## I. KAPITOLA

# TEORIE MNOŽIN A MATEMATICKÁ LOGIKA

Vyprávění o různých oborech matematiky začneme tím, že si něco řekneme o dvou jejích oborech, pro něž se někdy užívá souhrnného názvu základy matematiky. Je to teorie množin a matematická logika.

Názvy někdy matou. Pod slovem základy si představujeme obvykle to nejlehčí, co v daném oboru existuje. Je-li někdo odborníkem v základech matematiky, může to u nezasvěcených vyvolat dojem, že jde o začátečníka, který dosud nedokázal do matematiky hlouběji proniknout. To je ovšem veliký omyl. Zde slovo základy vyjadřuje něco podobného jako základy stavby. Postavit základy domu rozhodně není lehčí než postavit střechu; naopak je to práce, na níž závisí osud celé stavby. Jsou-li základy postaveny špatně, dům se zřítí a sebedokonalejší střecha jej nezachrání. A tak i moderní matematiku lze přirovnat k stavbě spočívající na základech, jimiž jsou právě zmíněné dvě disciplíny.

Je to zcela pochopitelné. Není matematického oboru, v němž bychom se nesetkali s pojmem množiny, ať už jde o množinu čísel, bodů, funkcí či čehokoliv jiného. A že se každá matematická úvaha musí řídit logickými pravidly, je také jistě každému jasné.

S pojmem množiny jste se již seznámili ve škole. Se slovem množina bylo až donedávna možno se setkat pouze v odborné matematické literatuře. Teprve v poslední době, díky modernizaci školního vyučování matematice, proniklo i do novin a dokonce i do televizních her. V jedné hře například dědeček odmítá prosbu svého vnuka, aby mu pomohl s úkolem z matematiky, slovy: „Tomu já nerozumím, to jsou množiny." Pro nematematiky se množina stala strašákem; pokládají ji za poslední výkřik matematiky, pro prostého člověka zcela nepochopitelný. Vy už víte, že to s tou nepochopitelností není tak zlé; základní pojmy jako sjednocení a průnik vám jistě nedělají těžkosti. A množina také není v matematice ničím novým; tohoto pojmu se běžně užívá už mnoho desítek let.

Ovšem ona úděsnost slova množina plyne hlavně z toho, že se v češtině tohoto slova používá pouze jako matematického termínu; v běžné řeči se toto slovo prostě nevyskytuje (nebo alespoň nevyskytovalo, dokud se nezačalo diskutovat o modernizaci školské matematiky). V jiných jazycích je tomu jinak. V tenisu i jiných sportech se i u nás užívá slova set (i když se prosazuje český výraz sada). Je to slovo anglické; v angličtině se ho také užívá pro soupravu nějakých předmětů (například „coffee set" je souprava nádobí na kávu) a jakožto matematický termín značí množinu. Rovněž se u nás často používalo francouzského slova ensemble pro soubor (pěvecký, taneční nebo divadelní); ve francouzské matematické terminologii zase označuje množinu. Ruština má pro množinu výraz množestvo; i s ním jste se jistě setkali v hodinách ruštiny, aniž by vám to připomnělo nějakou matematiku.

Angličané, Francouzi a Rusové se tedy nemusejí děsit slova označujícího množinu. A proč vlastně se u nás zavedlo ono tajemné slovo? Původně se užívalo termínu množství, což je docela běžné slovo. Jsou s ním ovšem potíže. Tímto slovem jsme zvyklí označovat nikoliv to, co by odpovídalo matematickému termínu množina, ale spíše kvantitu něčeho, a to zejména nějaké látky (například mluvíme o množství alkoholu v krvi). I gramaticky je nevýhodné tím, že se u něho těžko rozlišují jednotlivé pády a těžko by se od něho odvozovalo přídavné jméno. Existuje například množinová topologie, ale výraz „množstvová topologie“ by jistě našim uším nezněl příjemně. Máme tedy množiny; lidé zběhlí v matematice jsou na to zvyklí, a ani ostatní by se toho slova nemuseli bát.

Že množinu nelze definovat, to snad také chápete. Definujeme-li nějaký pojem, musíme v definici použít jiných pojmů, které už známe. Nelze použít „definice kruhem“, to jest definovat například pojem $A$ pomocí pojmu $B$, pojem $B$ pomocí pojmu $C$ a pojem $C$ opět pomocí pojmu $A$. Pak bychom nevěděli ani co je $A$, ani co je $B$, ani co je $C$. Do nekonečna také jít nemůžeme, musíme se tedy při definování někde zastavit a určité pojmy prostě ponechat nedefinované. To jsou pak takzvané základní pojmy — v matematice je to například číslo, bod, přímka, rovina a také množina. Tyto pojmy nám prostě musejí být nějak intuitivně jasné; doufám, že pojem množiny vám jasný je.

Teorie množin je vybudována axiomaticky. Existují dva systémy axiomů této teorie, a to systém Zermelův-Fraenkelův a Bernaysův-Gödelův. Nebudeme je zde popisovat; soustředíme se jen na některé zajímavosti z teorie množin.

Logika byla známa již ve starověkém Řecku; zabýval se jí především známý filozof Aristotelés. Ve středověku se aristotelovská logika stala základem takzvané scholastiky, která především sloužila teologii a vlastní logice mnoho nepřinesla. Teprve v novověku se začalo v logice užívat matematických metod a vznikla tak matematická logika. Matematika s logikou tedy těsně souvisí. Matematika, jako všechny ostatní vědy, užívá logiky, na druhé straně však také logika užívá matematiky. Dnes je matematická logika obsáhlým oborem a značně ovlivňuje nejen teoretickou matematiku, ale i nauku o samočinných počítačích — informatiku.

