5. kapitola

POSLOUPNOSTI A ŘADY FUNKCÍ

5.1. POSLOUPNOST FUNKCÍ

Již v úvodu jsme poznamenali, že matematici nezkoumají jen posloupnosti čísel, ale i jiných objektů, jako množin, funkcí apod. Všimněme si nyní aspoň stručně pojmu „posloupnost funkcí".

Vraťme se k naší dobře známé geometrické posloupnosti: Její obecný (n-tý) člen je q^n (popř. aq^n, kde a je číslo; zůstaneme však u jednoduššího případu). Kvocient q je pevné číslo. Různou volbou kvocientu dostáváme různé geometrické posloupnosti. Jestliže naopak budeme na okamžik považovat n za pevné přirozené číslo, pak každé zvolené hodnotě kvocientu q je přiřazeno číslo q^n. Můžeme tedy považovat q za (nezávisle) proměnnou. Označíme-li ji x, jak je obvyklé, máme pro každé přirozené n funkci nabývající v čísle x hodnoty x^n. Označme tuto funkci f_n, abychom zdůraznili přítomnost parametru n. Pak $f_n(x) = x^n$. Protože každému přirozenému číslu n je přiřazena právě jedna funkce, jde o zobrazení množiny přirozených čísel do množiny všech funkcí reálné proměnné. Je tedy přirozené vyslovit definici:

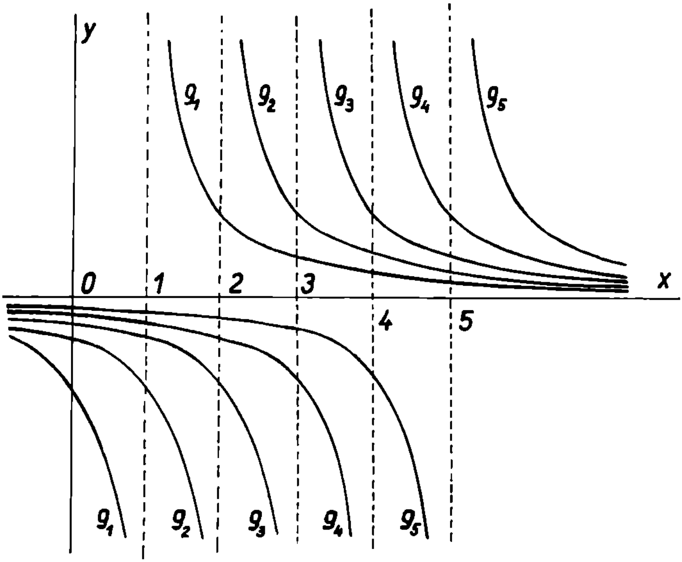
Definice 10. Zobrazení množiny přirozených čísel do množiny všech (reálných) funkcí reálné proměnné se nazývá *posloupnost funkcí*.

Posloupnosti funkcí budeme zapisovat podobně jako posloupnosti čísel, např. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = x^n$; často budeme psát stručně (a ne zcela přesně) $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ apod. Je vhodné učinit jistou dohodu o definičním oboru funkcí f_n. Protože nechceme zkoumat vlastnosti jednotlivých funkcí (při pevném n), ale posloupnosti funkcí jako celku, je rozumné se omezit na ten případ, kdy všechny funkce f_n, $n = 1, 2, \ldots$, mají tentýž definiční obor.

Příklad 40. Nechť funkce g_n, $n \in \mathbf{N}$, přiřazuje reálnému číslu x, $x \neq n$, číslo $g_n(x) = \dfrac{1}{x - n}$. Pak jejím definičním oborem je množina $\mathbf{R} - \{n\}$, tj. množina všech reálných čísel s výjimkou čísla n. Je-li $x \in \mathbf{R} - \mathbf{N}$, tj. x je reálné číslo, ale není přirozené číslo, je $g_n(x)$ definováno pro všechna $n \in \mathbf{N}$. Můžeme tedy hovořit o posloupnosti funkcí $\{g_n\}_1^{\infty}$, jejichž definičním oborem je množina $\mathbf{R} - \mathbf{N}$. Na obr. 10 jsou načrtnuty grafy několika prvních členů této posloupnosti.

Příklad 41. Definujme funkci h_n pro $n \in \mathbf{N}$ vztahem $h_n(x) = \sqrt{x - n}$. Funkce h_n je definována pro $x \geq n$ čili pro $x \in I_n = \langle\, n, +\infty)$. Avšak průnik těchto intervalů je prázdný: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \emptyset$. Nemůžeme tedy ve smyslu naší úmluvy hovořit o posloupnosti funkcí h_n.

