Posloupnosti a řady

---

4. kapitola. Absolutní a neabsolutní konvergence

In: Jiří Jarník (author): Posloupnosti a řady. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1979. pp. 90–113.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403939

4. kapitola

ABSOLUTNÍ A NEABSOLUTNÍ KONVERGENCE

4.1. ÚVOD A DEFINICE

V minulé kapitole jsme odvodili několik kritérií (postačujících podmínek) konvergence řad. Přitom šlo ve všech případech o řady s nezápornými členy. V podstatě stejných kritérií můžeme použít na řady s nekladnými či zápornými členy (srov. úlohu 7, kap. 3). Jak však postupovat tehdy, jestliže se znaménka členů řady střídají, ať již pravidelně nebo nepravidelně?

Je-li jen konečný počet členů řady záporný, můžeme opět použít výsledků předešlé kapitoly, neboť změnou konečného počtu členů se vlastnosti řady, týkající se konvergence, nezmění. (Srov. větu 15. Hodnota součtu konvergentní řady se ovšem v takovém případě změnit může.) Některé věty (srov. věty 21, 23) jsme již formulovali tak, že jejich předpoklady požadovaly splnění nerovnosti $a_n \geq 0$ či $a_n > 0$ teprve od nějakého přirozeného čísla k. Podobně můžeme postupovat, je-li jen konečný počet členů řady kladný.

Má-li však daná řada nekonečně mnoho členů kladných i nekonečně mnoho členů záporných, pak nám dosavadní rady nejsou nic platné. Ale co kdybychom prostě všechny záporné členy nahradili jejich absolutními hodnotami? Dostali bychom řadu s nezápornými členy, jejíž vlastnosti by snad mohly nějak souviset s vlastnostmi původní řady. Ukážeme, že často tomu tak skutečně je.

Abychom zpřesnili naši úvahu, zavedeme nový pojem:

Definice 9. Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nekonverguje, říkáme také, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje neabsolutně.**)

Především je jasné, že každá konvergentní řada s nezápornými členy konverguje absolutně. Dále definice přímo říká, že neabsolutně konvergentní řada je konvergentní. Obdobné tvrzení pro *absolutně* konvergentní řadu však již vyžaduje jistou pozornost, neboť definice je výslovně neobsahuje. Vše je však v pořádku, neboť platí následující věta:

Věta 26. *Absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Důkaz. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Položme

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{je-li } a_n \geq 0, \\ 0 & \text{je-li } a_n < 0, \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{je-li } a_n \geq 0, \\ -a_n & \text{je-li } a_n < 0. \end{cases}$$

*) Používáme ovšem i názvů *(ne)absolutní konvergence*, *(ne)absolutně konvergentní řada* apod. ve zřejmém významu.

Pak platí $0 \leq b_n \leq |a_n|$, $0 \leq c_n \leq |a_n|$ pro všechna přirozená čísla n a podle věty 20 obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergují. Podle věty 18 konverguje tedy i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n)$, ale to není nic jiného než řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, neboť pro všechna přirozená čísla n platí $a_n = b_n - c_n$ (přesvědčte se!). Tím jsme dokázali větu 26 a navíc rovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n ,$$

která rovněž plyne z věty 18.

Poznámka. Větu 26 jsme mohli dokázat snad ještě stručněji pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky (věta 7) a trojúhelníkové nerovnosti. Srov. úlohu 8, kap. 3.

Věta 26 ukazuje, že při vyšetřování dané řady můžeme místo ní zkoumat „řadu absolutních hodnot", což je jistě řada s nezápornými členy. Zjistíme-li její konvergenci (pomocí některého z kritérií odst. 3.4), máme zaručenu i konvergenci původní řady.

Nyní je načase ukázat, že definice 9 není zbytečná. Jinými slovy, ukážeme, že existují neabsolutně konvergentní řady.