Uveďme si některé zajímavosti z teorie množin a matematické logiky.

## NENÍ NEKONEČNO JAKO NEKONEČNO

Dvě množiny $A$ a $B$ se nazývají ekvivalentní, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $A$ na množinu $B$. Je zřejmé, že dvě konečné množiny jsou ekvivalentní právě tehdy, mají-li stejný počet prvků. Můžeme si představit množinu $A$ jako množinu mužů a $B$ jako množinu žen v tanečním sále. Jestliže muži vyzvou ženy k tanci, vznikne tím určité zobrazení z množiny $A$ do množiny $B$; obrazem každého tančícího muže v tomto zobrazení je jeho taneční partnerka. Aby toto zobrazení bylo skutečně vzájemně jednoznačným zobrazením množiny $A$ na množinu $B$, je nutné, aby všichni muži i všechny ženy tančili; samozřejmě vždy jeden muž s jednou ženou, tanec například s koštětem se nepřipouští. To je ovšem možné právě tehdy, je-li stejný počet mužů i žen.

Jak je to s nekonečnými množinami? Těžko si dovedeme představit sál s nekonečně mnoha muži a nekonečně mnoha ženami. Pokud si jej však přece představíme, zdálo by se nám, že by tu neměly být žádné potíže. Je-li nekonečně mnoho žen, neměla by žádnému muži chybět tanečnice, a je-li nekonečně mnoho mužů, neměla by žádná žena sedět. A přece tomu tak nemusí být.

Nechť $A$ je množina všech přirozených čísel; je to zřejmě množina nekonečná. Nechť $B$ je množina všech nekonečných posloupností, jejichž členy jsou rovny 0 nebo 1; i takovýchto posloupností je zřejmě nekonečně mnoho. Zobrazit vzájemně jednoznačně množinu $A$ na množinu $B$ tedy znamená sestavit nekonečnou posloupnost

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \ldots,$$

jejíž členy jsou prvky množiny $B$, tedy nekonečné posloupnosti nul a jedniček, a v níž se každý prvek množiny $B$ vyskytuje právě jednou. Takováto posloupnost vlastně představuje posloupnost obrazů jednotlivých přirozených čísel v našem zobrazení.

Předpokládejme, že taková posloupnost existuje. Pro každé přirozené číslo $n$ prvky posloupnosti $\boldsymbol{b}_n$ označíme $b_{n1}, b_{n2}, b_{n3}, b_{n4}, \ldots$. Máme tedy

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{b}_1\colon b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, \ldots \\ \boldsymbol{b}_2\colon b_{21}, b_{22}, b_{23}, b_{24}, \ldots \\ \boldsymbol{b}_3\colon b_{31}, b_{32}, b_{33}, b_{34}, \ldots \\ \boldsymbol{b}_4\colon b_{41}, b_{42}, b_{43}, b_{44}, \ldots \\ \vdots \end{array}$$

Nyní sestrojíme určitou posloupnost $\boldsymbol{c}$; její členy budou $c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$ a budou definovány tak, že

$$c_n = 1 - b_{nn}$$

pro každé přirozené číslo $n$. Tedy je-li $b_{nn} = 0$, je $c_n = 1$, a je-li $b_{nn} = 1$, je $c_n = 0$. Posloupnost $\boldsymbol{c}$ je tedy opět nekonečná posloupnost z nul a jedniček; znamená to $\boldsymbol{c} \in B$ a tedy $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}_q$ pro nějaké přirozené číslo $q$ (protože předpokládáme, že každý prvek z $B$ se vyskytuje právě jednou mezi členy posloupnosti $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \ldots$). Uvažujme $q$-tý člen posloupnosti $\boldsymbol{c}$, tedy $c_q$. Podle definice posloupnosti $\boldsymbol{c}$ je

$$c_q = 1 - b_{qq}.$$

Protože však $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}_q$, je $c_q$ roven $q$-tému členu posloupnosti $\boldsymbol{b}_q$, tedy

$$c_q = b_{qq}.$$

Obě rovnosti mohou být splněny současně pouze tehdy, je-li $c_q = \frac{1}{2}$; to však není možné, protože $c_q$ musí být rovno 0 nebo 1.

Vidíme tedy, že ať sestavíme jakoukoliv posloupnost prvků množiny $B$, vždy se najde prvek množiny $B$, který „se do ní nevejde". Množiny $A$ a $B$ jsou obě nekonečné, množina $B$ je však jaksi „více nekonečná" než množina $A$.

Na posloupnosti z nul a jedniček jsme se omezili jen kvůli jednoduchosti. Kdybychom za množinu $B$ vzali množinu všech nekonečných posloupností přirozených čísel, došli bychom zřejmě ke stejnému výsledku.