Příklad 42. Podobná situace nastane, definujeme-li funkci k_n vztahem $k_n(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1 - n^2x^2}}$. Zde je definičním



Obr. 10

oborem funkce k_n ($n \in \mathrm{N}$) množina reálných čísel x splňujících nerovnost $0 < |x| < \dfrac{1}{n}$. Neexistuje tedy neprázdná množina, na níž by byly definovány všechny funkce k_n, $n \in \mathrm{N}$. Nemá tedy smysl hovořit o posloupnosti funkcí k_n.

Budeme tedy v dalším hovořit o posloupnosti $\{f_n\}_1^\infty$ jen tehdy, je-li průnik definičních oborů všech funkcí f_n ($n \in \mathrm{N}$) neprázdný. Tento průnik budeme považovat za definiční obor posloupnosti.

5.2. KONVERGENCE POSLOUPNOSTI FUNKCÍ

Budiž $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí, jejíž definiční obor je množina $D \subset \mathrm{R}$. Je-li pevně dáno číslo $x_0 \in D$, tvoří hodnoty $f_n(x_0)$ číselnou posloupnost. Na tuto posloupnost se vztahují všechny úvahy z prvních dvou kapitol této knížky. Můžeme tedy hovořit také o konvergenci a limitě této posloupnosti. Jestliže pro nějaké $x_0 \in D$ posloupnost $\{f_n(x_0)\}_1^\infty$ konverguje, znamená to, že číslu x_0 odpovídá číslo y_0, dané vztahem

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)\,.$$

Hodnota limity, tj. číslo y_0, závisí ovšem na zvoleném čísle x_0. Zvolíme-li jiné číslo $x \in D$, dostaneme obecně jiné číslo y, pro něž platí $y = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Může se ovšem stát, že limita vpravo neexistuje — a to buď pro vůbec žádné $x \in D$, nebo pro některá $x \in D$. Nás samozřejmě zajímá hlavně ten případ, kdy číslo $y = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existuje aspoň pro některá $x \in D$, řekněme pro všechna $x \in D_0$, kde $\emptyset \neq D_0 \subset D$. Pak totiž můžeme definovat funkci f s definičním oborem D_0 vztahem

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{50}$$

pro $x \in D_0$. Je přirozené nazvat tuto funkci f limitou posloupnosti funkcí f_n na množině D_0.

Vyslovme nyní přesnou definici.

Definice 11. Nechť funkce f_n, $n \in \mathrm{N}$, jsou definovány na množině D. Buď $x \in D$ a nechť existuje limita (číselné) posloupnosti $\{f_n(x)\}_1^\infty$, kterou označíme $f(x)$, takže platí

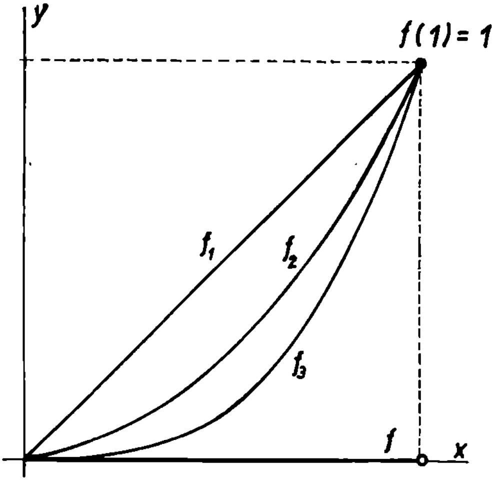
(50). Pak říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ *konverguje v bodě x k číslu $f(x)$* (*má v bodě x limitu $f(x)$*). Buď dále $\emptyset \neq D_0 \subset D$ a nechť pro každé $x \in D_0$ posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje v bodě x k číslu $f(x)$. Definujme funkci f na množině D_0 vztahem (50). Pak říkáme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje na množině D_0 k funkci f. Funkci f nazýváme *limitou posloupnosti* $\{f_n\}_1^\infty$ nebo její *limitní funkcí* a píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$.