Příklad 34. Ukážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{33}$$

konverguje. Vyjádříme zvlášť sudé a zvlášť liché částečné součty s_n této řady:

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)},$$

$$s_{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} + \frac{1}{2n}.$$

Protože zřejmě platí $0 \leq \frac{1}{2k(2k-1)} \leq \frac{1}{k^2}$ pro všechna přirozená čísla k, je řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)}$ konvergentní podle věty 20. Označíme-li její součet s, platí

$$s = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} \quad (34)$$

podle věty 6. (Od tohoto místa již důkaz nezávisí na konkrétním tvaru řady (33), ale jen na tom, že platí (34). To použijeme za chvíli v důkazu věty 27.)

Buď nyní $\varepsilon > 0$. Vzhledem ke (34) existují taková přirozená čísla n_1, n_2, že platí

$$|s_{2n} - s| < \varepsilon$$

pro všechna n taková, že $2n \in \mathrm{N}\,[n_1]$,

$$|s_{2n-1} - s| < \varepsilon$$

pro všechna n taková, že $2n - 1 \in \mathrm{N}\,[n_2]$.

Označme $n_0 = \max(n_1, n_2)$ a zvolme přirozené číslo m takové, že $m \in \mathrm{N}\,[n_0]$. Pak je buď m sudé, tedy $m = 2n \in \mathrm{N}\,[n_0] \subset \mathrm{N}\,[n_1]$, nebo je m liché, tedy $m = 2n - 1 \in \mathrm{N}\,[n_0] \subset \mathrm{N}\,[n_2]$. V obou případech dostáváme

$$|s_m - s| < \varepsilon .$$

Dokázali jsme, že řada (33) konverguje. Protože řada absolutních hodnot, příslušná k řadě (33), je harmonická řada, která nekonverguje (srov. příkl. 27), je řada (33) příkladem neabsolutně konvergentní řady.

4.2. ŘADY, JEJICHŽ ČLENY NEBO ABSOLUTNÍ HODNOTY JEJICH ČLENŮ KONVERGUJÍ MONOTÓNNĚ K NULE

Řady podobného typu, jaký jsme právě zkoumali v příkladu 34, jsou nejčastějším případem řad, jejichž členy mají různá znaménka. Jsou to řady tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ nebo $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, kde $a_n \geq 0$ (příp. $a_n > 0$) pro všechna přirozená čísla n. Říkáme jim *alternující řady*. Jestliže posloupnost $\{a_n\}_1^{\infty}$ je navíc monotónní (což v příkl. 34 bylo), platí velmi jednoduché kritérium konvergence, které je dokonce i nutnou podmínkou:

Věta 27. *Je-li* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pro všechna přirozená čísla* n, *pak řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{35}$$

konverguje právě tehdy, je-li

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 . \tag{36}$$

Důkaz. Jestliže řada (35) konverguje, musí ovšem platit (36) podle věty 17 a úlohy 3. ke kap 2.

Nechť tedy platí (36). Obdobně jako v příkladu 34 dostaneme pro částečné součty s_n řady (35) rovnost

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \tag{37}$$

pro všechna přirozená čísla n. Protože můžeme psát

$$s_{2n} = s_{2n+2} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n+2} =$$
$$= a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1}) - a_{2n+2} \leq a_1 ,$$

je posloupnost $\{s_{2n}\}_1^\infty$ monotónní ohraničená posloupnost a tedy má podle věty 8 limitu, kterou označíme s. Podle (36), (37) a věty 6 platí tedy rovnost obdobná rovnosti (34) z příkladu 34:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s .$$

Odtud již úplně stejně jako v příkladu 34 odvodíme, že řada (35) konverguje.

Ukážeme na příkladu, že předpoklad monotonie ve větě 27 je podstatný.

Příklad 35. Pro všechna přirozená čísla n položme

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}, \quad a_{2n} = \frac{1}{(2n)^2} . \tag{38}$$

Pak platí

$$a_{2n-1} - a_{2n} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n^2} = \frac{4n^2 - 2n + 1}{4n^2(2n-1)} >$$
$$> \frac{4n^2 - 4n + 1}{4n^2(2n-1)} = \frac{(2n-1)^2}{4n^2(2n-1)} =$$
$$= \frac{2n-1}{4n^2} \geq \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$$

pro všechna přirozená n, takže pro sudé částečné součty s_{2n} alternující řady (35) máme odhad

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} - a_{2k}) > \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

Protože podle příkladu 27 harmonická řada nekonverguje, je posloupnost jejích částečných součtů neohraničená, tedy je neohraničená i posloupnost $\{s_{2n}\}$ a řada (35), jejíž členy jsou dány vzorci (38), nekonverguje.

