III. kapitola. Matematická analýza

In: Bohdan Zelinka (author): Matematika hrou i vážně. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1979. pp. 58–75.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403951

III. KAPITOLA

MATEMATICKÁ ANALÝZA

Znáte jistě pojem funkce a víte, jak se kreslí grafy funkcí. Dalo by se říci, že moderní matematika vznikla tehdy, když se začalo užívat tohoto pojmu a začaly se systematicky studovat funkce pomocí diferenciálního a integrálního počtu. Začali s tím G. W. Leibniz (1646—1716) a I. Newton (1643—1727). (Ano, byl to ten s tím padajícím jablkem.) Zavedení pojmu funkce bylo vlastně něčím zásadně novým v matematickém myšlení — začaly se zkoumat proměnné veličiny a jejich vzájemná závislost. To mělo ovšem podstatný vliv i na rozvoj fyziky.

Odvětví matematiky, které se zabývá zkoumáním funkcí, se nazývá matematická analýza. Nazývá se tak proto, že analyzuje vztahy mezi jednotlivými proměnnými veličinami.

Základní pojmy matematické analýzy jsou limita, derivace a integrál. O limitě jste už něco slyšeli, alespoň o limitě posloupnosti. Derivovat ani integrovat se zde učit nebudeme, v takovéto knížce by to nemělo smysl. Ukážeme si však v dalších odstavcích alespoň principy těchto úkonů.

Analýza se ovšem nezabývá jen funkcemi jedné proměnné, ale studuje i funkce více proměnných; tyto proměnné mohou nabývat i imaginárních hodnot. Jedním odvětvím matematické analýzy je funkcionální analýza, která zkoumá pojmy poněkud obecnější než funkce, a to funkcionály a operátory. U nich proměnné nemusejí nabývat číselných hodnot, ale jejich hodnotami mohou být i jiné matematické objekty, například samotné funkce. Jiným zobecněním pojmu funkce je pojem distribuce, kterým se zabývá teorie distribucí — rovněž součást matematické analýzy. S integrálem souvisí i pojem míry, to jest jistého zobrazení, která daným množinám přiřazuje nějaká reálná čísla, která jaksi charakterizují velikost této množiny. Příkladem míry je délka úsečky, obsah obrazce nebo objem tělesa. Pojmem míry se zabývá teorie míry.

Významným odvětvím matematické analýzy je teorie diferenciálních rovnic. Jsou to rovnice, v nichž neznámé nepředstavují čísla, ale funkce; v těchto rovnicích se objevují derivace těchto funkcí. Tato teorie je nepostradatelná pro fyziku a techniku. Podobně existují i rovnice diferenční a rovnice integrální.

Tato kapitola bude poměrně krátká. Není tomu tak proto, že by autor podceňoval význam matematické analýzy, ale proto, že je těžké sdělovat vám zajímavosti z tohoto oboru, dokud jste nezvládli derivování a integrování. Nicméně doufám, že i to málo, co bude zde uvedeno, vám pomůže udělat si alespoň nějakou představu o oboru, s nímž se na začátku vysokoškolského studia ještě dost a dost natrápíte.

DERIVACE

Derivace funkce $y = f(x)$ je definována jako limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

kde h je určitá pomocná proměnná. Samozřejmě na první pohled není jasné, proč se to definuje právě takto a jaký to má význam. Ukažme si to na dvou příkladech — jednom fyzikálním a jednom geometrickém.

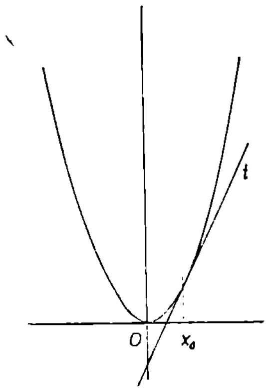
Nějaké těleso padá volným pádem; víme, že jeho dráha v čase t je dána vzorcem $s = \frac{1}{2}gt^2$, kde g je gravitační zrychlení. Vezměme dva časové okamžiky t a $t + h$, kde $h > 0$, a spočtěme průměrnou rychlost tělesa mezi těmito okamžiky. Za dobu mezi okamžiky t a $t + h$ urazí těleso dráhu $\Delta s = \frac{1}{2}g[(t + h)^2 - t^2]$, časový rozdíl je h, tedy průměrná rychlost je

$$v = \frac{\Delta s}{h} = \frac{1}{2}g(2t + h).$$

Bude-li se hodnota h stále přibližovat k nule, bude se v blížit k hodnotě, kterou dostaneme tím, že do výrazu za h dosadíme nulu. Tato hodnota gt je tedy limitou v pro h blížící se k nule a je to okamžitá rychlost v okamžiku t. A je to také derivace funkce $s = \frac{1}{2}gt^2$.