Příklad 43. Všimněme si ještě jednou posloupnosti funkcí f_n definovaných vztahem $f_n(x) = x^n$ pro všechna reálná x. Z vlastností geometrické posloupnosti plyne, že pro x splňující nerovnosti $-1 < x < 1$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, pro $x = 1$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 1$; pro $x \leq -1$ nebo $x > 1$ limita $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ neexistuje. (Pro $x > 1$ existuje ovšem nevlastní limita. V definici 11 jsme však případ nevlastní limity nezahrnuli, neboť bychom museli za hodnoty limitní funkce připustit nejen reálná čísla, ale také $+\infty$ a $-\infty$). Je tedy $D_0 = (-1,1\rangle$ a podle definice 11 dostáváme tento výsledek: Posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$, $f_n(x) = x^n$, konverguje na intervalu $(-1,1\rangle$ k funkci f,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-1,1)\,, \\ 1 & \text{pro } x = 1\,. \end{cases}$$

(Viz obr. 11. Doplňte si sami grafy funkcí f_n, f na intervalu $(-1,0)$.

Příklad 44. Zkoumejme posloupnost funkcí $\{g_n\}_1^\infty$ z příkladu 40. Buď x pevně zvolené reálné číslo, $x \notin \mathrm{N}$. Pak pro velká přirozená čísla n bude jmenovatel zlomku



Obr. 11

$g_n(x) = \dfrac{1}{x - n}$ v absolutní hodnotě velmi velký; dá se očekávat, že platí

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0 \,. \tag{51}$$

Dokažme to! Nechť ε je kladné číslo. Pak platí (při pevném x)

$$\left|\frac{1}{x - n}\right| < \varepsilon \tag{52}$$

právě tehdy, je-li $n < x - \dfrac{1}{\varepsilon}$ nebo $n > x + \dfrac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy najít takové přirozené číslo n_0, že $n_0 > x + \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Potom pro každé $n \in \mathbf{N}\ [n_0]$ platí nerovnost (52) a vztah (51) je dokázán. Limitou posloupnosti funkcí g_n na množině $D = \mathbf{R} - \mathbf{N}$ je tedy konstantní funkce, identicky rovná nule. To zapisujeme takto:

$$\lim_{n \to \infty} g_n = 0 .$$

V příkladu 44 bychom mohli považovat vztah (51) za platný pro všechna reálná čísla (včetně přirozených čísel, která jsme zatím vyloučili). Stačí si připomenout úmluvu z kap. 1, str. 13. Je-li totiž p přirozené číslo, je hodnota $g_n(p)$ definována pro všechna $n \in \mathbf{N}$ s výjimkou $n = p$. Můžeme tedy ve smyslu citované úmluvy hovořit o limitě číselné posloupnosti $g_n(p)$, i když p-tý člen této posloupnosti není určen. Důkaz vztahu (51) platí i pro $x = p$, pokud pro n_0 přidáme dodatečnou (a snadno splnitelnou) podmínku $n_0 > p$.

Na našem příkladu je zajímavé — a snad pro čtenáře i trochu překvapující — že limitou posloupnosti funkcí g_n je nula (přesněji funkce identicky rovná nule), ačkoliv každá funkce g_n nabývá libovolně velkých hodnot (není ohraničená).

Příklad 45. Funkce f_n je pro $x \geq -1$ definována vztahem $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n}$. Vyšetříme konvergenci posloupnosti $\{f_n\}_1^\infty$. Především je $f_n(-1) = 0$ pro n liché, $f_n(-1) = \sqrt[n]{2}$ pro n sudé. Protože $\sqrt[n]{2} > 1$ pro všechna přirozená n, je zřejmé, že posloupnost $\{f_n(-1)\}_1^\infty$ nemá limitu. Je-li $|x| < 1$, pak ovšem $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, tedy podle věty 6 $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x^n) = 1$. Protože pro každé kladné číslo a platí $|1 - \sqrt[n]{a}| \leq |1 - a|$, je zřejmě také

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n} = 1 . \tag{53}$$

Vztah (53) platí zřejmě i pro $x = 1$. Pro $x > 1$ platí $x^n \to +\infty$, takže se dá očekávat, že hlavní roli bude hrát právě sčítanec obsahující x, zatímco jednička bude „zanedbatelná". Skutečně, platí (pro $x > 1$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n} = x . \tag{54}$$