Ekvivalence množin, jak byla výše definována, umožňuje roztřídit všechny množiny do tříd tak, že dvě množiny patří do téže třídy právě tehdy, jsou-li spolu ekvivalentní. Každé této třídě je vzájemně jednoznačně přiřazeno takzvané kardinální číslo. Mezi kardinální čísla patří všechna nezáporná celá čísla; například číslo 5 je takto přiřazeno třídě všech pětiprvkových množin. Tyto množiny jsou navzájem ekvivalentní a nejsou ekvivalentní se žádnou množinou jinou než pětiprvkovou. Pro nekonečné množiny ovšem musíme zavést takzvaná nekonečná kardinální čísla. Třídě ekvivalentních množin, která obsahuje množinu všech přirozených čísel, přiřazujeme kardinální číslo $\aleph_0$.

Znak $\aleph$ je hebrejské písmeno alef. Je to první písmeno hebrejské abecedy; neznamená A, jak by se nám mohlo zdát, ale pouze ráz, to jest jakési „hm", podobně jako bulharské tvrdé jer nebo rumunské Ă. Zato však je mezi hebrejskými písmeny výraznou individualitou; jednotlivá písmena této abecedy jsou si značně podobná a mohou se snadno zaměnit, avšak alef se od ostatních rozezná snadno.

Index nula ve výrazu $\aleph_0$ značí, že jde o nejmenší nekonečné kardinální číslo; nejmenší v tom smyslu, že každá podmnožina množiny všech přirozených čísel buď je ekvivalentní s touto množinou (říkáme, že má mohutnost $\aleph_0$), nebo je konečná. Množinám mohutnosti $\aleph_0$ říkáme také spočetné množiny. Souvisí to s tím, co jsme si říkali o uspořádání prvků takovýchto množin do posloupnosti.

Ukážeme si, že i množina všech kladných racionálních čísel je spočetná. Provedeme to tak, že si sestrojíme posloupnost obsahující všechna tato čísla.

Každé kladné racionální číslo lze vyjádřit jako podíl dvou přirozených čísel, tedy jako zlomek $a/b$, kde $a$ a $b$ jsou přirozená čísla. Požadujeme-li navíc, aby $a$ a $b$ byla nesoudělná čísla, tedy aby zlomek $a/b$ nebylo možno krátit (v tom případě říkáme, že $a/b$ je zlomek v základním tvaru), je toto vyjádření jednoznačné. Výškou zlomku $a/b$ budeme nazývat číslo $a + b$.

Nejmenší možná výška zlomku s kladným čitatelem i jmenovatelem je 2 a má ji pouze zlomek $\frac{1}{1}$, což je číslo 1. Tedy toto číslo bude prvním členem naší posloupnosti. Výšku 3 mají zlomky $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{1}$; ty tedy budou druhým a třetím členem posloupnosti. Výšku 4 mají zlomky $\frac{1}{3}$ a $\frac{3}{1}$ $\left(\text{zlomek } \frac{2}{2} \text{ není v základním tvaru}\right)$; bude to čtvrtý a pátý člen posloupnosti. Dále budou následovat zlomky výšky 5, to jest $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}$, potom zlomky výšky 6, tedy $\frac{1}{5}, \frac{5}{1}$, zlomky výšky 7, to jest $\frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{6}{1}$ a tak dále. Vidíme, že takto postupně zařadíme do posloupnosti všechna kladná racionální čísla. Množina všech kladných racionálních čísel je tedy spočetná. Snadno bychom také dokázali, že i množina všech racionálních čísel je spočetná; stačí naši posloupnost upravit tak, že před první člen dáme nulu a za každý člen dáme číslo k němu opačné.

Jak je to však s množinou všech reálných čísel? Víme, že reálné číslo může mít nekonečný desetinný rozvoj; pak mu je tedy přiřazena jistá nekonečná posloupnost číslic. Z toho potom plyne, že množina reálných čísel je ekvivalentní množině *B*, o níž jsme mluvili na začátku tohoto paragrafu. (Důkaz je ovšem trochu složitější.) Tato množina má tedy jinou mohutnost než $\aleph_0$; říká se jí mohutnost kontinua. Rovněž množina všech iracionálních čísel má tuto mohutnost. Dalo by se tedy říci, že iracionálních čísel je „více“ než čísel racionálních.

Existuje nějaká nekonečná podmnožina množiny reálných čísel, která by nebyla ani spočetná, ani by neměla mohutnost kontinua? Takzvaná Cantorova hypotéza kontinua říká, že ne. Je to ovšem pouze hypotéza čili domněnka; zatím nebyla dokázána. Avšak K. Gödel dokázal, že ji nelze vyvrátit pouze pomocí axiomů teorie množin, a P. Cohen a československý matematik P. Vopěnka (vzájemně nezávisle) dokázali, že ji pouze pomocí těchto axiomů nelze dokázat.

Je-li dána množina $M$, pak množinu všech jejích podmnožin označíme $P(M)$ a nazveme ji potenční množinou množiny $M$. Je-li $M$ konečná a má-li $n$ prvků, pak $P(M)$ má $2^n$ prvků, což je více než $n$, tedy množina $P(M)$ není ekvivalentní množině $M$. Platí to však i pro nekonečné množiny.