Mohli bychom se ptát, jaký má vlastně smysl vypočítávat okamžitou rychlost. Význam to má; v případě volného pádu sice těžko můžeme předpokládat, že by náhle přestala působit gravitace, ale pokud pohyb vyvolává nějaká jiná síla, můžeme si představit, že v určitém časovém okamžiku tato síla přestane působit. Co udělá těleso? Pokračuje v pohybu tak, že tento pohyb je rovnoměrný přímočarý a jeho rychlost je rovna okamžité rychlosti v okamžiku, kdy síla přestala působit.

Nyní si představme graf funkce $y = x^2$; víme, že je to parabola na obr. III.1. Chtěli bychom napsat rovnici tečny k této parabole v bodě $[x_0, x_0^2]$, kde x_0 je nějaké reálné číslo. Potřebujeme především znát její směrnici, to jest tangens úhlu, který tato přímka svírá s kladnou poloosou osy x. Pokud bychom místo tečny měli sečnu, vypočetli bychom její směrnici snadno. Jestliže tato sečna protíná parabolu v bodech $[x_0, x_0^2]$, $[x_1, x_1^2]$, je její

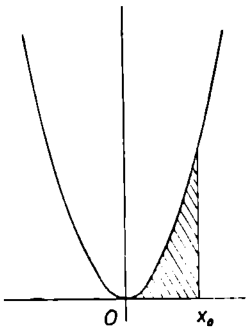


Obr. III.1

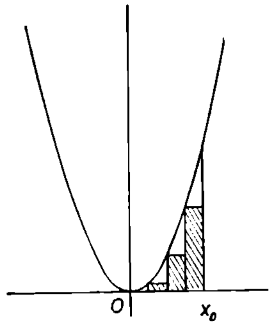
směrnice rovna $(x_1^2 - x_0^2)/(x_1 - x_0) = x_0 + x_1$. Jestliže se číslo x_1 blíží k číslu x_0, pak tato hodnota se blíží k $2x_0$ a sečna se blíží k tečně v bodě $[x_0, x_0^2]$. A skutečně $2x_0$ je směrnice tečny v bodě $[x_0, x_0^2]$; platí to pro libovolné x_0. A rovněž funkce $y = 2x$ je derivací funkce $y = x^2$.

Směrnice tečny ke grafu funkce vlastně udává určitou míru stoupání (popřípadě klesání, je-li záporná) funkce v okolí příslušného bodu. Je to něco podobného, jako když stoupáme na nějakou horu. Čím větší úhel svírá tečna k trajektorii našeho pohybu s vodorovnou rovinou, tím strmější je naše stoupání.

Podobně jako je rychlost derivací dráhy podle času, je například zrychlení opět derivací rychlosti podle času. Derivací se dá vyjádřit úhlová rychlost, okamžitý průtok nějaké kapaliny potrubím, hustota v daném bodě nehomogenní tyče a podobně; obecně tedy určitá míra změny hodnoty funkce. Odvětví matematické analýzy, které se zabývá derivacemi, se nazývá diferenciální počet.



Obr. III.2



Obr. III.3

INTEGRÁL

Vraťme se opět ke grafu funkce $y = x^2$. Zajímal by nás obsah obrazce vyšrafovaného na obr. III.2. Zkusme si jej nejdříve vyjádřit přibližně. Úsečku spojující počátek O s bodem osy x o souřadnici x_0 rozdělíme na n shodných úseček a nad každou sestrojíme obdélník, který má jeden vrchol na parabole; na obr. III.3 je to znázorněno pro $n = 6$. Vypočtěme obsah obrazce, který je sjednocením těchto obdélníků. Vždy jedna strana každého obdélníka má délku $\frac{x_0}{n}$, druhá strana má délky $\frac{x_0^2}{n^2}$, $\frac{4x_0^2}{n^2}$, $\frac{9x_0^2}{n^2}$, ..., $\frac{(n-1)^2 x_0^2}{n^2}$, obecně je to tedy $\frac{j^2 x_0^2}{n^2}$ pro j od 1 do $n - 1$. Obsah sjednocení všech obdélníků je tedy

$$P_n = \frac{x_0^3}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) =$$
$$= \frac{x_0^3}{n^2}\,[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

