

# Posloupnosti a řady

---

## Řešení úloh označených hvězdičkou

In: Jiří Jarník (author): Posloupnosti a řady. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1979. pp. 137–138.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403941>

### Terms of use:

© Jiří Jarník, 1079

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## ŘEŠENÍ ÚLOH OZNAČENÝCH HVĚZDIČKOU

### Ke kap. 1:

1. Posloupnost  $\{a_n\}_1^\infty$  je ohraničená shora, jestliže existuje číslo  $K$  takové, že platí  $a_n \leq K$  pro všechna přirozená čísla  $n$ .
6. Například  $a_n = \frac{1}{n}$  pro  $n$  sudé,  $a_n = n$  pro  $n$  liché;  $b_n = 1$  pro všechna  $n$ .

### Ke kap. 2:

11. Je-li  $\lim a_n = -\infty$  a existuje-li kladné číslo  $b$  a přirozené číslo  $k$  takové, že pro všechna  $n \in \mathbb{N} [k]$  platí  $b_n \leq -b$ , pak  $\lim a_n b_n = +\infty$ .  
Je-li  $\lim a_n = +\infty$  ( $\lim a_n = -\infty$ ) a existuje-li takové kladné číslo  $b$  a přirozené číslo  $k$ , že pro všechna  $n \in \mathbb{N} [k]$  platí  $b_n \leq -b$  ( $b_n \geq b$ ), pak  $\lim a_n b_n = -\infty$ .
12. Například a)  $a_n = n = b_n$ ;  $\lim (a_n - b_n) = 0$ ,  
 $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$ .  
b)  $a_n = n + (-1)^n$ ,  $b_n = n$ ;  $\lim (a_n - b_n)$  neexistuje;  
 $a_n = n(2 + (-1)^n)$ ,  $b_n = n$ ;  $\lim \frac{a_n}{b_n}$  neexistuje.  
c)  $a_n = n^2$ ,  $b_n = n$ ;  $\lim (a_n - b_n) = \lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ .

### Ke kap. 3:

2. Například  $a_n = -1$ ,  $c_n = 1$ ,  $b_n = (-1)^n$ .

Je-li  $a_n \leq b_n \leq c_n$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  a řady  $\Sigma a_n$ ,

$\Sigma c_n$  mají součet, při čemž neplatí současně

$\Sigma a_n = -\infty$ ,  $\Sigma c_n = +\infty$ , má i řada  $\Sigma b_n$  součet

a platí  $\Sigma a_n \leq \Sigma b_n \leq \Sigma c_n$ .

Návod k důkazu: Rozdělte členy řady  $\Sigma b_n$  na kladné a záporné jako v důkazu věty 26 na str. 91 a použijte vzorce (29), str. 79, zobecněný na případ, kdy jedna z řad má součet  $+\infty$  nebo  $-\infty$ .

7. Nechť platí  $b_n \leq a_n \leq 0$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Jestliže řada  $\Sigma b_n$  konverguje, pak konverguje i řada  $\Sigma a_n$  a platí  $\Sigma b_n \leq \Sigma a_n$ . (Jde o zvláštní případ úlohy 2.)

### Ke kap. 4:

3. Například a)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ .

b)  $a_n = \frac{1}{n}$  pro  $n$  liché,  $a_n = -\frac{1}{n^2}$  pro  $n$  sudé.

c)  $a_n = \frac{1}{n^2}$  pro  $n$  liché,  $a_n = -\frac{1}{n}$  pro  $n$  sudé.

d)  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  ( $\Sigma a_n$  konverguje neabsolutně);

$a_n = (-1)^n$  ( $\Sigma a_n$  nemá součet).