Výsledek příkladu 35 není ovšem ve sporu s větou 27. Snadno se přesvědčíte, že sice platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ale $\{a_n\}_1^\infty$ není monotónní posloupnost. Podstatné bylo to, že záporné (tj. sudé) členy řady byly v absolutní hodnotě příliš malé proti kladným členům.

Příklad 36. Je-li $c > 0$, pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^c} \tag{39}$$

konverguje podle věty 27, neboť potom je $n^c < (n+1)^c$ čili $n^{-c} > (n+1)^{-c}$. Výsledky příkl. 27 a 29 nám umožňují vyslovit podrobnější výsledek: pro $0 < c \leq 1$ konverguje řada (39) neabsolutně, pro $c \geq 2$ konverguje absolutně.

Studium řad typu (39) a (32) uzavřeme v příkladu 37. K tomu cíli odvodíme ještě jedno užitečné kritérium konvergence, nazývané Raabeovo. I když se týká řad s nezápornými členy, má s předchozí větou společný předpoklad, že členy řady konvergují k nule monotónně.

Věta 28. (**Raabeovo kritérium.**) *Platí-li*

$$a_n \geq a_{n+1} \geq 0 \tag{40}$$

pro všechna přirozená čísla n, pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \,. \tag{41}$$

Důkaz. Označme částečné součty řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, (41) po řadě s_n, t_n. Pak z nerovnosti (40) snadno dostaneme

$$s_{2^n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n} \geq a_1 + a_2 + a_4 + a_4 + \\ + \ldots + \underbrace{a_{2^n} + \ldots + a_{2^n}}_{2^{n-1}\text{-krát}} = a_1 + a_2 + 2a_4 + \\ + \ldots + 2^{n-1}a_{2^n} = a_1 + \frac{1}{2}\, t_n \,,$$

$$s_{2^n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^n} \leq a_1 + a_2 + a_2 + \\ + \ldots + \underbrace{a_{2^{n-1}} + \ldots + a_{2^{n-1}}}_{2^{n-1}\text{-krát}} = a_1 + 2a_2 + \\ + \ldots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} = a_1 + t_{n-1} \,.$$

Odtud plyne, že posloupnost částečných součtů $\{s_{2^n}\}_1^{\infty}$ je ohraničená právě tehdy, když je ohraničená posloupnost $\{t_n\}_1^{\infty}$. Protože obě tyto posloupnosti jsou monotónní (neklesající, protože $a_n \geq 0$), znamená to, že buď obě konvergují, nebo žádná z nich nekonverguje (srov. větu 8). To už je téměř tvrzení věty 28, až na to, že místo $\lim_{n\to\infty} s_{2^n}$ bychom potřebovali mít $\lim_{n\to\infty} s_n$. Avšak tyto limity se rovnají (ať již jsou vlastní nebo obě $+\infty$), neboť jde o monotónní posloupnosti (srov. větu 8', 9). Tím je věta 28 úplně dokázána.

Příklad 37. Dokončíme rozbor řad (32) a (39), tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^c}$, vyšetřením případu, kdy $1 < c < 2$. V tomto případě splňuje řada (32) předpoklady věty 28. Přitom je $2^n a_{2^n} = 2^n/2^{nc} = 2^{n(1-c)} = 2^{n\gamma}$, kde $\gamma < 0$, takže $2^\gamma < 1$. Řada (41) je tedy v tomto případě geometrická řada s kvocientem $q = 2^\gamma$, $0 < q < 1$, tedy řada konvergentní.