Nechť $M$ je libovolná množina a předpokládejme, že její potenční množina je s ní ekvivalentní. Znamená to, že existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $\varphi$ množiny $M$ na množinu $P(M)$. Každému prvku $x \in M$ je tedy vzájemně jednoznačně přiřazena nějaká podmnožina $\varphi(x)$ množiny $M$. Poněvadž $\varphi(x)$ je podmnožina množiny $M$, můžeme se ptát, zda $x \in \varphi(x)$ nebo $x \notin \varphi(x)$. Označme $N$ množinu všech prvků $x \in M$ takových, že $x \notin \varphi(x)$. Množina $N$ je podmnožinou množiny $M$ a musí být tedy obrazem některého prvku $y \in M$ v zobrazení $\varphi$, tedy $N = \varphi(y)$ pro nějaké $y \in M$. Zkoumejme nyní, zda $y$ patří či nepatří do $N$. Je-li $y \in N$, znamená to, že $y \notin \varphi(y)$; protože však $N = \varphi(y)$, dostáváme spor. Je-li však $y \notin N$, pak $y \notin \varphi(y)$ a tedy by mělo být $y \in N$. Z toho plyne, že žádané zobrazení $\varphi$ nemůže existovat a množina $P(M)$ má tedy jinou mohutnost než množina $M$.

Kardinální čísla obecně zapisujeme malými písmeny staré německé abecedy (švabachu). Jsou-li $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ dvě kardinální čísla, pak píšeme $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ právě tehdy, existuje-li množina mohutnosti $\mathfrak{b}$, která obsahuje jako podmnožinu nějakou množinu mohutnosti $\mathfrak{a}$. Je-li $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, pak píšeme $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a říkáme, že $\mathfrak{a}$ je menší než $\mathfrak{b}$, popřípadě, že $\mathfrak{b}$ je větší než $\mathfrak{a}$.

Potenční množina $P(M)$ obsahuje jako podmnožinu množinu všech jednoprvkových podmnožin množiny $M$; tato množina je zřejmě ekvivalentní s $M$ a tedy mohutnost množiny $P(M)$ je v tomto smyslu větší než mohutnost množiny $M$. Ke každé množině lze tedy sestrojit množinu větší mohutnosti, tedy neexistuje žádné největší kardinální číslo a kardinálních čísel (i těch nekonečných) je nekonečně mnoho.

## PARADOX KRÉŤANA

Ve starověkém Řecku měli obyvatelé ostrova Kréty pověst lhářů. Vznikl tehdy logický problém: Kréťan Epimenidés prohlásil, že všichni Kréťané jsou lháři. Co z toho máme vyvozovat? Je-li to pravda, pak je lhářem i Epimenidés a jeho výrok je lží.

Zde ovšem můžeme připustit i to, že Epimenidovo tvrzení je lež; existují Kréťané, kteří nelžou, avšak Epimenidés mezi ně nepatří. Můžeme však vyslovit přesnější formulaci tohoto paradoxu: V obci je holič, který holí všechny muže z obce, kteří se sami neholí, a kromě nich už neholí nikoho jiného. Je nyní otázka, zda se tento holič sám holí či nikoliv. Jestliže se sám holí, pak tedy nepatří mezi muže z obce, kteří se sami neholí, z čehož by plynulo, že se neholí. Jestliže se sám neholí, je jedním z mužů z obce, kteří se sami neholí, a tedy se holí.

Podobně ve slavném Cervantesově románu „Důmyslný rytíř don Quijote de la Mancha“ si můžeme přečíst příběh, který je další formulací tohoto paradoxu. Přes řeku vede most a u něho stojí šibenice. Každý pocestný, který přechází most, musí pod přísahou sdělit, co chce na druhé straně dělat. Zjistí-li se, že lhal, je pověšen na zmíněné šibenici. Jeden pocestný prohlásil, že se jde dát oběsit na oné šibenici. Tedy nebude-li oběšen, lhal a měl by být oběšen. Bude-li oběšen, mluvil pravdu a neměl by být oběšen. (Bylo by asi vhodné ještě dodat, že šibenice sloužila výlučně k věšení „mostních lhářů“; jinak by totiž pocestný mohl být oběšen za něco jiného.)

Přejděme nyní k ryze matematické variantě tohoto paradoxu. Prvkem množiny může být cokoliv, tedy i množina. Je tedy také možné, aby některá množina byla svým vlastním prvkem. Nechť tedy $M$ je množina všech množin, které neobsahují sebe samu jako prvek. Jestliže nyní $M \in M$, pak $M$ obsahuje sebe samu jako prvek, a tedy $M \notin M$. Jestliže $M \notin M$, pak $M$ neobsahuje sebe samu jako prvek a musí být $M \in M$. (Trochu to připomíná úvahu z předešlého paragrafu.)

Znamená to tedy, že celá teorie množin je postavena na hlavu? Nikoliv; axiomatika této teorie je vybudována tak, že se vyrovnává i s tímto paradoxem. Především ne každý soubor nějakých objektů se nazývá množinou. Například nemluvíme o množině všech množin, ale o třídě všech množin. Třída je obecnější pojem než množina; každá množina je třídou, ale ne každá třída je množinou. Nebudeme zde přesně popisovat, kdy mluvíme o množině a kdy pouze o třídě. Stačí jen uvést, že množině lze přiřadit její mohutnost, zatímco například u třídy všech množin to nelze; nemůžeme přece vědět, jaké všemožné množiny je možno zavést. (Něco jiného je například množina všech podmnožin dané množiny.) Rovněž tedy nemluvíme o množině všech množin, které nejsou prvkem sebe samé. Podrobnější vysvětlování této problematiky by překročilo rámec této populárně naučné publikace.

Zmíníme se jen ještě o podobném paradoxu, který lze zařadit do matematické logiky. Je jistě možné některá přirozená čísla jednoznačně vyjádřit výrazem v češtině, který obsahuje méně než třicet slov. Například číslo 2 lze vyjádřit jako „dvě“ nebo „jediné sudé prvočíslo“.