Dokažme vztah (54). Zřejmě je $x = \sqrt[n]{x^n} < \sqrt[n]{1 + x^n}$. Předpokládejme, že (54) neplatí. Pak existuje takové kladné číslo α, že pro nekonečně mnoho přirozených čísel n platí

$$\sqrt[n]{1 + x^n} \geq x + \alpha$$

čili

$$1 + x^n \geq (x + \alpha)^n ,$$

což je totéž jako

$$1 \geq n\alpha x^{n-1} + \binom{n}{2} \alpha^2 x^{n-2} + \ldots + \alpha^n .$$

Avšak platí-li tato nerovnost, platí tím spíše

$$1 \geq n\alpha x^{n-1}$$

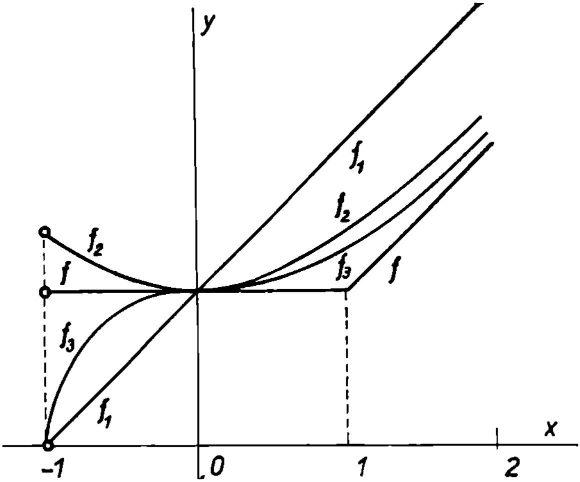
pro nekonečně mnoho přirozených čísel n. To je však zřejmý spor, neboť při $\alpha > 0$, $x > 1$ platí

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha x^{n-1} = +\infty .$$

Posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje na množině $D_0 = (-1, +\infty)$ k funkci f, definované vztahem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 < x \leq 1\,, \\ x & \text{pro } x > 1\,. \end{cases}$$

Na obr. 12 jsou znázorněny graficky funkce f_1, f_2, f_3 a f.



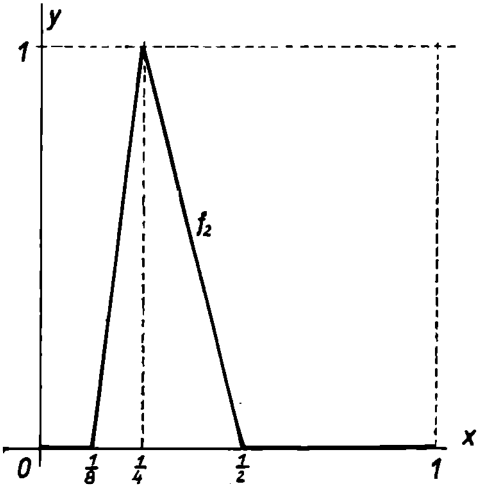
Obr. 12

Příklad 46. Pro $n \in \mathrm{N}$ a $x \in \langle 0,1 \rangle$ definujme funkci f_n vztahy

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x - 1 \text{ pro } \dfrac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \dfrac{1}{2^n}\,, \\[2ex] -2^n x + 2 \text{ pro } \dfrac{1}{2^n} < x \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}\,, \\[2ex] 0 \qquad\qquad \text{pro } x < \dfrac{1}{2^{n+1}} \text{ nebo } x > \dfrac{1}{2^{n-1}}\,. \end{cases}$$

Na obr. 13 je graf funkce f_2. Posloupnost takto definovaných funkcí konverguje k nule (tj. k funkci f, $f(x) = 0$) na množině $\langle 0,1 \rangle$. Důkaz tohoto tvrzení je velmi jednoduchý. Pro $x = 0$ tento vztah jistě platí, neboť $f_n(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Budiž tedy $0 < x \leq 1$ a zvolme $\varepsilon > 0$. Pak jistě existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ takové, že platí

$$\frac{1}{2^{n_0-1}} < x .$$



Obr. 13

(Najděte takové n_0 třeba pro $x = 0{,}3$!) To však podle definice funkcí f_n znamená

$$f_{n_0}(x) = 0$$

a ovšem také $f_n(x) = 0$ pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$. Platí tedy pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = 0 < \varepsilon\,.$$

Protože kladné číslo ε můžeme zvolit libovolně, platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \tag{55}$$

na množině $\langle 0,1\rangle$.

V tomto příkladu je zajímavé to, že platí (55), ačkoliv kterákoliv funkce f_n nabývá v jistém bodě intervalu $\langle 0,1\rangle$ hodnoty rovné jedné. Přesně řečeno, platí $f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1$. Tedy ačkoliv platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ a současně je $f(0) = 0$, kde f je limitní funkce posloupnosti f_n, neplatí

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0\,. \tag{56}$$

Tato skutečnost je paradoxní jen na první pohled. Uvědomte si, že v naší definici zkoumáme limitu posloupnosti čísel $f_n(x)$ při pevném x, zatímco argument $\frac{1}{2^n}$ ve vztahu (56) závisí na n.

