$ rovno jedné, dvěma nebo čtyřem a q je rovno třem, čtyřem nebo šesti. Rovinu nelze tedy žádaným způsobem pokrýt jinými pravidelnými mnohoúhelníky než rovnostrannými trojúhelníky, čtverci nebo pravidelnými šestiúhelníky. Takováto pokrytí vidíme na obr. IV.7, IV.8 a IV.9.



Obr. IV.8

Tedy každá včelí buňka by měla být rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem nebo pravidelným šestiúhelníkem. Který z těchto obrazců zvolíme? Říkali jsme si, že při pevném počtu vrcholů má ze všech mnohoúhelníků o daném obvodu největší obsah pravidelný mnohoúhelník. Jestliže nyní máme pravidelný n_1-úhelník a pravidelný n_2-úhelník, oba o témž obvodu, kde $n_2 > n_1$, pak obsah pravidelného n_2-úhelníka bude větší než obsah pravidelného n_1-úhelníka. Tedy obsah čtverce je větší než obsah rovnostranného trojúhelníka o stejném obvodu, ale je menší než obsah pravidelného šestiúhelníka, který má také tento obvod. Matematik tedy navrhne včelí královně, aby se včelí buňky stavěly ve tvaru pravidelných šestiúhelníků.

Žádná včelí královna ovšem nikdy se žádným matematikem nekonzultovala. Nicméně včely stavějí své buň-



Obr. IV.9

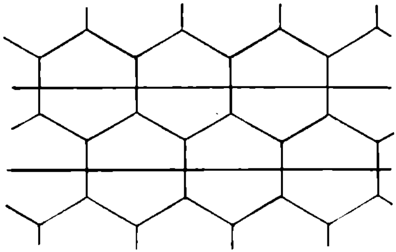
ky přesně podle tohoto návrhu. Nejsou schopny matematických úvah, ale vede je k tomu pud. Dokonce zachovávají přesně délku strany šestiúhelníka; je to 2,71 mm. Proto byla tato délka dokonce navrhována za základ soustavy měr.

Ještě si všimněme obrázků IV.7, IV.8 a IV.9. Jde o takzvané pravidelné parketáže. Takovouto parketáž si můžeme představit jako limitní případ mnohostěnu — „mnohostěn" o nekonečném počtu vrcholů a stěn, jehož všechny stěny leží v jedné rovině. Vraťme se k vzorci

$$n = 4q/(2p + 2q - pq)$$

z předešlého odstavce. Je-li p počet stran pravidelného mnohoúhelníka tvořícího pravidelnou parketáž a q počet hran vycházejících z vrcholu této parketáže, dostáváme ve jmenovateli nulu; máme totiž buď $p = 3$, $q = 6$, nebo $p = 4$, $q = 4$, nebo $p = 6$, $q = 3$. I z toho je patrná zmíněná představa parketáže jako limitního případu mnohostěnu.

V předešlém odstavci jsme mluvili také o dualitě mezi pravidelnými mnohostěny, například mezi krychlí



Obr. IV.10

a pravidelným osmistěnem. Zcela analogicky můžeme zavést pojem duality i u pravidelných parketáží. Trojúhelníková a šestiúhelníková pravidelná parketáž jsou navzájem duální, čtvercová pravidelná parketáž je duální sama k sobě.

Závěrem se zmiňme o tom, že rovinu lze pokrýt i shodnými pětiúhelníky, ale nikoliv pravidelnými (obr. IV.10).

OREL A ORLICE

I v heraldice — nauce o erbech — se můžeme setkat s geometrickými zajímavostmi. Nebylo lhostejné, jaký obraz (v heraldické terminologii figura) byl na štítě;

největší poctou bylo dostat do znaku krále zvířat lva nebo krále ptáků orla, popřípadě orlici.

Jak se však rozezná orel od orlice? V heraldice je to jednoduché — podle počtu hlav. Orlice má jen jednu hlavu, kdežto orel dvě. Rakousko-uherské císařství mělo ve znaku černého orla na zlatém štítě. Dnešní Rakouská republika má ve znaku (bez štítu) černou orlici.

Proč se v heraldice zobrazuje orel se dvěma hlavami? Cožpak v přírodě takoví orli žijí? Důvod je ryze geometrický. Heraldická orlice je souměrná podle svislé osy; jediné, co tuto symetrii narušuje, je hlava, která je zobrazena z profilu. Zobrazovat ptačí hlavu en face by bylo obtížné, zvláště u stylizovaného obrazu, jakým je heraldická figura. Proto se dosahuje symetrie „proti přírodě" tím, že se přidá další hlava a vznikne orel. Heraldika nemá nic společného s realistickým malířstvím, proto se nad něčím takovým nepozastavuje.

EUKLIDOVSKÉ KONSTRUKCE

Ve škole jste často řešili konstruktivní geometrické úlohy. Šlo při nich o to, sestrojit nějaký geometrický útvar pomocí pravítka a kružítka, jinými slovy použitím dvou základních geometrických úkonů — spojení dvou daných bodů přímkou a opsání kružnice z daného středu daným poloměrem. (Pokud mluvíme o pravítku, máme na mysli pravítko bez měřítka.) Tyto konstrukce se nazývají euklidovské, opět podle Eukleida.

Báje vypráví, že ve starořeckém Délu vypukl mor. Obyvatelé hledali pomoc u boha Apollóna. Jak už to u řeckých bohů bývalo, Apollón pomoc slíbil, ale nikoli zadarmo. V jeho svatyni byl oltář tvaru krychle; Apollón požadoval, aby tento oltář byl nahrazen novým téhož tvaru, ale o dvojnásobném objemu. Tak vznikl takzvaný délský problém neboli problém reduplikace krychle.