Existuje vzorec, který říká, že součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n je roven $\frac{1}{6}\,n(n+1)\,(2n+1)$; tedy

$$P_n = \frac{x_0}{6n^3}\,(n-1)\,n\,(2n-1) = \frac{x_0}{6}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Čím větší vezmeme n, tím více se bude rozdíl mezi obsahem zkoumaného obrazce a obsahem sjednocení obdélníků přibližovat k nule. Zlomky, v nichž je čitatel konstantní a jmenovatel je roven mocnině n, se budou blížit také k nule. Tedy obsah našeho obrazce je $\frac{1}{3}\,x_0^3$.

Řekneme, že výraz $\frac{1}{3}\,x_0^3$ je určitým integrálem funkce $y = x^2$ od 0 do x_0 a píšeme

$$\int_0^{x_0} x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x_0^3.$$

Toto je tedy princip integrování. Určitý integrál se zpravidla nepočítá přímo jako takováto limita, ale existují jiné způsoby jeho výpočtu. Zpravidla se počítá pomocí takzvaného neurčitého integrálu; hledání neurčitého integrálu je v jistém smyslu opakem derivování. Neurčitý integrál dané funkce je množina všech funkcí, jejichž derivací je daná funkce. Tím se však zabývat nebudeme.

Poznamenáme jenom, že výpočty obsahů obrazců ohraničených křivkami jsou jen jednou z mnoha aplikací integrálu. Stejně jako derivace, má i integrál veliký význam ve fyzice. Podobně jako nám derivace umožňuje například určovat rychlost obecného (tedy nikoliv nutně rovnoměrného) pohybu, můžeme pomocí integrálu například vyjádřit práci vykonanou silou, která se mění; jako při výpočtu rychlosti nerovnoměrného pohybu nevystačíme s prostým dělením, ani zde bychom nevystačili s prostým násobením. Existují různé typy integrálů; odvětví matematické analýzy, které se jimi zabývá, se nazývá integrální počet. Diferenciální a integrální počet se někdy souhrnně nazývají infinitezimálním počtem.

SOUČET DRUHÝCH MOCNIN PŘIROZENÝCH ČÍSEL

V předešlém odstavci jsme narazili na vzorec pro součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n. Jak se dá takovýto vzorec odvodit?

Známe vzorec pro součet přirozených čísel od 1 do n; tento součet se rovná $\frac{1}{2}n(n+1)$. Je tedy vyjádřen mnohočlenem druhého stupně proměnné n.

Zkusme, zda by se nedal součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n vyjádřit jako mnohočlen třetího stupně, tedy ve tvaru

$$s(n) = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

Musí samozřejmě být

$$s(1) = 1$$

a dále rozdíl $s(n) - s(n - 1)$, tedy rozdíl mezi součtem druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n a součtem druhých mocnin přirozených čísel od 1 do $n - 1$ pro libovolné n, je samozřejmě roven n^2; tedy

$$s(n) - s(n - 1) = n^2.$$

Pokud se onen součet skutečně dá vyjádřit tak, jak předpokládáme, je tedy

$$a + b + c + d = 1,$$
$$an^3 + bn^2 + cn + d - [a(n - 1)^3 + $$
$$+ b(n - 1)^2 + c(n - 1) + d] = n^2.$$