Příklad 47. Zjistěme, zda konverguje posloupnost funkcí

$$\{g_n\}_1^\infty,\ g_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}\,.$$

Za definiční obor této posloupnosti můžeme vzít množinu reálných čísel x splňujících nerovnost $x \neq -1$. Je-li $|x| < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + x^n} = 0$ podle věty 6, neboť v tom případě $x^n \to 0$. Dále je $g_n(1) = \frac{1}{2}$ pro všechna

$n \in \mathrm{N}$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(1) = \frac{1}{2}$. Napíšeme-li konečně pro $|x| > 1$ funkci g_n ve tvaru $g_n(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x^n} + 1}$, dostáváme snadno $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 1$. Daná posloupnost konverguje tedy k funkci g,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1\,, \\ \dfrac{1}{2} & x = 1\,, \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$$

a to v celém definičním oboru, tj. pro $x \neq -1$.

5.3. ŘADY FUNKCÍ

Definice 8 a 11 nám umožňují zavést také pojem řady funkcí a jejího součtu.

Definice 12. Nechť $\{f_n\}_1^\infty$ je posloupnost funkcí, jejichž definiční obor je množina D. Pak symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ nazýváme *řadou funkcí*, f_n jsou její *členy*, funkce $S_k = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n$ jsou její *částečné součty*. (Hodnota funkce S_k pro $x \in D$ je ovšem $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$.) Jestliže posloupnost funkcí $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ konverguje na množině $D_0 \subset D$ k funkci S, tj.

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k \tag{57}$$

na množině D_0, říkáme, že *funkce* S *je na množině* D_0 *součtem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nebo že *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje na množině* D_0 *k funkci* S.

Poznámka. V definici 8 jsme rozeznávali případ, kdy řada má součet, a případ konvergentní řady. V této kapitole hovoříme jen o konvergenci řady funkcí, protože jinak by součtem řady funkcí nemusela být reálná funkce, ale funkce, nabývající také hodnot $+\infty$ a $-\infty$ a jejich zavedení by naše úvahy zkomplikovalo. To ovšem neznamená, že by se matematici takovými funkcemi vůbec nezabývali.

Příklad 48. Vyjdeme opět z geometrické posloupnosti. Členy geometrické posloupnosti $\{x^n\}_1^\infty$, kde x je kvocient, jsou členy geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. O této řadě víme, že konverguje k číslu $\dfrac{x}{1-x}$, pokud $|x| < 1$. Považujeme-li opět x za proměnnou, dostáváme řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$, kde $g_n(x) = x^n$, která na intervalu $(-1,1)$ konverguje k funkci G, $G(x) = \dfrac{x}{1-x}$. Použijeme-li úmluvy z odst. 3.2 (str. 71), dostaneme obdobně, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$, kde opět platí $g_n(x) = x^n$, konverguje na intervalu $(-1,1)$ k funkci G_0, $G_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Můžeme tedy psát

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \tag{58}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{59}$$

Příklad 49. Položme $f_n(x) = n^{-x}$. Pak příklad 37 nám umožňuje vyslovit toto tvrzení: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na intervalu $(1, +\infty)$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n$, kde $\tilde{f}_n(x) = (-1)^n f_n(x)$, konverguje na intervalu $(0, +\infty)$.

Řada funkcí z příkl. 48 je nejjednodušším příkladem tzv. *mocninné řady*. Nechť $\{a_n\}_1^{\infty}$ je číselná posloupnost. Pak řadu funkcí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{60}$$

nazýváme mocninnou řadou s koeficienty a_n. Při daných koeficientech a_n závisí konvergence mocninné řady samozřejmě na hodnotě proměnné x. Dá se dokázat, že může nastat právě jeden ze tří případů:

(a) řada (60) konverguje jen pro $x = 0$ (a její součet v tomto bodě je ovšem roven „absolutnímu členu" a_0);

(b) řada (60) konverguje pro všechna reálná x;

(c) existuje takové kladné reálné číslo ϱ, že řada (60) konverguje na intervalu $(-\varrho, \varrho)$, ale nekonverguje v žádném bodě ξ takovém, že $|\xi| > \varrho$.