Označíme-li délku hrany krychle a, pak hrana krychle o dvojnásobném objemu má délku $a\sqrt[3]{2}$. Šlo tedy o to, k dané úsečce délky a sestrojit úsečku délky $a\sqrt[3]{2}$. Obyvatelé Délu se o to (pomocí pravítka a kružítka) snažili ze všech sil, ale nepodařilo se jim to. A nepodařilo se to nikomu dodnes — ono to totiž nelze.

Představme si, že řešíme euklidovsky nějakou konstruktivní úlohu. Máme při tom dány určité body v rovině; tyto body mají určité souřadnice. Současně s rýsováním si jednotlivé kroky konstrukce propočítáváme analyticky. Jsou-li $[x_A, y_A]$ souřadnice bodu A a $[x_B, y_B]$ souřadnice bodu B, pak přímka AB má rovnici

$$(y_A - y_B)\, x + (x_B - x_A)\, y + x_A y_B - x_B y_A = 0. \qquad (1)$$

Jsou-li $[x_S, y_S]$ souřadnice bodu S, pak kružnice o středu S, jejíž poloměr je roven délce úsečky AB, má rovnici

$$x^2 + y^2 - 2x_S x - 2y_S y + x_S^2 + y_S^2 = x_A^2 - 2x_A x_B + x_B^2 + y_A^2 - 2y_A y_B + y_B^2. \qquad (2)$$

Obě tyto rovnice mají tyto společné vlastnosti:

a) Koeficienty u x^2 a y^2 jsou rovny 1 nebo 0.

b) Koeficienty u x a y jsou rovny číslům získaným ze souřadnic daných bodů pomocí násobení celým číslem a sčítání.

c) Absolutní členy jsou rovny číslům získaným pomocí násobení celým číslem a sčítání z čísel, která lze vyjádřit jako součin dvou daných souřadnic.

d) Nevyskytuje se součin xy ani vyšší mocniny x a y než druhé.

Souřadnice průsečíku dvou přímek dostaneme řešením soustavy dvou rovnic typu (1), souřadnice průsečíků přímky s kružnicí řešením soustavy dvou rovnic, z nichž jedna je typu (1) a druhá typu (2), souřadnice průsečíků dvou kružnic řešením soustavy dvou rovnic typu (2).

Mějme nyní dány souřadnice bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$; množina souřadnic všech těchto bodů budiž M_1. Označme M_2 množinu všech reálných čísel, která buď patří do M_1, nebo se dostanou jako řešení zmíněných soustav rovnic splňujících podmínky a), b), c), d), kde „souřadnicemi daných bodů" míníme čísla z množiny M_1. Podobně jako jsme přešli od množiny M_1 k množině M_2, přejdeme od M_2 k další množině M_3, potom od M_3 k M_4 a tak dále. Dostaneme posloupnost množin

$$M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots.$$

pro niž platí $M_i \subset M_j$ při $i < j$. Sjednocení všech množin z této posloupnosti označme M. Je zřejmé, že bod, jehož některá souřadnice nepatří do množiny M, euklidovsky z daných bodů $A_1, \ldots, A_n$ nesestrojíme.

Takovéto body skutečně existují. Plyne to z toho, o čem jsme hovořili v I. kapitole. Lze dokázat, že množina M je spočetná, zatímco o množině všech reálných čísel víme, že spočetná není a nemůže se rovnat množině M.

Vezmeme-li tedy bod $A_1 \equiv [0, 0]$ a bod $A_2 \equiv [0, a]$ pak $M_1 = \{0, a\}$. Číslo $a\sqrt[3]{2}$ do množiny M nebude patřit.

Jsou tedy úlohy euklidovsky neřešitelné a délský problém je jednou z nich. Podobně není euklidovsky proveditelná ani rektifikace kružnice a kvadratura kruhu. Rektifikace kružnice znamená sestrojení úsečky, jejíž délka je rovna délce kružnice o daném poloměru; s ní těsně souvisí kvadratura kruhu, to jest sestrojení čtverce, jehož obsah je roven obsahu kruhu o daném poloměru. Neřešitelnost těchto úloh plyne z faktu, že π není algebraické číslo. Rovněž nelze daný obecný úhel rozdělit na třetiny — tzv. trisekce úhlu. (Ve zvláštních případech, například u pravého úhlu, to lze.)

Přestože je toto dokázáno, je mnoho lidí, kteří se stále pokoušejí tyto úlohy řešit. Jde zpravidla o lidi, kteří sice matematiku neznají, jsou však nepřístupní jakémukoliv poučení. Vypráví se historka o jednom „řešiteli", který „vyřešil" délský problém díky tomu, že se domníval, že grafem funkce $y = x^3$ je přímka. Obtěžoval se svým „řešením" tři významné akademiky na matematicko-fyzikální fakultě Karlovy univerzity, ale ani jim se nepodařilo ho o jeho omylu přesvědčit. Je to poučení i pro vás — než se začnete pokoušet o vědeckou práci, především studujte. Tím se vyhnete tomu, abyste objevovali dávno objevené nebo se pokoušeli o něco, o čem je dokázáno, že je to nemožné.

VÍCEROZMĚRNÉ PROSTORY

Představme si, že kdesi existují dvourozměrné bytosti, které nemají potuchy o existenci třetího rozměru; jejich světem je rovina. Kdyby do jejich světa vtrhl někdo z nás třírozměrných, mohl by tam provádět věci nevídané.