Českých slov je konečně mnoho, tedy českých výrazů o méně než třiceti slovech je také konečný počet. Přirozených čísel je nekonečně mnoho, tedy určitě existují přirozená čísla, která nelze požadovaným způsobem vyjádřit. Každá neprázdná podmnožina množiny všech přirozených čísel obsahuje číslo, které je nejmenším číslem z této množiny. (Říkáme, že množina všech přirozených čísel je dobře uspořádaná; například množina všech kladných racionálních čísel tuto vlastnost nemá.) Existuje tedy nejmenší přirozené číslo, které nelze jednoznačně vyjádřit výrazem v češtině o méně než třiceti slovech; toto číslo je právě jedno.

A teď se podívejme na výraz „nejmenší přirozené číslo, které nelze jednoznačně vyjádřit výrazem v češtině o méně než třiceti slovech“. Je to výraz v češtině, který obsahuje méně než třicet slov. Jak je to tedy s naším číslem? Dá se vyjádřit požadovaným způsobem nebo nedá?

Logika se vyrovnává s tímto paradoxem tím, že mluví o jazyku a o metajazyku. Vyjadřujeme-li zde nějaká přirozená čísla slovními výrazy, mluvíme jazykem; vypovídáme-li něco o tomto vyjadřování, mluvíme metajazykem. Nenechme se mýlit tím, že v obou případech používáme češtiny; z hlediska logiky jde o dva různé jazyky. Něco podobného jsou věty „Praha je hlavní město Československa“ a „Praha je podstatné jméno rodu ženského“. Pokaždé mluvíme o něčem jiném; poprvé o městě Praze, podruhé o slově „Praha“, přičemž o slově „Praha“ mluvíme metajazykem, do něhož toto slovo nepatří.

Dítě vychované modernizovanou matematikou jede s matkou vlakem. Náhle se podívá z okna a vykřikne: „Mami, tamhle je množina kraviček!“ Matka vyhlédne z okna a opáčí: „Vždyť tam žádné kravičky nejsou!“ Dítě se nedá zmást: „Ale ano, je tam prázdná množina kraviček!“

Tato anekdota v nás vzbudí jistě úvahy o podivuhodných vlastnostech prázdné množiny. Vidíme, že to může být zrovna tak množina kraviček jako množina čehokoliv jiného. A zde se setkáváme s dalším logickým paradoxem.

V logice se mluví o obsahu a rozsahu pojmu. Obsah pojmu je souhrn jeho vlastností, jeho rozsah je souhrn všech exemplářů tohoto pojmu. Říká se, že dva pojmy mají stejný obsah právě tehdy, mají-li stejný rozsah; pak jde vlastně o tentýž pojem.

Kentaury známe z řecké mytologie. Byly to zvláštní bytosti, napůl lidé a napůl koně. Byli to tvorové divocí a necivilizovaní, byly však mezi nimi i takové výjimky jako vzdělaný a moudrý Kentaur Cheirón, učitel Héraklův, kterého Héraklés nešťastným omylem střelil šípem namočeným do jedovaté krve Hydry lernejské. Jinou bájnou bytostí je jednorožec, kterého můžeme vidět jako štítonoše ve znaku Velké Británie; tvor podobný koni, ale s jedním rovným rohem uprostřed čela.

Vezměme si nyní pojmy „Kentaur“ a „jednorožec“. Jejich obsah, tedy souhrn vlastností, jistě není tentýž; Kentauři přece neměli žádný roh. Přitom však oba pojmy mají stejný rozsah — prázdnou množinu. Neexistují přece ani Kentauři, ani jednorožci. Jak to však potom je? Je Kentaur a jednorožec totéž?

Tento paradox lze vysvětlit tím, že pojem nemusí vždy vyjadřovat nějaký existující objekt. Kdyby tomu tak bylo, byla by naše kultura ochuzena o bájesloví a vlastně i o značnou část krásné literatury. Vždyť třeba Čapkovi mloci nebo továrna na absolutno jsou pojmy známé tisícům čtenářů a přitom ve skutečnosti neexistují. Spíše než skutečnou věc vyjadřuje pojem představu lidí o této věci a může vyjádřit i představy o věcech neexistujících. Tvrzení, že pojmy mají stejný obsah právě tehdy, mají-li stejný rozsah, není tedy pravdivé.

## PARADOX HOLOHLAVÉHO

V matematice se používá principu matematické indukce, který jistě znáte. Máme-li dokázat, že nějaké tvrzení platí pro všechna přirozená čísla, stačí, když dokážeme, že platí pro číslo 1 a že z předpokladu, že tvrzení platí pro číslo $n$, plyne, že platí i pro číslo $n + 1$.

Jestliže nějaký člověk není holohlavý a vytrhneme-li mu jeden vlas, nestane se tím holohlavým. Předpokládáme-li, že pro nějaké přirozené číslo $n$ platí, že po vytržení $n$ vlasů se takový člověk nestane holohlavým, pak tedy můžeme tvrdit, že se jím nestane ani po vytržení dalšího vlasu, tedy vytrhneme-li mu celkem $n + 1$ vlasů. Podle principu matematické indukce tedy člověk, který není holohlavý, se jím nestane ani po vytržení libovolného počtu vlasů.