Číslo ϱ v případě (c) se nazývá *poloměr konvergence mocninné řady*. Co se týče konvergence mocninné řady v bodech $x = -\varrho$ a $x = \varrho$, je třeba ji vyšetřit v každém případě zvlášť.

Skutečnost, že pro každou mocninnou řadu, která nesplňuje (a) ani (b), existuje číslo ϱ, jež je jejím poloměrem konvergence, plyne z následující věty:

Věta 34. *Nechť mocninná řada* (60) *konverguje v bodě* $x_0 \neq 0$. *Pak tato řada konverguje v každém bodě* x, *pro nějž platí* $|x| < |x_0|$, *tj. na intervalu* $(-|x_0|, |x_0|)$.

Důkaz. Jestliže řada (60) konverguje v bodě x_0, znamená to, že členy číselné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ tvoří ohraničenou posloupnost (dokonce platí $a_n x_0^n \to 0$). Existuje tedy takové reálné číslo c, že $|a_n x_0^n| \leq c$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Je-li $|x| < |x_0|$, je

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < c\gamma^n ,$$

kde $0 \leq \gamma < 1$.

Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ tedy konverguje v bodě x podle věty 20 (odst. 3.4). Řada (60) v bodě x konverguje absolutně (viz Definice 9) a tedy konverguje podle věty 26.

Z důkazu věty 34 je vidět, že pro čísla x, jejichž absolutní hodnota je menší než poloměr konvergence řady (60), konverguje tato řada dokonce absolutně. Neabsolutní konvergence může tedy nastat jen pro ta x, jejichž absolutní hodnota se rovná poloměru konvergence řady.

Konvergenci některých mocninných řad jsme již vlastně vyšetřili v odst. 3.4, i když jsme přitom nehovořili o řadách funkcí. Tak z příkladu 32 plyne, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro všechna reálná x. Stejný výsledek platí i pro řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ z příkladu 30. Z příkladu 33 dostáváme, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ má poloměr konvergence $\varrho = 1$. Jako příklad mocninné řady, pro niž platí případ (a), uveďme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$. Kdyby tato řada konvergovala v bodě $x \neq 0$, bylo by to zřejmě ve sporu s podílovým kritériem (věta 22; srov. úlohu 5, kap. 3).

Mocninné řady můžeme považovat za jisté zobecnění mnohočlenů. Protože mnoho „rozumných" funkcí se dá přibližně vyjádřit mnohočleny, přičemž přesnost tohoto vyjádření je tím větší, čím vyšší je stupeň mnohočlenu (samozřejmě při optimální volbě jeho koeficientů), dá se očekávat, že danou funkci je možno (za jistých předpokladů o jejím chování) vyjádřit ve tvaru mocninné řady tak, jako geometrická řada v příkladu 48 vyjadřuje funkce $\frac{x}{1-x}$, $\frac{1}{1-x}$ (viz (58), (59)). Tyto otázky zkoumali matematici již od doby Newtonovy a Leibnizovy. V r. 1715 dosáhl základního výsledku B. Taylor, který ukázal metodu, jíž lze dané funkci přiřadit mocninnou řadu. Teprve Cauchy však dal okolo r. 1820 Taylorovým úvahám pevný základ. Dnes je teorie mocninných řad důležitou součástí matematické analýzy, zejména *teorie funkcí komplexní proměnné.*

Vedle mocninných řad jsou důležitým typem řad tzv. *trigonometrické řady*, tj. řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

které jsou užitečné zvlášť při studiu periodických funkcí. Podle jejich objevitele se jim říká obyčejně *Fourierovy řady*. Podrobnější výklad jejich vlastností a použití by však vyžadoval, stejně jako v případě mocninných řad, hlubší předběžné znalosti matematické analýzy.

5.4. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

V příkladech odstavce 5.2 jsme upozornili na to, že konvergence posloupnosti funkcí má některé rysy, které jsou trochu neočekávané a nepříjemné. Na příkladu 46 jsme viděli, že může platit $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ na nějakém intervalu, ačkoliv každá funkce f_n nabývá hodnot velmi odlišných od nuly. V příkladu 44 dokonce členy posloupnosti byly neohraničené funkce, a přesto posloupnost funkcí konvergovala k nule. Druhým takovým rysem byla skutečnost, že limita posloupnosti spojitých funkcí nemusí být funkce spojitá. Pojem spojitosti jsme sice přesně nedefinovali, ale jeho názorný smysl je jasný z grafu: graf spojité funkce je spojitá „nepřetržitá" křivka, zatímco graf nespojité funkce může mít „skoky". (Srov. příkl. 43, 47). Tyto nedostatky odstraňuje pojem stejnoměrné konvergence, který si nyní objasníme.