Závěr. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ konverguje pro $c > 1$, nekonverguje (ale má součet $+\infty$) pro $c \leq 1$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^c}$ konverguje absolutně pro $c > 1$, neabsolutně pro $0 < c \leq 1$, nemá součet pro $c \leq 0$.

4.3. ŘADY TYPU $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

Dost často se vyskytují řady, u nichž se přímo nabízí možnost rozložit jejich členy na součin dvou či více jednodušších činitelů. Otázkou je, kdy je takový rozklad výhodný a jaký je vztah mezi chováním původní řady, např.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n ,$$

kde $c_n = a_n b_n$ pro všechna přirozená n, a řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n ,$$

popřípadě posloupností $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$. Ke zkoumání této otázky použijeme metody tzv. *Abelovy parciální sumace.* Označím-li částečné součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ po řadě s_n, u_n, v_n, platí $a_n = u_n - u_{n-1}$, $b_n = v_n - v_{n-1}$. (Aby tyto vzorce platily pro všechna přirozená n, položme pro pohodlí $u_0 = v_0 = s_0 = 0$.) Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} s_n &= u_1 b_1 + (u_2 - u_1) b_2 + \ldots + (u_n - u_{n-1}) b_n = \\ &= u_1(b_1 - b_2) + u_2(b_2 - b_3) + \\ &+ \ldots + u_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + u_n b_n . \end{aligned} \tag{42}$$

Odtud odvodíme pomocnou větu.

Pomocná věta. *Jestliže existuje takové číslo K, že platí $|u_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a jestliže posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je monotónní, pak platí*

$$|s_n| \leq K(|b_1| + 2|b_n|) .$$

Důkaz. Protože posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je monotónní, mají ve vzorci (42) všechny rozdíly $b_i - b_{i+1}$ stejné znaménko (buď jsou všechny nezáporné, nebo všechny nekladné). Proto platí

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |u_i(b_i - b_{i+1})| + |u_n| . |b_n| \leq K \sum_{i=1}^{n-1} |b_i - b_{i+1}| + \\ &+ K|b_n| = K \left| \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) \right| + K|b_n| = \\ &= K(|b_1 - b_n| + |b_n|) \leq K(|b_1| + 2|b_n|) . \end{aligned}$$

Důkaz je hotov.

Odvodíme nyní dvě kritéria konvergence pro řady, které lze psát ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \,. \tag{43}$$

První z nich pramení z jednoduché úvahy:

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, kde c je reálné číslo. Na první pohled se zdá, že kdybychom uvažovali místo čísla c nějaká čísla b_n taková, že $|b_n| \leq c$ (tj. ohraničenou posloupnost), platil by obdobný závěr i pro řadu (43). Není tomu přesně tak, neboť položíme-li $b_n = (-1)^n$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, řada (43) nekonverguje. Přidáme-li však předpoklad, že posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je monotónní, můžeme vyslovit a dokázat první větu:

Věta 29. (Abelovo kritérium.) *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a nechť* $\{b_n\}_1^\infty$ *je monotónní ohraničená posloupnost. Pak konverguje i řada* (43).

Důkaz. Stačí dokázat, že posloupnost částečných součtů s_n řady (43) splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (srov. větu 7 a úlohu 8 kap. 3).

Buď dáno číslo $\eta > 0$. Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, splňuje posloupnost jejích částečných součtů u_n Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Existuje tedy takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $k \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$ platí

$$|u_k - u_{n_0}| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{k} a_n \right| < \eta \,.$$

Označíme-li $a'_n = a_{n_0+n}$, $b'_n = b_{n_0+n}$, můžeme tuto nerovnost napsat ve tvaru

$$|a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n| < \eta \; ; \tag{44}$$

přitom tato nerovnost platí pro libovolné přirozené číslo n. Pro $p \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$, $q \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$ platí

$$\begin{aligned}|s_p - s_q| &= \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} a_n b_n - \sum_{n=n_0+1}^{q} a_n b_n\right| \leq \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} a_n b_n\right| + \\ &+ \left|\sum_{n=n_0+1}^{q} a_n b_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{p-n_0} a'_n b'_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{q-n_0} a'_n b'_n\right| . \end{aligned}\tag{45}$$

