ŘEŠENÍ ÚLOH OZNAČENÝCH HVĚZDIČKOU

Ke kap. 1:

1. Posloupnost $\{a_n\}_1^{\infty}$ je ohraničená shora, jestliže existuje číslo K takové, že platí $a_n \leq K$ pro všechna přirozená čísla n.

6. Například $a_n = \dfrac{1}{n}$ pro n sudé, $a_n = n$ pro n liché; $b_n = 1$ pro všechna n.

Ke kap. 2:

11. Je-li $\lim a_n = -\infty$ a existuje-li kladné číslo b a přirozené číslo k takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[k]$ platí $b_n \leq -b$, pak $\lim a_n b_n = +\infty$.
Je-li $\lim a_n = +\infty$ ($\lim a_n = -\infty$) a existuje-li takové kladné číslo b a přirozené číslo k, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[k]$ platí $b_n \leq -b$ ($b_n \geq b$), pak $\lim a_n b_n = -\infty$.

12. Například a) $a_n = n = b_n$; $\lim (a_n - b_n) = 0$,

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = 1\,.$$

b) $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = n$; $\lim (a_n - b_n)$ neexistuje;

$a_n = n(2 + (-1)^n)$, $b_n = n$; $\lim \dfrac{a_n}{b_n}$ neexistuje.

c) $a_n = n^2$, $b_n = n$; $\lim (a_n - b_n) = \lim \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty\,.$

Ke kap. 3:

2. Například $a_n = -1$, $c_n = 1$, $b_n = (-1)^n$.
Je-li $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a řady Σa_n, Σc_n mají součet, při čemž neplatí současně $\Sigma a_n = -\infty$, $\Sigma c_n = +\infty$, má i řada Σb_n součet a platí $\Sigma a_n \leq \Sigma b_n \leq \Sigma c_n$.

Návod k důkazu: Rozdělte členy řady Σb_n na kladné a záporné jako v důkazu věty 26 na str. 91 a použijte vzorce (29), str. 79, zobecněný na případ, kdy jedna z řad má součet $+\infty$ nebo $-\infty$.

7. Nechť platí $b_n \leq a_n \leq 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Jestliže řada Σb_n konverguje, pak konverguje i řada Σa_n a platí $\Sigma b_n \leq \Sigma a_n$. (Jde o zvláštní případ úlohy 2.)

Ke kap. 4:

3. Například a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

b) $a_n = \dfrac{1}{n}$ pro n liché, $a_n = -\dfrac{1}{n^2}$ pro n sudé.

c) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pro n liché, $a = -\dfrac{1}{n}$ pro n sudé.

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (Σa_n konverguje neabsolutně);
$a_n = (-1)^n$ (Σa_n nemá součet).