Mohl by třeba zázračným způsobem osvobodit vězně z vězení. Vězeň by si odpykával svůj trest v cele, která by měla tvar nějakého rovinného obrazce, například obdélníka (obr. IV.11). Obdélník je ze všech stran uzavřen svými stranami, které představují nepřekonatelnou překážku. Vězeň zaručeně nemůže utéci — vždyť z vnitřního bodu obdélníka do kteréhokoliv vnějšího bodu se lze dostat jen skrz jeho stranu, to jest stěnu vězení.

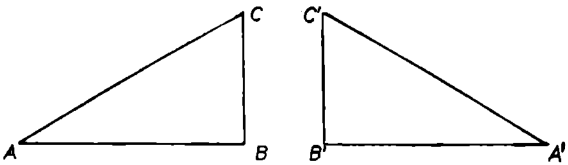
A nyní by přišel třírozměrný našinec a provedl by zázrak. Sebral by vězně, vyzvedl ho z roviny do třírozměrného prostoru a opět by ho položil do roviny v některém místě mimo vězení. Dvourozměrné bytosti by žasly — jak se jen mohl podařit útěk z uzamčené cely? Prošel

Obr. IV.11

snad vězeň zdí? My víme, že zdí neprošel, ale šel cestou, která je pro dvourozměrné bytosti nepochopitelná. Šel mimo rovinu, v níž tyto bytosti žijí, tedy z jejich hlediska prostě opustil svět a zase se vrátil, ovšem na zcela jiné místo světa, než ze kterého odešel.

A nyní přejděme v našich úvahách o dimenzi výše. Na místo dvourozměrných bytostí přijdeme my a na naše místo pak bytosti čtyřrozměrné. Kdyby se do našeho života začaly plést tyto bytosti, mohlo by se také stát, že by nějaký vězeň tajemně zmizel z cely a objevil se někde mimo areál nápravně výchovného zařízení. Marně bychom si kladli otázku, kudy uprchl. Skrz zamčené dveře? Skrz mříže v okně? Skrz zeď, podlahu či strop? Nikoliv, odešel jinudy. Čtyřrozměrná bytost ho vynesla ven ze světa, tedy mimo náš třírozměrný prostor, a vrátila ho do tohoto prostoru na jiném místě.

Existence čtyřrozměrného prostoru by byla výhodná nejen pro vězně, ale i pro počestné řemeslníky. Roztržitému obuvníkovi se může stát, že omylem místo páru bot ušije dvě stejné levé boty. Mohl by tedy vyhodit jednu z těchto levých bot ven z našeho prostoru a tato



Obr. IV.12

bota by dopadla zpět jako pravá. Podobně by si mohl pomoci i rukavičkář.

Je tu totiž opět analogie. Na obr. IV.12 vidíme dva trojúhelníky $\Delta\ ABC$ a $\Delta\ A'B'C'$. Tyto trojúhelníky jsou nepřímo shodné; existuje vzájemně jednoznačné zobrazení, které zobrazuje body jednoho z nich na body druhého a zachovává délky úseček i velikosti úhlů, avšak žádným pohybem v rovině nelze převést jeden z těchto trojúhelníků v druhý. Kdybychom měli tyto trojúhelníky vystřižené z papíru a posunovali je po desce stolu, nikdy se nám je nepodaří přemístit tak, aby ležely na sobě a aby přitom splýval vrchol A s vrcholem A', vrchol B s vrcholem B' a vrchol C s vrcholem C'. Můžeme však jeden trojúhelník zvednout se stolu, obrátit jej lícem dolů a položit zpět na stůl. Tímto pohybem ve třírozměrném prostoru jsme dostali z trojúhelníků nepřímo shodných trojúhelníky přímo shodné.

Stejně tak existují i nepřímo shodné třírozměrné útvary; příkladem je pravá a levá bota nebo pravá a levá rukavice z téhož páru. Pohybem ve čtyřrozměrném prostoru lze převést nepřímo shodné třírozměrné útvary v útvary přímo shodné; pohybem v třírozměrném prostoru to nelze.

Další prostor pro bujnou fantazii skýtá prostoročas. Ke třem souřadnicím x, y, z bodu v třírozměrném prostoru přidejme čtvrtou souřadnici t, která značí čas. Potom uspořádaná čtveřice $[x, y, z, t]$ představuje bod čtyřrozměrného prostoru a je to takzvaná událost. Čtveřice $[x, y, z, t]$ prostě znamená, že určitý bod měl v časovém okamžiku t souřadnice x, y, z. Každé hodnotě souřadnice t odpovídá nějaký třírozměrný prostor, který vyjadřuje situaci v příslušném okamžiku; tyto třírozměrné prostory tvoří soustavu navzájem rovnoběžných prostorů, analogickou osnově přímek v rovině. Pokud bychom si představili, že takovýto časoprostor reálně existuje jako čtyřrozměrný prostor, pak bychom si mohli představit různé výlety do minulosti. Například historik, kterému vrtá hlavou, kdo vlastně zavraždil Václava III., mohl by si najít prostor odpovídající příslušnému okamžiku v roce 1306 a pak už by zbývalo jen vydat se do Olomouce, aby byl svědkem této historické události. Riskoval by ovšem při tom, že si ho s tím králem spletou. Kdyby se tak stalo a kdyby přesto vyvázl životem a vrátil se do dnešní doby, mohl by také zjistit, že jeho diplom je neplatný, protože Karlova univerzita nikdy neexistovala. Václav III., vyváznuv z rukou vrahů, zplodil nástupce trůnu Přemysla Otakara III., takže Přemyslovci po meči zůstali zachováni a Lucemburkové nikdy na český trůn nenastoupili.