Použijeme nyní pomocnou větu (str. 99) na řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n b'_n$. Označíme-li její částečné součty s'_n a částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ označíme u'_n, pak nerovnost (44) lze zapsat ve tvaru $|u'_n| < \eta$ a z předpokladu monotonie posloupnosti $\{b_n\}_1^\infty$ plyne monotonie posloupnosti $\{b'_n\}_1^\infty$. Platí tedy (viz (45))

$$\begin{aligned}|s_p - s_q| &\leq \eta(|b'_1| + 2|b'_{p-n_0}| + |b'_1| + 2|b'_{q-n_0}|) = \\ &= \eta(2|b_{n_0+1}| + 2|b_p| + 2|b_q|) .\end{aligned}$$

Protože posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je ohraničená, existuje číslo L takové, že $|b_n| \leq L$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Proto platí

$$|s_p - s_q| \leq 6L\eta .$$

Budiž nyní dáno $\varepsilon > 0$. Položíme-li $\eta = \dfrac{\varepsilon}{7L}$ a $n_1 = n_0 + 1$, kde n_0 bylo zvoleno na začátku důkazu, pak pro $p \in \mathrm{N}\,[n_1]$, $q \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí

$$|s_p - s_q| \leq \frac{6}{7}\,\varepsilon < \varepsilon .$$

(Je-li $L = 0$, je $b_n = 0$ pro $n \in \mathrm{N}$ a vše je triviální.)

Posloupnost částečných součtů s_n řady (43) splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku a tedy konverguje. Důkaz věty 29 je skončen.

Následující věta je opět důsledkem pomocné věty (str. 99).

Věta 30. **(Dirichletovo kritérium.)** *Nechť posloupnost částečných součtů u_n řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je ohraničená a nechť posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je monotónní, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Pak řada* (43) *konverguje.*

Důkaz. Dokážeme opět, že posloupnost částečných součtů s_n řady (43) splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Nechť platí podle předpokladu $|u_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Definujme a'_n, b'_n, s'_n, u'_n jako v důkazu předešlé věty. Potom pro každé $n \in \mathrm{N}$ a každé $n_0 \in \mathrm{N}$ platí

$$|u'_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a'_k\right| = \left|\sum_{k=n_0+1}^{n+n_0} a_k\right| = |u_{n+n_0} - u_{n_0}| \leq 2K$$

a podle pomocné věty, použité na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n b'_n$, platí

$$s'_n \leq 2K(|b'_1| + 2|b'_n|) = 2K(|b_{n_0+1}| + 2|b_{n+n_0}|)\,.$$

Současně však platí

$$\begin{aligned}|s_p - s_q| &\leq |s_p - s_{n_0}| + |s_q - s_{n_0}| = \\ &= \left|\sum_{n=n_0+1}^{p} a_n b_n\right| + \left|\sum_{n=n_0+1}^{q} a_n b_n\right| = |s'_{p-n_0}| + \\ &+ |s'_{q-n_0}| \leq 2K(2|b_{n_0+1}| + 2|b_p| + 2|b_q|)\,,\end{aligned}$$

pokud $p \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$, $q \in \mathrm{N}\,[n_0 + 1]$.

Budiž dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladů věty je $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$, takže existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ takové, že pro $n \in \mathrm{N}[n_0]$ je $|b_n| < \frac{\varepsilon}{13K}$ (případ $K = 0$ je stejně triviální jako v předešlé větě). Potom však platí

$$|s_p - s_q| \leq \frac{12K\varepsilon}{13K} < \varepsilon$$

pro všechna $p \in \mathrm{N}[n_0 + 1]$, $q \in \mathrm{N}[n_0 + 1]$. Posloupnost $\{s_n\}_1^\infty$ tedy konverguje, čímž je věta 30 dokázána.