Druhou rovnici můžeme upravit na tvar

$$(3a - 1)\, n^2 + (2b - 3a)\, n + a - b + c = 0.$$

Pokud by bylo $3a - 1 \neq 0$, byla by to kvadratická rovnice pro neznámou n a měla by nejvýše dva různé kořeny. Pokud by bylo $3a - 1 = 0$ a $2b - 3a \neq 0$, byla by to rovnice lineární a měla by jen jeden kořen. Kdyby bylo $3a - 1 = 0$, $2b - 3a = 0$, $a - b + c \neq 0$, pak by rovnice prostě neplatila pro žádné n. My však potřebujeme, aby rovnice platila pro všechna (nebo alespoň pro všechna přirozená) čísla n. To je možné jen tehdy, když se všechny koeficienty v této rovnici rovnají nule, tedy

$$3a - 1 = 0,$$
$$2b - 3a = 0,$$
$$a - b + c = 0.$$

Je to soustava tří rovnic o třech neznámých a, b, c; její řešení je $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$. Dosadíme-li do rovnice

$$a + b + c + d = 1,$$

dostáváme $d = 0$. Je tedy

$$s(n) = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1).$$

Protože $s(1) = 1$ a $s(n) - s(n - 1) = n^2$ pro každé n, jde skutečně o součet druhých mocnin přirozených čísel od 1 do n.

Na tomto vzorci jsme si ukázali, jak vypadá obvykle postup vědecké práce v matematice. Z analogie jsme usoudili, že by mohlo jít o mnohočlen třetího stupně; samozřejmě zpočátku jsme si s tím nemohli být jisti. Zkusili jsme, zda existuje mnohočlen třetího stupně s požadovanými vlastnostmi, a zjistili jsme, že existuje. Takto skutečně postupují matematikové ve své práci, i když objevují věci podstatně složitější.

ACHILLEUS A ŽELVA ANEB NEKONEČNÉ ŘADY

Bájeslovný řecký hrdina Achilleus měl přízvisko „rychlonohý". S jeho jménem se spojuje jeden zajímavý paradox, jímž se zabývali starořečtí filozofové.

Achilleus pronásleduje želvu; samozřejmě běží podstatně rychleji než ona. Než však uběhne Achilleus polovinu vzdálenosti, která ho dělí od želvy, želva přece jen nějakou vzdálenost urazí. Pak tedy Achilleus opět uběhne polovinu vzdálenosti, která zbývá mezi ním a želvou; želva opět kousek popoleze. Takto bychom mohli pokračovat v těchto úvahách do nekonečna, tudíž Achilleus želvu nikdy nedohoní.

Prakticky je ovšem jasné, že Achilleus želvu dohoní. Jak to tedy vysvětlíme?

Paradox spočívá v tom, že zde máme nekonečný počet časových úseků — za každý takovýto úsek Achilleus vždy zdolá polovinu vzdálenosti, která ho dělí od želvy. Každý tento úsek má délku, kterou lze vyjádřit kladným číslem; celková doba Achilleova běhu je pak součtem všech těchto čísel. Zdálo by se, že součet nekonečně mnoha kladných čísel nemůže být konečným číslem; když se na to podíváme blíže, zjistíme, že může.

Vezměme si úsečku A_0B délky 1 a vyznačme na ní body A_1, A_2, A_3, ... tak, že bod A_j pro libovolné přirozené j je ve vzdálenosti $(2^j - 1)/2^j$ od bodu A_0. Úsečka A_0A_1 má tedy délku $\frac{1}{2}$, úsečka A_1A_2 má délku $\frac{1}{4}$ a tak dále; obecně úsečka $A_{j-1}A_j$ pro každé přirozené j má délku $\frac{1}{2^j}$. Sjednocením všech těchto úseček je úsečka A_0B bez bodu B; přitom libovolné dvě z nich mají nejvýše jeden společný bod. Bude tedy zcela pochopitelné, když prohlásíme, že součtem všech mocnin čísla $\frac{1}{2}$, jejichž exponenty jsou přirozená čísla, je číslo 1.

Výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots,$$

kde a_n pro všechna přirozená n jsou čísla, nazýváme nekonečnou řadou. Pro každé přirozené n výraz

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

nazýváme n-tým částečným součtem této nekonečné řady. Jestliže posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má konečnou limitu s, nazýváme tuto limitu součtem dané nekonečné řady.