A poněvadž Přemysl Otakar III. zůstal věren rytířským mravům a dával přednost lovu a turnajům před zakládáním univerzit, zůstala Praha bez univerzity.

Toto všechno jsou ovšem fantazie a zkoumání vícerozměrných prostorů v matematice a ve fyzice s tím nemá nic společného. Matematik zkoumá tyto prostory, aniž by se třásl před mohutnou čtyřrozměrnou rukou, která by ho z ticha jeho pracovny přenesla čtyřrozměrným prostorem do některé prázdné cely v Sing-Singu. Vícerozměrné prostory jsou pro něho prostředkem, jak zjednodušit určité úvahy. Například máme-li soustavu n hmotných bodů, pak tyto body mají dohromady $3n$ souřadnic a lze tuto soustavu zkoumat jako jeden bod ve $3n$-rozměrném prostoru. Známe-li analytickou geometrii v třírozměrném prostoru, není už tak těžké přidat další souřadnice a pracovat s nimi analogicky. Stejně je tomu i s prostoročasem. Jde prostě o takzvaný matematický aparát; pod slovem aparát si nemusíme představovat zrovna fotoaparát nebo radioaparát, ale prostě něco, čeho se používá, aby se dosáhlo nějakých výsledků. Pro libovolné přirozené n je n-rozměrný prostor pro matematika prostě množinou všech uspořádaných n-tic reálných čísel, s nimiž se pracuje jako se souřadnicemi bodů. O tom, zda takovýto prostor skutečně existuje v tom smyslu, v jakém mluvíme o našem třírozměrném prostoru, matematik prostě neuvažuje; to je otázka spíše pro fyziky, astronomy a filozofy.

NEEUKLIDOVSKÁ GEOMETRIE

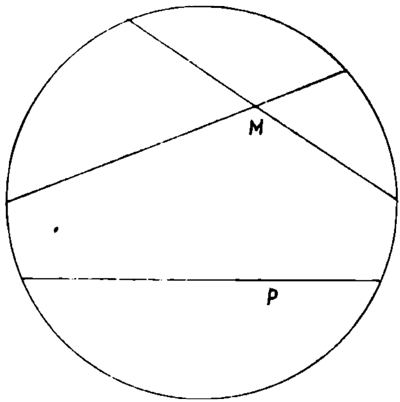
Jedním z axiomů euklidovské geometrie je axiom o rovnoběžkách. Říká, že daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu rovnoběžku.

Dlouho se matematikové zabývali otázkou, zda je skutečně nutno tento axiom považovat za axiom — zda by se totiž nedal dokázat z ostatních axiomů. Ruský matematik N. I. Lobačevskij (1793—1856) a maďarský matematik J. Bolyai (1802—1860) se na tuto otázku rozhodli jít cestou, která dnes je v matematice běžná, ale tehdy znamenala něco revolučního. Rozhodli se zkoumat geometrii, v níž by platily všechny axiomy euklidovské geometrie s výjimkou axiomu o rovnoběžkách; ten by byl nahrazen axiomem tvrdícím, že daným bodem k dané přímce, která jím neprochází, lze vést alespoň dvě přímky, které s danou přímkou nemají společný bod.

Lze skutečně sestrojit model takovéto geometrie. Modelem geometrie rozumíme soustavu nějakých prvků zvaných „body" a nějakých prvků zvaných „přímky", pro něž příslušná soustava axiomů platí. Nezáleží na tom, že nejde o body a přímky v běžném smyslu; pokud by axiom o rovnoběžkách skutečně vyplýval z ostatních axiomů, musel by platit v každém modelu, který tyto axiomy splňuje.

Zvolme v rovině kružnici k. „Body" našeho modelu budou všechny body ležící uvnitř kružnice k (a žádné jiné), „přímky" budou vnitřky všech tětiv kružnice k. Pro tyto „body" a „přímky" platí všechny axiomy euklidovské geometrie kromě axiomu o rovnoběžkách. (Aby platily metrické axiomy, musíme délky úseček a velikosti úhlů definovat trochu jinak než běžným způsobem, ale tím se zde nebudeme zabývat.) Přitom však daným „bodem" lze k dané „přímce" vést dokonce nekonečně mnoho „přímek", které s ní nemají společný „bod". Na obr. IV.13 vidíme dvě takovéto „přímky" vedené „bodem" M k přímce p. Z toho plyne, že axiom o rovnoběžkách nevyplývá z ostatních axiomů; kdyby tomu tak bylo, musel by platit i zde. Takováto geometrie se nazývá geometrie Lobačevského.

Axiom o rovnoběžkách lze nahradit i axiomem tvrdícím, že každé dvě přímky mají společný bod; pak je však nutno trochu pozměnit i některé další axiomy.



Obr. IV.13

Dostaneme tak geometrii, které se říká Riemannova geometrie podle G. F. B. Riemanna (1826—1866). I zde si můžeme sestrojit určitý model. Mějme kulovou plochu. „Bodem" našeho modelu bude každá dvojice navzájem protilehlých bodů této plochy, „přímkou" bude každá hlavní kružnice kulové plochy, to jest kružnice, jejímž středem a poloměrem je střed a poloměr kulové plochy.

Pokud axiom o rovnoběžkách prostě vynecháme a ničím jej nenahradíme, mluvíme o absolutní geometrii. Každé tvrzení, které platí v absolutní geometrii, platí i v geometrii euklidovské, Lobačevského i Reimannově.

Zkoumání neeuklidovských geometrií má význam v moderní fyzice (teorie relativity).