Výsledek to je jistě absurdní. Kde je chyba? V principu matematické indukce jistě ne. Je tedy ve výchozím předpokladu. Nelze tvrdit, že člověk, který není holohlavý, se po vytržení jednoho vlasu nestane holohlavým.

Teď se budete asi divit, jak je to možné. Jde však o to, že každý pojem, s nímž v matematice pracujeme (kromě základních pojmů, o nichž jsme už mluvili), musí být přesně definován. Chceme-li vyslovovat nějaká matematická tvrzení o holohlavém člověku, musíme si tento pojem definovat. Definujeme-li holohlavého jako člověka, který nemá vůbec žádné vlasy, pak člověk s jediným vlasem není holohlavý, ale po vytržení jednoho vlasu se jím stane. Definujeme-li holohlavého třeba jako člověka, který má nejvýše sto vlasů, pak člověk, který má 101 vlasů, není holohlavý a stane se jím po vytržení jednoho vlasu.

## Úlohy

**1.** Algebraické číslo je takové číslo, které je kořenem některé algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty, to jest rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde $n$ je nějaké přirozené číslo a koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou celá čísla. Patří mezi ně všechna racionální čísla. Každé racionální číslo lze psát ve tvaru zlomku $a/b$, kde $a$ a $b$ jsou celá čísla, tedy takové číslo je kořenem lineární algebraické rovnice

$$bx - a = 0.$$

Mezi algebraická čísla však patří i některá čísla iracionální; například $\sqrt{2}$ je číslo iracionální a přitom je to kořen rovnice

$$x^2 - 2 = 0.$$

Ovšem existují i reálná čísla, která nejsou algebraická; říkáme jim transcendentní. Patří mezi ně například Ludolfovo číslo $\pi$ a Eulerovo číslo e (základ přirozených logaritmů).
Jak je to s množinou všech reálných algebraických čísel?
Je spočetná, či nikoliv?

**2.** Kdesi v Orientě je Město Mudrců. Svůj název má od toho, že jeho obyvatelé vědí všechno na světě kromě jediné věci: nikdo z nich neví, zda jeho manželka je věrná (o cizích manželkách to ví). Jednoho dne vydal sultán ferman, v němž oznamoval, že se v Městě Mudrců vyskytuje ženská nevěra, a nařizoval, aby každý muž z tohoto města, jakmile u své ženy zjistí nevěru, ji ještě téhož dne zabil. Třicátého dne po vydání fermanu všichni manželé nevěrných žen své manželky zabili. Kolik bylo nevěrných manželek?

3. Na ostrově žijí dva domorodé kmeny: Poctivci a Lháři. Poctivci vždy mluví pravdu, Lháři vždy lžou. Cestovatel se zeptal jednoho domorodce, ke kterému kmeni patří. Když domorodec odpověděl, cestovatel ho přijal za průvodce. Cestou potkali dalšího domorodce. Cestovatel poslal průvodce, aby se ho zeptal, kdo je. Průvodce tak učinil a potom cestovateli sdělil, že druhý domorodec tvrdil, že je Poctivec. Byl průvodce Poctivec, nebo Lhář?

4. Vězeň je v cele, která má dva východy. Oba jsou střeženy žalářníky, z nichž jeden vždy mluví pravdu, druhý vždy lže. Jeden z východů vede na svobodu, druhý na popraviště. Panovník dal vězni milost, ale pouze pod podmínkou, že vězeň vyjde z vězení správným východem; vyjde-li východem, který vede na popraviště, bude popraven. Přitom smí jednomu ze žalářníků položit jedinou otázku. Jakou otázku položí, když neví, který ze žalářníků je pravdomluvný a který lhář?

5. Král měl tři dcery: Anežku, Bertu a Cecílii. Anežka mluvila vždy pravdu, Berta vždy lhala a Cecílie někdy mluvila pravdu, někdy lhala. Ke dvoru přijel cizí princ a žádal krále o ruku Anežky. Král ho zavedl do komnaty, kde všechny tři dcery seděly vedle sebe. Slíbil, že mu Anežku dá, pokud pozná, která z nich to je. Přitom smí každé položit jedinou otázku. Princ se každé z princezen zeptal, jak se jmenuje ta, která sedí uprostřed. Princezna sedící vlevo odpověděla, že Anežka, princezna sedící uprostřed řekla, že Berta, princezna sedící vpravo odvětila, že Cecílie. Na základě těchto odpovědí princ Anežku poznal a byla slavná svatba. Jak princ uvažoval?

6. Odsouzenec k smrti žádal krále o milost. Král odpověděl, že o milosti rozhodne los. Odsouzenec dostane sáček, v němž budou dvě kuličky: bílá a černá. Vytáhne-li bílou kuličku, bude volný, vytáhne-li černou, bude popraven. Hodný žalářník však vězni prozradil, že se ho král chystá podvést: v sáčku budou obě kuličky černé. Přesto však odsouzenec dosáhl toho, že byl omilostněn. Jak to udělal?

7. Pět rybářů se vydalo spolu na lov; jmenovali se Kapr, Mří

nek, Vokoun, Cejn a Štika. Každý z nich ulovil jednu rybu; tyto ryby byly náhodou zase kapr, mřínek, okoun, cejn a štika. Nikdo však nechytil tu rybu, jejíž jméno nesl. Pan Cejn nechytil štiku a pan Štika nechytil cejna. Štiku ulovil jmenovec ryby, kterou chytil pan Vokoun; nebyl to kapr. Jakou rybu ulovil pan Kapr?