Definice 13. Nechť $\{f_n\}_1^\infty$ je posloupnost funkcí s definičním oborem D. Říkáme, že posloupnost $\{f_n\}_1^\infty$ *konverguje stejnoměrně na množině* $D_0 \subset D$ *k funkci* f, jestliže platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové $n_0 \in \mathrm{N}$, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ a všechna $x \in D_0$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \,. \tag{61}$$

Porovnáme-li tuto definici s definicí 11, vidíme ihned, že posloupnost funkcí, která konverguje stejnoměrně na množině D_0 k funkci f, konverguje k téže funkci na množině D_0 ve smyslu definice 11. (Konvergence ve smyslu definice 11 se na rozdíl od stejnoměrné konvergence nazývá často bodovou konvergencí.) Obrácené tvrzení však neplatí. V definici stejnoměrné konvergence musíme najít takové číslo n_0, aby platilo (61) nezávisle na tom, které číslo x z množiny D_0 zvolíme. Naproti tomu v definici 11 jsme nejdříve pevně zvolili číslo $x \in D_0$ a k němu pak našli číslo n_0. Stačí se podívat na příklad 44 nebo 46, abychom viděli, že číslo n_0 skutečně záviselo na tom, pro které $x \in D_0$ jsme je hledali. Není těžké dokázat následující větu, z níž ihned plyne, že posloupnosti z příkladu 44 a 46 nekonvergují k nule stejnoměrně (na svém definičním oboru, tj. na množině $\mathbf{R}$ resp. na intervalu $\langle 0,1\rangle$).

Věta 35. *Posloupnost funkcí $\{f_n\}_1^\infty$ konverguje stejnoměrně k nule (tj. k funkci f, $f(x) = 0$) na množině D právě tehdy, když existuje přirozené číslo p a číselná posloupnost $\{c_n\}_1^\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, pro kterou platí*

$$|f_n(x)| \leq c_n \tag{62}$$

pro všechna $x \in D$ a všechna $n \geq p$.

Důkaz. Existuje-li taková posloupnost $\{c_n\}_1^\infty$ a je-li $\varepsilon > 0$, pak existuje takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že $|c_n| < \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbf{N}\,[n_0]$ a tedy podle (62) také

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon$$

pro všechna $x \in D$ a pro $n \in \mathbf{N}[\max\,(n_0, p)]$, což dokazuje stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí f_n na množině D k nule.

Předpokládejme nyní, že $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ stejnoměrně na množině D. Ke kladnému číslu $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbf{N}$) existuje tedy $n_k \in \mathbf{N}$ takové, že platí

$$|f_n(x)| < \frac{1}{k} \tag{63}$$

pro všechna $x \in D$ a všechna $n \in \mathbf{N}$ $[n_k]$. Přitom čísla n_k můžeme navíc volit tak, aby tvořila rostoucí posloupnost přirozených čísel, takže

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty\,. \tag{64}$$

Nyní stačí položit $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n_1-1} = 1$, $c_n = \frac{1}{k}$ pro $n = n_k, \ldots, n_{k+1} - 1$ a $p = n_1$. Ze vztahu (64) plyne, že čísla c_n jsou definována pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ a nerovnost (63) není nic jiného než (62). Věta je dokázána. Poznamenejme ještě pro čtenáře, kteří se již seznámili s pojmem suprema, že ve větě můžeme položit $c_n = \sup_{x\in D} |f_n(x)|$.

Příklad 50. Buď $\varphi_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$. Je-li $|x| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, je $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Je-li $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, je $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{|x|}{nx^2} = \dfrac{1}{n|x|} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Položíme-li $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, jsou splněny předpoklady věty 35 a tedy posloupnost $\{\varphi_n\}_1^\infty$ konverguje k nule stejnoměrně na množině $\mathbf{R}$ všech reálných čísel.

Poznamenejme, že stejnoměrnou konvergenci musíme vyšetřovat vždy v souvislosti s danou množinou (označenou D_0 v definici 13). Se změnou množiny D_0 se může změnit bodová konvergence posloupnosti ve stejnoměrnou nebo naopak. Z věty 35 je např. jasné, že posloupnost n-tých mocnin (viz příkl. 43) nekonverguje k nule stejnoměrně na intervalu $(0,1)$, neboť jakákoliv čísla c_n splňující (62) musí splňovat $|c_n| \geq 1$ a tedy nemohou konvergovat k nule. Zmenšíme-li však interval $(0,1)$ na interval $(0,a\rangle$, kde $a < 1$, stane se konvergence funkcí f_n, $f_n(x) = x^n$ k nule stejnoměrnou na této menší množině (stačí volit $c_n = a^n$).