KONEČNÁ PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

V úvodu této kapitoly jsme mluvili o tom, co je to projektivní geometrie. Její základní axiomy jsou pouze tři:

1. Libovolnými dvěma body prochází právě jedna přímka.
2. Libovolné dvě přímky mají společný právě jeden bod.
3. Existují čtyři body, z nichž žádné tři neleží v přímce.

Někdy se přidávají ještě další axiomy (například axiom Desarguesův), ale základem jsou tyto tři. Bereme-li všechny body a přímky v euklidovské rovině, včetně nevlastních, tyto axiomy jsou zřejmě splněny. Bodů a přímek je ovšem nekonečně mnoho.

Existují však modely projektivní geometrie, které mají jen konečný počet „bodů“ a „přímek“. S modely určité geometrie jste se setkali už v předešlém odstavci; nebude vám tedy činit potíže představit si, že „body“ budou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a „přímkami“ budou tříprvkové množiny $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 7\}$, $\{1, 4, 6\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{2, 4, 7\}$, $\{3, 4, 5\}$ a $\{5, 6, 7\}$. O „bodu“ řekneme, že leží na „přímce“ právě tehdy, je-li prvkem příslušné množiny. Můžete si ověřit, že všechny axiomy zde platí.

Máme tedy projektivní geometrii, která má pouze sedm bodů a sedm přímek (uvozovky zde již vynecháváme); na každé přímce leží tři body, každým bodem procházejí tři přímky. Je to nejmenší možný počet bodů a přímek takovéto geometrie. Existují ovšem další konečné projektivní geometrie; v každé z nich každá přímka obsahuje tentýž počet k bodů a rovněž každým bodem prochází k přímek. Celkový počet bodů a celkový počet přímek se také sobě rovnají; je to

$$n = k^2 - k + 1.$$

Neexistuje ovšem konečná geometrie pro každé k, ale lze dokázat, že existuje tehdy, je-li $k = p^a + 1$, kde p je prvočíslo, a je přirozené číslo.

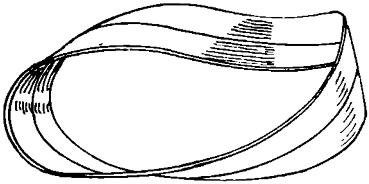
Pokud však bychom chtěli najít model konečné geometrie, v němž by skutečně množina bodů byla podmnožinou množiny bodů (vlastních i nevlastních) euklidovské roviny a rovněž množina přímek byla podmnožinou množiny přímek této roviny, nepodaří se nám to. Zvolíme-li totiž v euklidovské rovině čtyři body, z nichž žádné tři neleží v přímce, spojujeme tyto body přímkami, hledáme průsečíky těchto přímek a opět je spojujeme a tak dále, neskončíme nikdy po konečném počtu kroků a dostaneme tak geometrii nekonečnou.

Ještě více než v samotné geometrii se konečné geometrie uplatňují v algebře (teorie svazů) a v kombinatorice.

MOEBIŮV LIST

Povíme si o jednom zajímavém kouzle. Vezmete proužek papíru, jehož konce jsou slepeny. Ukážete divákům, že na jedné ani na druhé straně proužku není vůbec nic nakresleno. Potom před diváky podél proužku kreslíte čáru tak dlouho, až se vrátíte do výchozího bodu. Diváci vás mohou ostře sledovat, aby se přesvědčili, že nezvedáte tužku s papíru. Pak proužek opět ukážete. Diváci užasnou — čára je na obou stranách proužku!

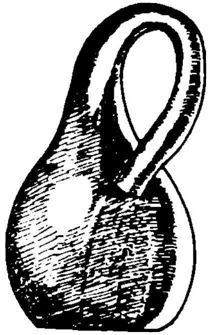
Celý trik spočívá ve způsobu, jakým jsou slepeny konce proužku. Aby kouzlo vyšlo, nesmíme je slepit běžným způsobem (rub na líc), ale musíme nejprve proužek zkroutit o 180° a potom přilepit rub na rub. Teď už je zřejmé, jak se „kouzlí". Začneme-li kreslit na líci, přejdeme v místě slepení na rub, nakreslíme čáru na rubu, v místě slepení opět přejdeme na líc a kreslení dokončíme. V kouzle můžeme pokračovat tak, že proužek podél nakreslené čáry rozstřihneme; proužek se nerozpadne na dva kusy, ale zůstane vcelku.



Obr. IV.14

Náš slepený proužek má tvar jisté zajímavé plochy, která se podle A. F. Moebia (1790—1868) nazývá Moebiův list (obr. IV.14). Moebius patří vlastně k prvním průkopníkům té oblasti matematiky, která se dnes nazývá topologie a o níž jsme se zmínili už v úvodu této kapitoly. Moebiův list je příkladem takzvané neorientovatelné plochy. Orientovat plochu znamená v podstatě určit její „rub" a „líc" (to je ovšem řečeno nematematicky). U roviny to zřejmě lze, u kulové plochy také. U Moebiova listu nikoliv; mohli bychom říci, že „má jen jednu stranu". Rovněž okraj Moebiova listu je pouze jednou souvislou křivkou. Tato plocha se tedy počítá mezi neorientovatelné, na rozdíl od roviny nebo kulové plochy, které jsou plochami orientovatelnými.