Připomeňme si, co je geometrická řada. Je to řada

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

té vlastnosti, že podíl a_{n+1}/a_n je konstantní; označujeme jej q a nazýváme kvocientem geometrické řady. Jde tedy vlastně o řadu

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots .$$

Víme, že n-tý částečný součet této řady je

$$s_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Jak to vypadá s limitou posloupnosti částečných součtů? Předpokládejme $a_1 \neq 0$; kdyby bylo a_1 rovno nule, měli bychom řadu složenou ze samých nul a její součet by byl samozřejmě roven nule. Je-li $|q| > 1$, výraz q^n nemá konečnou limitu a nemá ji tedy ani s_n; v tomto případě tedy součet geometrické řady neexistuje. Je-li $q = 1$, pak všechny členy řady jsou stejná nenulová čísla a její součet ovšem také neexistuje. Je-li $q = -1$, pak $s_n = a_1$ pro liché n a $s_n = 0$ pro sudé n, tedy posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ rovněž nemá limitu. Je-li $|q| < 1$, pak posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu 0 a součet řady je

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Řada $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$, o níž jsme mluvili na začátku, je geometrická řada. Máme $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, tedy skutečně $s = 1$.

Samozřejmě i jiné řady než geometrické mohou mít konečný součet. K tomu, abychom zjistili, zda tento konečný součet existuje, můžeme použít d'Alembertova kritéria; nazývá se podle J. L. R. d'Alemberta (1717—1783). Máme-li řadu

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots,$$

zkoumáme limitu podílu a_{n+1}/a_n. Je-li tato limita větší než —1 a menší než 1, součet řady existuje; je-li větší než 1 nebo menší než —1, součet neexistuje. Je-li limita rovna 1 nebo —1, kritérium nám nepomáhá, protože konečný součet může existovat, ale také nemusí. Tak například u řady

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

tato limita je rovna nule a řada má konečný součet; je to Eulerovo číslo e, o němž si povíme dále.

Podívejme se nyní na řadu složenou z převrácených hodnot přirozených čísel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Říkáme jí harmonická řada. D'Alembertovo kritérium nám u ní nepomůže; zmíněná limita je rovna jedné. Zdálo by se, že tato řada má konečný součet, ale není tomu tak. Utvořme jinou řadu tím, že pro každé přirozené n všechny členy od $\frac{1}{2^n + 1}$ do $\frac{1}{2^{n+1} - 1}$ nahradíme číslem $\frac{1}{2^{n+1}}$, tedy číslem menším. Vypadá to takto:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots .$$

Pokud by harmonická řada měla mít konečný součet, musela by jej mít i tato nová řada. Ona však konečný součet nemá; je v ní číslo 1, pak číslo $\frac{1}{2}$, potom dvakrát číslo $\frac{1}{4}$, čtyřikrát číslo $\frac{1}{8}$, osmkrát $\frac{1}{16}$ a tak dále. Dvě čtvrtiny jsou jedna polovina a stejně tak čtyři osminy, osm šestnáctin a tak dále; máme tedy nekonečně mnoho polovin a součet není konečný. Naproti tomu například řada složená z převrácených hodnot druhých mocnin přirozených čísel konečný součet má.

EULEROVO ČÍSLO

Mezi polskými matematiky se vypráví tato anekdota:

Přednosta psychiatrické kliniky jde na vizitu. Jeden z pacientů ho upozorňuje na to, že na pokoji číslo osm jeden pacient druhého derivuje. Přednosta vstoupí do zmíněného pokoje a vidí, že jeden pacient leží na zemi, druhý na něm sedí a buší ho do zad. Zeptá se ležícího: „To se necháte takhle derivovat?“ Pacient odpoví: „Já si nic nedělám ze žádného derivování; já jsem e^x!“

K tomu, abychom porozuměli této anekdotě, potřebujeme vědět, že existují funkce, které se rovnají svým derivacím, tedy se derivováním nemění. Je to funkce e^x a všechny funkce, které z ní vzniknou násobením konstantou.

Co však značí to e? Vezměme si posloupnost, jejíž n-tý člen je $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Jakou limitu má tato posloupnost? Leckdo by asi řekl, že $1 + \frac{1}{n}$ má limitu 1 a číslo 1 umocněné na libovolný exponent dává opět 1, tedy limita naší posloupnosti je 1. Tady však nesmíme zapomenout, že exponent roste do nekonečna. Limita existuje, ale není to 1. Je to číslo, které se podle L. Eulera (1707—1783) nazývá Eulerovo číslo a označuje se písmenem e.