Úlohám tohoto typu se říká zebry. Tento název pochází od jedné klasické úlohy, která je však složitější než úloha o panu Kaprovi. Vystupují v ní příslušníci různých národů, z nichž každý chová nějaké zvíře a má svůj oblíbený nápoj. Úloha je komplikována tím, že všichni bydlí v jedné ulici a jsou o některých uvedeny údaje, zda bydlí nalevo či napravo od sebe. Úlohou je zjistit, kdo chová zebru. Přesné znění úlohy si autor této knížky bohužel nepamatuje.

**8.** Některé předměty mající vlastnost $X$ mají také vlastnost $Y$. Ke každému předmětu majícímu vlastnost $X$ existuje předmět, který nemá ani vlastnost $Y$ ani vlastnost $Z$. Dokažte, že existují předměty, které nemají ani vlastnost $X$, ani vlastnost $Z$.

**9.** Ve škole jsou tři zájmové kroužky: chemický, šachový a pěvecký. Každý žák ve třídě chodí do některého z nich. Do chemického chodí šestnáct žáků, do šachového sedmnáct, do pěveckého čtrnáct žáků. Osm žáků chodí současně do chemického i šachového kroužku, šest do chemického i pěveckého, čtyři do šachového i pěveckého. Tři žáci navštěvují všechny tři kroužky. Kolik je žáků ve třídě?

## Řešení úloh

**1.** Množina všech reálných algebraických čísel je spočetná. Dokážeme to podobně jako u množiny všech racionálních čísel. Ke každému algebraickému číslu $a$ najdeme algebraickou rovnici $\varrho(a)$, jejímž kořenem je číslo $a$. Výškou rovnice $\varrho(a)$ pak budeme nazývat součet absolutních hodnot jejích koeficientů; tedy je-li $\varrho(a)$ rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

bude výška $v(a)$ rovnice $\varrho(a)$ rovna

$$v(a) = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

Každá algebraická rovnice má konečnou výšku a konečný počet kořenů. Vezmeme tedy nejprve nejmenší číslo, které je výškou některé rovnice $\varrho(a)$ pro některé číslo $a$, a vypíšeme reálné kořeny všech rovnic $\varrho(a)$, které mají tuto výšku; bude jich konečný počet. Pak vezmeme druhou nejmenší výšku a provedeme totéž. Takto postupujeme, až vyčerpáme všechny výšky. Dostaneme nekonečnou posloupnost, která bude obsahovat všechna reálná algebraická čísla. Některá se v ní mohou opakovat, avšak vhodným vyškrtáváním členů dostaneme posloupnost, v níž se každé reálné algebraické číslo bude vyskytovat právě jednou. Tím je dokázáno, že množina všech reálných algebraických čísel je spočetná. (Konečná být nemůže, protože obsahuje jako podmnožinu množinu všech racionálních čísel.)

**2.** Úloha se řeší matematickou indukcí. Dokážeme tvrzení: Je-li počet nevěrných žen v Městě Mudrců roven $n$, pak budou zabity $n$-tého dne. Je-li $n = 1$, pak manžel nevěrné ženy ví, že všechny ženy ostatních mužů jsou věrné. Protože se však ze sultánova fermanu dověděl, že existuje alespoň jedna nevěrná žena, pozná, že to musí být ta jeho, a zabije ji hned prvního dne. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro $n = k$, kde $k$ je nějaké přirozené číslo. Nechť počet nevěrných žen je $k + 1$. Manžel každé z nich ví o $k$ nevěrných ženách ostatních mužů. Když tedy uplyne $k$ dní, uvažuje takto: Dejme tomu, že moje žena je věrná. Pak existuje pouze $k$ nevěrných žen. Tedy podle indukčního předpokladu by měly být zabity už včera. Protože se tak nestalo, je nevěrných žen nikoliv $k$, ale $k + 1$ a patří k nim i moje žena. Nato ji zabije, což mělo být dokázáno. Z tohoto tvrzení plyne, že nevěrných žen bylo třicet.

**3.** Je-li druhý domorodec Poctivec, odpoví na průvodcovu otázku pravdivě, že je Poctivec. Je-li Lhář, zalže, že je Poctivec. Toto je tedy jediná možná odpověď na průvodcovu otázku. Průvodce ji pravdivě reprodukoval, je tedy Poctivec.

**4.** Vězeň ukáže na některý východ a zeptá se jednoho ze žalářníků: „Jak by odpověděl druhý žalářník, kdybych se ho zeptal, zda tento východ vede na svobodu?“ Předpokládejme, že východ vede na svobodu. Jestliže dotázaný žalářník je pravdomluvný, pak druhý je lhář a odpověděl by, že ne. Pravdomluvný reprodukuje správně tuto odpověď a řekne ne. Jestliže dotazovaný je lhář, pak druhý je pravdomluvný a odpověděl by ano; dotazovaný lživě tuto odpověď reprodukuje jako ne.

V obou případech z odpovědi ne vězeň pozná, že východ vede na svobodu. Analogicky z odpovědi ano by usoudil, že východ vede na popraviště.

5. Nejprve princ zjistil, která princezna sedí uprostřed. Sama o sobě tvrdila, že je Berta. Nebyla to Anežka, protože ta by nemohla lhát, že je Berta. Nebyla to Berta, protože ta by neřekla pravdivě, že je Berta. Byla to tedy Cecílie. Princezna sedící vpravo tuto princeznu označila pravdivě jako Cecílii, je tedy Anežka.