Vezměme si nyní kruh vystřižený z papíru a slepme jeho okraj po celé délce s okrajem Moebiova listu. Prakticky to raději nezkoušejte, protože se vám to nepodaří. Něco takového si dovedeme představit pouze ve čtyřrozměrném prostoru. Protože však už víme, že matematik běžně pracuje i s vícerozměrnými prostory, můžeme v úvahách klidně pokračovat. Dostaneme uzavřenou plochu, která je topologicky ekvivalentní s projektivní



Obr. IV.15

rovinou. Co to znamená? Projektivní rovina vznikne z euklidovské roviny přidáním nevlastní přímky. Existuje tedy vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech vlastních i nevlastních bodů roviny na množinu bodů naší plochy, které je spojité a převádí každou přímku projektivní roviny (tedy včetně jejího nevlastního bodu) na nějakou uzavřenou křivku na naší ploše. (Nebudeme definovat, co je spojité zobrazení, ale podle toho, co jsme si řekli v úvodu naší kapitoly o topologii, si dovedete představit, co to je.) Přitom tyto křivky mají tytéž vlastnosti jako přímky v projektivní rovině — každými dvěma body plochy prochází právě jedna takováto křivka a každé dvě takovéto křivky mají právě jeden společný bod. Proto této ploše z hlediska topologie můžeme prostě říkat projektivní rovina; víme, že topologie takové plochy, které jsou mezi sebou topologicky ekvivalentní, prostě nerozlišuje.

Vezměme nyní dva Moebiovy listy a slepme jejich okraje (samozřejmě to opět v třírozměrném prostoru nelze). Dostaneme neorientovatelnou plochu, která se nazývá Kleinova láhev. Proč zrovna láhev? Je to patrné z obr. IV.15. Vidíme zde jakousi „komínovou rouru“, která prochází stěnou „láhve“; ve skutečnosti ovšem vede „jinudy“ jako onen vězeň prchající z vězení.

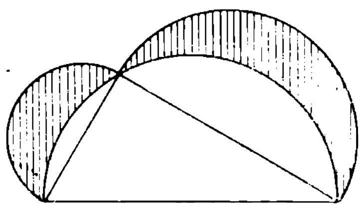
Úlohy

1. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány velikosti jeho výšek.

2. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány délky jeho těžnic.

3. Útvar na obr. IV.16 se nazývá Hippokratovy měsíčky. Jeho obvod tvoří půlkružnice, jejichž průměry jsou strany pravoúhlého trojúhelníka. Vypočtěte obsah tohoto útvaru, znáte-li délky a, b odvěsen trojúhelníka.

4. Letadlo letělo sto kilometrů přesně na jih, potom sto kilometrů na západ a zase sto kilometrů na sever. Přitom se na-

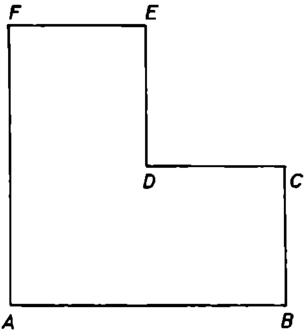


Obr. IV.16

konec vrátilo přesně na totéž místo, odkud vzlétlo. Jak je to možné? Pozor, úloha má dvě řešení.

5. Obrazec na obr. IV.17 rozdělte na čtyři shodné nepřekrývající se obrazce.

6. Když jste vyřešili úlohu 5, jistě vám nebude dělat potíže ani tato úloha: Rozdělte čtverec na pět shodných nepřekrývajících se obrazců.



$\overline{BC} = \overline{FE} = \overline{CD} = \overline{ED} = \frac{1}{2}\overline{AB}$
$\overline{AB} = \overline{AF}$

Obr. IV.17

7. Státní vlajky severských států jsou obdelníky s křížem zvaným heroldský, sahajícím až ke kraji vlajky. Představme si, že by kříž zabíral přesně polovinu obsahu obdélníka; obě jeho ramena jsou ovšem stejně široká. Určete šířku ramen kříže v závislosti na délkách a, b stran obdélníka.

8. Mluvíme-li už o vlajkách, připomeňme si, že u každé státní vlajky je (přímo ústavou příslušného státu) přesně určen poměr délek stran. Všechny exempláře téže státní vlajky jsou si tedy geometricky podobné, ať už jde o vlajku na obří lodi nebo o stolní vlaječku, která se klade na stůl oficiálním hostům z příslušné země. Rozhodně byste měli vědět, jaký je poměr délek stran u československé státní vlajky.

9. Pouze u dvou státních vlajek je tento poměr 1 : 1 a jde tedy o vlajky čtvercového tvaru. Které státy mají takovéto vlajky?

10. A ještě jedna otázka tohoto typu: Který jediný stát na světě má vlajku jiného tvaru než čtyřúhelníkového?

11. V rovině jsou dány dvě různoběžné přímky a, b a bod M, který leží mimo ně. Máme tento bod spojit přímkou s průsečíkem P přímek a, b. „To nic není," řeknete. Ovšem pozor: přímky a, b se protínají mimo papír, na který kreslíme, a nesmíme papír nastavovat ani kreslit po stole. (Říkáme v tomto případě, že průsečík P je nepřístupný.)

12. Nyní mějme opět nepřístupný průsečík P přímek a, b a dále přímku c, jejíž průsečíky s přímkami a i b jsou přístupné. Bodem P máme k přímce c vést kolmici.

13. Máme lupu, která zvětšuje pětkrát. Podíváme se touto lupou na úhel velikosti 5°. Jak velký se nám bude tento úhel jevit?

14. Představme si, že by zeměkoule byla přesnou koulí s rovným povrchem bez horstev a moří. Kolem rovníku by byl napjat drát těsně obepínající zeměkouli. Tento drát by se náhle prodloužil o metr. Lze jej pak nazvednout tak, aby pod ním podběhla myš?