Podobně jako číslo π i číslo e je číslem transcendentním; je to číslo, které není kořenem žádné algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty. Znamená to ovšem, že e je také číslo iracionální; jeho desetinný rozvoj je nekonečný neperiodický. Na dvacet desetinných míst lze číslo e psát

$$e \doteq 2{,}71828182845904523536.$$

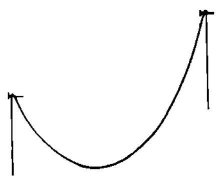
Ze zlomků s trojciferným čitatelem i jmenovatelem se k číslu e nejvíce přibližuje zlomek $\frac{878}{323}$.

Význam čísla e v matematické analýze lze srovnat s významem čísla π v geometrii (podotkněme však, že π má velký význam i v matematické analýze.) Řekli jsme už, že funkce $y = e^x$ má tu vlastnost, že její derivace je opět $y = e^x$. Dokud toho nevíte mnoho o derivacích, asi vám to mnoho neřekne, ale až se blíže seznámíte s matematickou analýzou, poznáte důležitost tohoto faktu.

S číslem e se však můžeme setkat přímo v přírodě. Vezměme lano (nebo řetěz) a zavěsme jeho konce na dva háky, jejichž vzdálenost je menší než délka lana a které nejsou přímo jeden nad druhým. Vlivem gravitace lano zaujme tvar oblouku křivky, které se říká řetězovka neboli katenoida. Tato křivka je grafem funkce

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

kde a je nějaká konstanta. Řetězovku vidíme na obr. III.4.



Obr. III.4

Vezměme si funkci $y = x^x$ definovanou pro všechna nezáporná x. Pro jaké x tato funkce nabývá nejmenší hodnoty? Myslíte, že pro x rovné jedné, nule nebo jedné polovině? Nikoliv, pro $x = \frac{1}{e}$. Podobně zase funkce $y = \sqrt[x]{x}$ nabývá největší hodnoty pro $x = e$.

V kombinatorice a v teorii pravděpodobnosti má velký význam poměr počtu všech permutací n-prvkové množiny bez samodružných prvků k počtu všech permutací této množiny. Posloupnost složená z hodnot tohoto poměru pro všechna přirozená n má limitu $\frac{1}{e}$. Zmíněný poměr lze ilustrovat následujícím způsobem. Hosté v počtu n si dali klobouky do šatny. Šatnářka klobouky neoznačila a vydává je zcela náhodně. Je-li n velké, pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk, je velmi blízká k číslu $\frac{1}{e}$.

V matematické statistice má velký význam Eulerova funkce, která se rovněž vyjadřuje pomocí čísla e.

Dále si uveďme Stirlingův vzorec, který udává přibližnou hodnotu $n!$. Je to

$$n! \doteq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Vidíme, že se v něm vyskytuje jak e, tak π. Zdá se vám asi divné, proč by se to mělo takto počítat, ale ono to má význam ani ne tak pro samotný výpočet $n!$, ale pro to, aby se mohl faktoriál nahradit vhodnou spojitou funkcí, což je často potřebné.

Logaritmus o základu e se nazývá přirozený logaritmus. Na rozdíl od dekadických logaritmů, které se označují log x, se přirozený logaritmus čísla x značí lg x nebo ln x; ten druhý symbol je zkratkou latinského „logarithmus naturalis“ čili „přirozený logaritmus“. Přirozený logaritmus čísla x je tedy číslo, na které musíme umocnit e, abychom dostali číslo x. Asi se vám nezdá příliš přirozené místo čísla 10 brát za základ logaritmů takové podivné číslo, avšak stejně nepřirozené by se zdálo dělit plný úhel na 2π radiánů místo na 360 stupňů. Teprve při studiu matematické analýzy pochopíte, že to skutečně smysl má a že má smysl nazývat takové logaritmy přirozenými.

Úlohy

1. Jsou dána reálná čísla a, b, přičemž $a < b$. Mějme funkci $y = f(x)$, která je definována tak, že $f(x) = 0$ pro $x < a$ a pro $x > b$ a $f(x) = 1$ pro $a < x < b$; pro $x = a$ a $x = b$ funkce $f(x)$ není definována. Vyjádřete tuto funkci jedinou rovnicí, v níž se vyskytují pouze operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a přechodu k absolutní hodnotě.