Protože součet řady funkcí byl definován jako limita posloupnosti číselných součtů (viz definice 12), můžeme hovořit také o stejnoměrné konvergenci řady funkcí. Z definicí 12 a 13 dostaneme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \tag{65}$$

(kde f_n jsou funkce, definované na množině D) konverguje stejnoměrně na množině $D_0 \subset D$ k funkci f, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ takové, že pro všechna $k \in \mathrm{N}\,[n_0]$ a všechna $x \in D_0$ platí

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| < \varepsilon\,; \tag{66}$$

tuto nerovnost zapisujeme často ve tvaru

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon\,. \tag{67}$$

Příklad 51. Při zkoumání stejnoměrné konvergence řad používáme často větu 20. Vyšetříme tímto způsobem stejnoměrnou konvergenci řady (65), kde $f_n(x) = \dfrac{1}{n\sqrt{x^2+n}}$, tj. řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{x^2+n}} . \tag{68}$$

Pro všechna přirozená čísla n a reálná čísla x platí

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{x^2+n}} \leq n^{-3/2} .$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ konverguje (srov. příkl. 37) a její členy nezávisí na x. Říkáme jí majorantní řada k řadě (68), protože její členy splňují nerovnost $|f_n(x)| < n^{-3/2}$. Z věty 20 plyne, že řada (68) konverguje pro každé reálné číslo x. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje takové $n_0 \in \mathrm{N}$, že pro všechna $k \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-3/2} \right| < \varepsilon$$

(používáme obdobného zápisu jako ve vztahu (67)). Potom však také platí pro všechna reálná x a $k \in \mathrm{N}[n_0]$

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{x^2+n}} \right| < \varepsilon ,$$

čímž je dokázána stejnoměrná konvergence řady (68) na množině reálných čísel.

Stejného způsobu můžeme užít i pro řady, jejichž členy mění znaménko, pokud tyto řady konvergují absolutně.

Příklad 52. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{2n^2 - \sin nx}$ konverguje stejnoměrně na množině reálných čísel, neboť platí

$$\left| \frac{\cos nx}{2n^2 - \sin nx} \right| \leq \frac{1}{2n^2 - 1}$$

a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 - 1}$$

konverguje. (Proveďte celou úvahu podrobně!)

Příklad 53. Je-li $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(x^2 + \sqrt{n})}$, pak obdobným postupem jako v předchozích případech dostaneme nerovnost $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n}$, která nám však není nic platná, protože harmonická řada nekonverguje. Přesto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}(x^2 + \sqrt{n})}$ konverguje stejnoměrně na celé množině reálných čísel. Platí totiž

$$\left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(x^2 + \sqrt{n})} \right| \leq \frac{1}{k+1} + \sum_{n=[\frac{k}{2}+1]}^{\infty} \frac{1}{n(n+1} \qquad (69)$$

a protože výraz na pravé straně konverguje k nule při $k \to \infty$, můžeme již postupovat obdobně jako v předchozích příkladech. Důkaz nerovnosti (69) je založen na větě 31 a je poměrně pracný.

Důležitou otázkou je otázka stejnoměrné konvergence mocninných řad. Z důkazu věty 34 snadno plyne následující věta:

Věta 36. *Nechť mocninná řada* (60) *má poloměr konvergence* $\varrho > 0$. *Nechť* s *je reálné číslo,* $0 < s < \varrho$. *Pak řada* (60) *konverguje stejnoměrně na intervalu* $\langle -s, s \rangle$.

Pokud řada (60) *konverguje pro všechna reálná čísla, pak konverguje stejnoměrně na libovolném ohraničeném intervalu.*

Důkaz. Dokažme jen první část tvrzení — druhou přenecháme čtenáři. Pro všechna $x \in \langle -s, s \rangle$ platí $|x| \leq s$, tedy $|a_n x^n| \leq |a_n s^n|$. Z důkazu věty 34 víme, že řada (60) konverguje absolutně v každém bodě x, $|x| \leq s$, takže zbytek důkazu můžeme provést obdobně jako v příkladu 51.