6. Odsouzenec vytáhl jednu kuličku, nikomu ji neukázal a jakoby nedopatřením ji spolkl. Pak vyzval krále, aby se podíval, která kulička v sáčku zbyla. Byla to ovšem černá kulička. Král nemohl přiznat svůj podvod, proto musel připustit, že odsouzenec vytáhl bílou kuličku.

7. Sestavíme si takovouto tabulku:

| | K | M | O | C | Š |
|---|---|---|---|---|---|
| K | — | | | | |
| M | | — | | | |
| V | | | — | | |
| C | | | | — | — |
| Š | | | | — | — |

Řádky značí rybáře, sloupce ryby. Znaménka minus značí případy, které jsou výslovně vyloučené. Zbývá údaj o tom, že štiku ulovil jmenovec ryby, kterou chytil pan Vokoun, a že tato ryba nebyla kapr. Štiku tedy neulovil pan Kapr a můžeme si do příslušného políčka napsat další minus. Neulovil ji ani pan Vokoun; nemohl být jmenovcem ryby, kterou sám chytil. Štiku tedy chytil pan Mřínek. Cejna mohl ulovit už jen pan Kapr nebo pan Vokoun. Kdyby ho chytil pan Vokoun, pak by pan Cejn chytil štiku, což není možné. Tedy cejna chytil pan Kapr. Výsledná tabulka pak vypadá takto:

| | K | M | O | C | Š |
|---|---|---|---|---|---|
| K | — | — | — | + | — |
| M | — | — | — | — | + |
| V | — | + | — | — | — |
| C | | — | | — | — |
| Š | | — | | — | — |

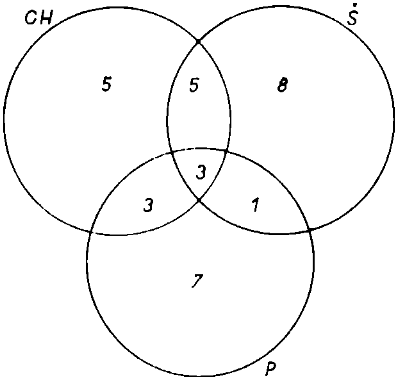
Nevíme, jaké ryby chytili pánové Cejn a Štika; v obou případech to mohl být kapr nebo okoun. Na to se však úloha neptá.

**8.** Nechť $M$ je množina předmětů, které mají vlastnost $X$, a nechť $N$ je množina předmětů, které nemají ani vlastnost $Y$, ani vlastnost $Z$. Nechť $m$ je počet prvků množiny $M$ a $n$ počet prvků množiny $N$. Z textu je patrné, že $n \geqq m$. Pokud $n > m$, nemůže být $N \subset M$. Pokud $n = m$, pak může být $N \subset M$ právě tehdy, je-li $N = M$. To však není možné, protože existují předměty, které mají vlastnost $X$ i $Y$, tedy patří do $M$ a nepatří do $N$. Tedy případ $N \subset M$ je vyloučen. Existuje tedy alespoň jeden předmět, který patří do $N$ a nepatří do $M$, tudíž nemá žádnou z vlastností $X$, $Y$, $Z$.

**9.** Sečteme nejprve počty žáků chodících do jednotlivých kroužků; dostaneme $16 + 17 + 14 = 47$. Při tomto sčítání jsme počítali dvakrát žáky, kteří chodí do dvou kroužků, a třikrát žáky, kteří chodí do tří kroužků. Odečteme tedy součet počtů žáků, kteří chodí do jednotlivých dvojic kroužků; dostaneme $47 - (8 + 6 + 4) = 29$. Žáky, kteří chodí do všech tří kroužků, jsme nyní počítali opět třikrát, tedy musíme ještě přičíst jejich počet a dostaneme $29 + 3 = 32$.

Použili jsme takzvaného principu inkluze a exkluze. Podle něho můžeme popsaným střídavým sčítáním a odčítáním postupovat v případě libovolného počtu kroužků, pokud pro každou vlastní podmnožinu množiny kroužků víme, kolik žáků navštěvuje všechny kroužky z této podmnožiny.

Úlohu můžeme také řešit pomocí takzvaného Vennova diagramu (obr. I.1). Nakreslíme si tři kruhy, které mají neprázdný průnik; každý z nich znázorňuje množinu všech žáků navštěvujících jeden kroužek (označení $CH$, $Š$, $P$). Do průniku všech tří kruhů napíšeme číslo 3, to jest počet prvků průniku všech tří množin. Do části roviny, která je společná kruhům $CH$ a $Š$, ale nepatří do $P$, napíšeme 5; je to rozdíl počtu žáků, kteří chodí do obou zmíněných kroužků, a počtu žáků, kteří navště-




Obr. I.1

vují všechny tři kroužky. Analogicky pak napíšeme čísla 3 a 1. Od počtu žáků z chemického kroužku (což je 16) odečteme součet všech čísel, která jsou napsána v kruhu $CH$; dostaneme 5 a zapíšeme toto číslo do té části kruhu $CH$, která nepatří ostatním kruhům. Analogicky do $Š$ zapíšeme 8 a do $P$ zapíšeme 7. Součet všech čísel zapsaných do obrázku je počet žáků ve třídě.