Jestliže ve větách 29, 30 předpokládáme absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (popřípadě ohraničenost posloupnosti částečných součtů absolutních hodnot, což je ovšem totéž), jsou oba důkazy mnohem snazší a vedou k důkazu absolutní konvergence řady (43). Ale hlavní význam obou vět je právě v jejich použití na neabsolutně konvergentní řady. Např. v Dirichletově kritériu můžeme položit $a_n = (-1)^n$ a dostaneme kritérium konvergence alternující řady (srov. větu 27).

Všimněte si konečně, že jsou-li splněny předpoklady Abelova kritéria, má posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ limitu: $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ (srov. větu 8). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, takže posloupnost jejích částečných součtů je nutně ohraničená. Jestliže místo posloupnosti $\{b_n\}_1^\infty$ uvažujeme posloupnost $\{b_n - b\}_1^\infty$, můžeme použít Dirichletova kritéria, z kterého plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ konverguje.

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje podle předpokladů Abelova kritéria, platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b) + b \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Abelovo kritérium je tedy bezprostředním důsledkem Dirichletova kritéria.

Příklad 38. Úplnou indukcí snadno odvodíte vzorec

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2}\left[\cos \frac{1}{2} x - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x\right] \Big/ \sin \frac{1}{2} x ,$$

který platí pro všechna $x \neq 2c\pi$ (c celé číslo). Je tedy $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \frac{1}{2} x\right|}$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a $x \neq 2c\pi$ (c celé číslo). Podle věty 30 konverguje např. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx$$

pro $x \neq 2c\pi$; pro $x = 2c\pi$ ovšem konverguje také, takže konverguje pro libovolné číslo x.

Příklad 39. Řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^c} , \tag{46}$$

kde c je reálné číslo, se nazývají Dirichletovy. Věta 29 dává tento výsledek:

Konverguje-li řada (46) pro $c = \gamma$, pak konverguje pro každou hodnotu $c > \gamma$.

Mohu totiž psát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^c} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n^\gamma} n^{\gamma-c}$$

a položit v Dirichletově nebo v Abelově kritériu $a_n = \dfrac{h_n}{n^\gamma}$, $b_n = n^{\gamma-c}$. Tento výsledek není tak samozřejmý, jak se zdá na první pohled: konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} (h_n/g_n)$, $g_n > 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a platí-li $g_n' \geq g_n$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$, nemusí konvergovat řada $\sum_{n=1}^{\infty} (h_n/g_n')$. Položte např. $h_n = (-1)^{n+1}$, $g_n = n$, $g_n' = n$ pro n liché, $g_n' = n^2$ pro n sudé. Proč v tomto případě nemůžeme použít ani Dirichletova, ani Abelova kritéria?

4.4. ASOCIATIVNÍ A KOMUTATIVNÍ ZÁKON PRO ŘADY

V úvodu třetí kapitoly jsme upozornili na to, že vlastnosti základní početní operace sčítání nelze bezprostředně přenášet na „sčítání nekonečně mnoha čísel". Vzpomeňte si, že pokusy definovat součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ byly neúspěšné právě proto, že „uzávorkování" nebo „přerovnání" sčítanců vedlo k paradoxním výsledkům. Definice součtu řady, jak jsme ji podali v odst. 3.2, odstranila jednu z uvedených obtíží: Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má součet (buď konečný, nebo $+\infty$, nebo $-\infty$), pak mohu její členy libovolně „uzávorkovat". Přesné tvrzení vyslovíme v následující větě, kterou můžeme nazvat asociativním zákonem pro řady.

Věta 31. *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *má součet a nechť* $\{k_n\}_1^\infty$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme* $k_0 = 0$. *Potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *kde* $b_n = a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \ldots + a_{k_n}$, *má součet a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz je snadný. Posloupnost částečných součtů $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ podle předpokladu věty buď konverguje nebo má nevlastní limitu ($+\infty$ nebo $-\infty$). Avšak posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je zřejmě vybranou posloupností z posloupnosti $\{s_n\}_1^\infty$ a tedy má tutéž limitu, vlastní nebo nevlastní.