2. Tibetský láma koná pouť na posvátnou horu. Vyjde z kláštera v šest hodin ráno, jde nejkratší cestou na horu, na vrchol hory dojde v šest hodin večer. Na vrcholu stráví noc v meditacích. Ráno v šest hodin začne sestupovat toutéž cestou, v šest hodin večer dojde zpět do kláštera. Jeho pohyb je nerovnoměrný; láma dělá zcela nepravidelně přestávky na odpočinek a na jídlo. Dokažte, že v určitém okamžiku druhého dne bude přesně na tom místě, kde byl před 24 hodinami.

3. Jistě chápete, co asi znamená symbol $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$; prostě sčítání a odmocňování se provádí do nekonečna. (Jde samozřejmě o limitu určité posloupnosti.) Je to konečné číslo. Určete je!

4. Koňský handlíř se vrací z jarmarku. Přijde k mostu, kde potká čerta. Čert mu říká: „Vím, o kolik jsi dnes ošidil lidi. Mohu ti tvé jmění rozmnožit. Pokaždé, když přejdeš tento most, všechny peníze v kapse se ti zdvojnásobí. Po prvním přejití mostu mi však musíš zaplatit padesát korun, po druhém sto korun a po každém dalším vždy o padesát korun více než po předešlém.“ Handlíř přešel několikrát most a jmění mu narůstalo. Pak však mu začaly peníze ubývat a nakonec zůstal čertovi dlužen. Kdyby měl na začátku o haléř víc, nemohlo se mu to stát. Kolik peněz měl handlíř na začátku?

5. V soustavě souřadnic mějme rovnoramenný trojúhelník A_nB_nC o vrcholech $A_n\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$, $B_n\left[\frac{1}{n}, 0\right]$, $C[0, 3]$, kde n je přirozené číslo. Pro každé n těžiště tohoto trojúhelníka je $T[0, 1]$. Limitou posloupnosti bodů A_n je počátek O soustavy souřadnic a je i limitou posloupnosti bodů B_n. Jde-li tedy n do nekonečna, trojúhelníky A_nB_nC se blíží k úsečce OC. Ta by tedy také měla mít těžiště v bodě T, přitom však T zřejmě není jejím středem. Jak to vysvětlíte?

Řešení úloh

1. Toto vyjádření je

$$y = \frac{(x - a + |x - a|)\,(b - x + |b - x|)}{4|x - a|\,.\,|b - x|}$$

2. Výstup i sestup lze znázornit grafem, v němž na osu x nanášíme čas uplynulý od šesté hodiny ranní, na osu y vzdálenost od kláštera. Vzdálenost lámy od kláštera v závislosti na čase je pro první i pro druhý den vyjádřena funkcí, jejímž grafem je spojitá křivka. Obě křivky leží celé v obdélníku o vrcholech [0, 0], [12, 0], [12, d], [0, d], kde d je vzdálenost vrcholu hory od kláštera. Křivka pro první den spojuje body [0, 0] a [12, d], křivka pro druhý den spojuje body [0, d] a [12, 0], tedy vždy protilehlé vrcholy obdélníka. Protože tyto křivky jsou spojité, musejí mít alespoň jeden společný bod. (Je to intuitivně zřejmé, v matematické analýze to lze přesně dokázat.) Souřadnice tohoto bodu udávají hledaný časový okamžik a příslušnou vzdálenost od kláštera.

3. Označme si onen výraz symbolem a. Potom

$$a^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} = 2 + a.$$

Číslo a je tedy kořenem rovnice

$$a^2 - a - 2 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou 2 a —1. Protože odmocnina je vždy číslo nezáporné, musí být $a = 2$.

4. Měl 99 korun a 99 haléřů. Kdyby měl sto korun, přibylo by mu po každém přejití mostu a příslušném zaplacení padesát korun. Takto mu po každém přejití přibude padesát korun minus 2^n haléřů. Samozřejmě 2^n při n rostoucím nade všechny meze roste také nade všechny meze, tedy handlíř skutečně zchudne.

5. Pojem těžiště trojúhelníka je převzat z fyziky. Těžiště trojúhelníka lze brát jako těžiště soustavy tří hmotných bodů — vrcholů trojúhelníka — o stejné hmotnosti. Jestliže si představíme, že se body A_n, B_n pohybují směrem k bodu O, až s ním splynou, bude nakonec v bodě O hmotný bod o hmotnosti rovné dvojnásobku hmotnosti bodu C a tedy těžiště dvojice hmotných bodů O, C bude skutečně v bodě T.