Řešení úloh

1. Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníka a v_a, v_b, v_c velikosti příslušných výšek, pak pro obsah P tohoto trojúhelníka platí:

$$P = \frac{1}{2} av_a = \frac{1}{2} bv_b = \frac{1}{2} cv_c .$$

Z toho plynou tyto úměry:

$$\begin{aligned} a : b &= v_b : v_a, \\ b : c &= v_c : v_b, \\ a : c &= v_c : v_a. \end{aligned} \qquad (1)$$

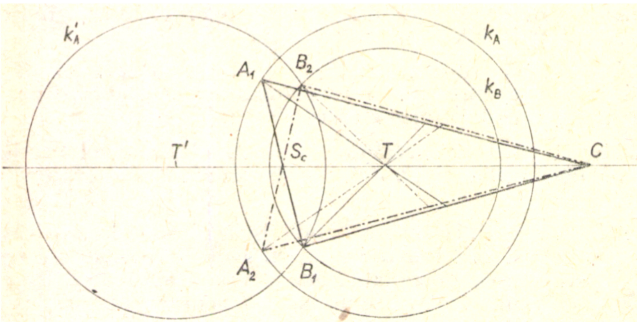
Mějme nyní nový trojúhelník, jehož délky stran jsou v_a, v_b, v_c

a velikosti příslušných výšek w_a, w_b, w_c. Pak zřejmě opět platí:

$$\begin{aligned} w_a : w_b &= v_b : v_a\,, \\ w_b : w_c &= v_c : v_b\,, \\ w_a : w_b &= v_b : v_a\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Srovnáním úměr (1) a (2) dostáváme:

$$w_a : w_b : w_c = a : b : c\,. \tag{3}$$



Obr. IV.18

Sestrojíme tedy nejprve trojúhelník T_1, jehož délky stran jsou dané velikosti výšek v_a, v_b, v_c. V tomto trojúhelníku sestrojíme výšky a pak sestrojíme trojúhelník T_2, jehož délky stran se rovnají velikostem w_a, w_b, w_c těchto výšek. Podle (3) tento trojúhelník je podobný hledanému trojúhelníku. Nyní tedy zbývá k trojúhelníku T_2 sestrojit podobný trojúhelník T, v němž výška ke straně odpovídající straně délky w_a v T_2 má velikost v_a; tento trojúhelník je řešením úlohy.

2. Dané délky těžnic označme t_a, t_b, t_c. Nechť vrcholy hledaného trojúhelníka jsou A, B, C, nechť středy stran protilehlých těmto vrcholům jsou po řadě S_a, S_b, S_c. Těžiště označme T. Sestrojíme nejprve trojúhelník $\Delta\, ABT$. Délka strany AT je rovna $\frac{2}{3}\, t_a$, délka strany BT se rovná $\frac{2}{3}\, t_b$. Dále známe délku těžnice S_cT trojúhelníka $\Delta\ ABT$; je rovna $\frac{1}{3} t_c$. Sestrojme nejprve úsečku S_cT. Bod A musí ležet na kružnici k_A o středu T a o poloměru $\frac{2}{3} t_a$; podobně bod B leží na kružnici k_B o středu T a o poloměru $\frac{2}{3} t_b$. Bod B je obrazem bodu A ve středové souměrnosti o středu S_c; leží tedy na kružnici k'_A, která je obrazem kružnice k_a v této souměrnosti (obr. IV.18). Bod B tedy nalezneme jako průsečík kružnic k'_A a k_B (jsou možná dvě řešení). Bod A pak sestrojíme jako obraz bodu B ve zmíněné souměrnosti. Takto máme sestrojen trojúhelník $\Delta\ ABT$. Nyní již snadno nalezneme i bod C; leží na polopřímce S_cT ve vzdálenosti t_c od bodu S_c.

3. Výsledek dostaneme tak, že od obsahu útvaru složeného z trojúhelníka a půlkruhů nad odvěsnami odečteme obsah půlkruhu nad přeponou. Máme tedy

$$P = \frac{1}{2} ab + \frac{1}{8} \pi a^2 + \frac{1}{8} \pi b^2 - \frac{1}{8} \pi c^2.$$

Podle Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$, tedy

$$P = \frac{1}{2} ab.$$

Obsah Hippokratových měsíčků je roven obsahu příslušného pravoúhlého trojúhelníka. Všimněte si, že se ve výsledku nevyskytuje číslo π, ač jde o útvar omezený kruhovými oblouky.

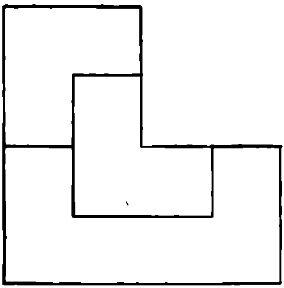
4. První řešení: Letadlo startovalo ze severního pólu. Odtud mohlo letět po libovolném poledníku, neboť vždy šlo o cestu na jih. Potom letělo sto kilometrů po rovnoběžce, takže bylo stále vzdáleno sto kilometrů od severního pólu. Nakonec letělo sto kilometrů na sever, takže se opět vrátilo na severní pól.

Druhé řešení: Na severní i jižní zemské polokouli existují rovnoběžky všech možných délek nepřesahujících délku rovníku. Existuje tedy na jižní polokouli rovnoběžka délky sto kilometrů. Letadlo startovalo z místa vzdáleného od této rovnoběžky sto kilometrů na sever. Letělo na jih až k této rovnoběžce, celou ji obletělo a vrátilo se na sever stejnou cestou, jakou předtím letělo na jih. (Na severní polokouli ovšem také existuje rovnoběžka délky sto kilometrů; neexistuje však místo vzdálené od ní na sever sto kilometrů, protože severní pól je od ní blíže než sto kilometrů.)

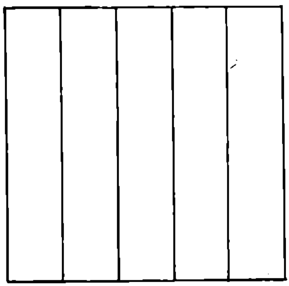
5. Řešení je na obr. IV.19.

6. Řešení je na obr. IV.20. Je to řešení velice jednoduché. Po trápení s předešlou úlohou jste však na to asi hned nepřišli. Pravděpodobně jste uvažovali: „Předtím se dělilo na čtyři obrazce, a jak to bylo složité! Což teprve dělit něco na pět obrazců!“

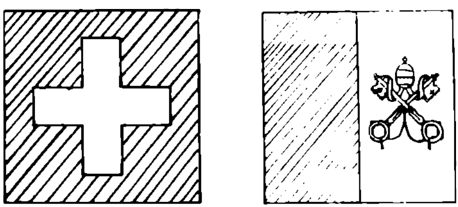
7. Hledaná šířka nechť je x. Obsah jednoho ramene kříže je



Obr. IV.19



Obr. IV.20



Obr. IV.21

roven ax, obsah druhého bx. Obsah kříže dostaneme tak, že od součtu těchto obsahů odečteme obsah x^2 jejich společné části. Má-li se tento obsah rovnat polovině obsahu obdélníka, musí platit:

$$ax + bx - x^2 = \frac{1}{2} ab.$$

Úpravami dostaneme kvadratickou rovnici:

$$2x^2 - 2(a + b)\, x + ab = 0.$$

Řešení je:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} (a + b \pm \sqrt{a^2 + b^2}).$$

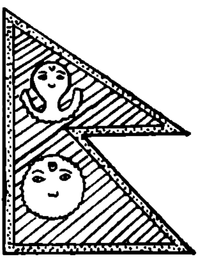
Protože x musí být menší než a i než b, padá v úvahu pouze hodnota $\frac{1}{2} (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})$.

8. Tento poměr je 2 : 3.

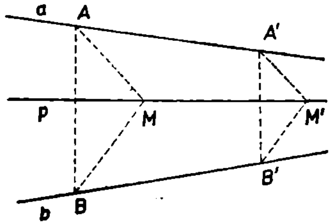
9. Je to Švýcarsko a Vatikán; jejich vlajky vidíme na obr. IV.21.

10. Je to Nepál; jeho vlajka je na obr. IV.22.

11. Zvolme bod A na přímce a a bod B na přímce b tak, aby body A, B, M neležely v přímce. Dále zvolme na přímce a bod A' různý od A. Existuje právě jedna stejnolehlost o středu P, v níž bod A' je obrazem bodu A. Bod B' odpovídající v této stejnolehlosti bodu B sestrojíme jako průsečík přímky b (což



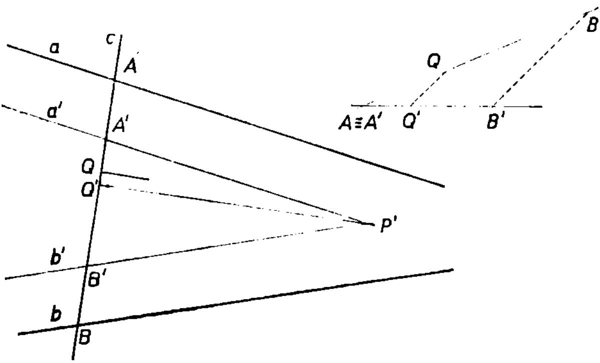
Obr. IV.22



Obr. IV.23

je spojnice BP) s rovnoběžkou k přímce AB vedenou bodem A'. Podobně sestrojíme i obraz M' bodu M; bude to průsečík rovnoběžky k přímce AM vedené bodem A' s rovnoběžkou k přímce BM vedené bodem B'. Protože M' je obrazem bodu M ve stejnolehlosti o středu P, je $M' \not\equiv M$ a přímka MM' prochází bodem P, tedy je to hledaná přímka MP. (Obr. IV.23).

12. Nechť A, B jsou po řadě průsečíky přímek a, b s přímkou c. Zvolme bod P' mimo přímku c a veďme jím přímky $a' \parallel a$,



Obr. IV.24

$b' \parallel b$. Průsečíky přímek a', b' s přímkou c označme po řadě A', B'. Trojúhelníky $\Delta\ ABP$ a $\Delta\ A'B'P'$ jsou podobné. Veďme bodem P' kolmici k přímce c a její patu označme Q'. Bod Q' v příslušné podobnosti odpovídá bodu Q, který je patou kolmice vedené z bodu P k přímce c; máme tedy:

$$AQ : BQ = A'Q' : B'Q'$$

a pomocí této úměry snadno sestrojíme bod Q a vedeme jím kolmici k přímce c, což je hledaná kolmice. (Obr. IV.24).

13. Úhel se i při pohledu lupou bude jevit ve velikosti 5°, protože lupa zvětšuje pouze délky, nikoliv velikosti úhlů.

14. Nechť R je poloměr zeměkoule v metrech. Pak původní délka drátu v metrech je $2\pi R$. Zvětšíme-li drát o metr, bude tato délka rovna $2\pi R + 1$. Můžeme tedy z drátu utvořit kružnici o poloměru $R + \frac{1}{2\pi}$. Všechny body této kružnice pak mohou být umístěny ve výšce $\frac{1}{2\pi}$ metru nad zemským povrchem. Je to více než čtrnáct centimetrů, tedy myš může pod drátem klidně podběhnout.