Druhou nepříjemnost se nám však naší definicí součtu řady nepodařilo odstranit. A nepomohlo by ani omezit se na konvergentní řady, tj. vyloučit z našich úvah řady s nekonečným součtem. Abychom se o tom přesvědčili, všimněme si ještě jednou řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, která konverguje (srov. příkl. 34), a řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 2^{n-1} - 1} + \ldots + \frac{1}{2(2^n - 1) - 1} - \frac{1}{2n} + \ldots,$$

která vznikne z původní řady tak, že napíšeme vždy několik kladných členů (postupně jeden, dva, čtyři, osm atd.) a jeden záporný. Z našeho zápisu je vidět že částečný součet této „přerovnané“ řady, zakončený některým (řekněme p-tým) záporným členem, můžeme napsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{p}\left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

Označíme-li tento částečný součet $\sigma(p)$, odvodíme pro $p \in \mathrm{N}$ [3] snadno následující vztahy:

$$\sigma(p) > \sum_{n=3}^{p}\left(\frac{2^{n-1}}{2(2^n-1)-1}-\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\sum_{n=3}^{p}\frac{2^n(n-2)+3}{(2^{n+1}-3)\,2n}>\sum_{n=3}^{p}\frac{2^n(n-2)}{2^{n+2}n}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{p}\left(1-\frac{2}{n}\right)\geq\frac{1}{12}(p-2).$$

Odtud plyne, že posloupnost částečných součtů „přerovnané“ řady není ohraničená a tedy tato řada nekonverguje. (Není těžké se přesvědčit, že má součet $+\infty$.)

Přerovnáním členů řady se nám tedy podařilo z konvergentní řady udělat nekonvergentní. Mohli jsme také dosáhnout toho, aby vzniklá řada konvergovala, ale její součet byl různý od součtu původní řady. Obecně tuto skutečnost vyjádříme následující větou.

Věta 32. *Součet neabsolutně konvergentní řady lze přerovnáním libovolně změnit. To znamená:*

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *neabsolutně konvergentní řada,* α *reálné číslo nebo* $+\infty$ *nebo* $-\infty$, *pak existuje taková posloup-*

nost přirozených čísel $\{k_n\}_1^\infty$, obsahující každé přirozené číslo právě jednou, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = \alpha\,.$$

Posloupnost $\{k_n\}_1^\infty$ je tedy jakousi „permutací“ množiny přirozených čísel.

Postup z předběžné úvahy by nebyl možný, kdyby řada měla jen konečný počet kladných členů nebo jen konečný počet záporných členů. V tom případě by ovšem nemohla konvergovat neabsolutně. Předpoklad neabsolutní konvergence je tedy ve větě přirozený.

Důkaz věty 32 jen naznačíme. (Přesně je proveden např. v knize V. Jarníka, Diferenciální počet II.) Rozdělme členy neabsolutně konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jako v důkazu věty 26 na posloupnost členů

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

a posloupnost členů

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\,.$$

(Jak kladných, tak i záporných členů je nekonečně mnoho, neboť jinak by řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala absolutně; srov. úlohu 4 na str. 113.) Přitom

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty\,, \tag{47}$$

takže částečné součty obou těchto řad tvoří neohraničené (a ovšem monotónní) posloupnosti. Platnost rovnosti (47) plyne bezprostředně z věty 18 a z předpokladu neabsolutní konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Kdyby totiž jedna z řad v rovnosti (47) měla nekonečný součet a druhá konvergovala, nemohla by řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovat, neboť by platilo buď

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \geq \sum_{n=1}^{k} b_n - \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right|$$

nebo analogicky

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| \geq \left|\sum_{n=1}^{k} c_n\right| - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

(odečítáme součet té řady, která je konvergentní) a částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ by nebyly ohraničené. Kdyby obě řady v rovnosti konvergovaly, platilo by podle věty 18 zřejmě

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} (-c_n)$$

a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ by konvergovala absolutně.

Je-li α reálné číslo, přerovnáme řadu takto: Nejprve píšeme nezáporné členy $b_1, b_2, \ldots$ tak dlouho, až je $b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} > \alpha$. Pak píšeme záporné členy $c_1, c_2, \ldots$ tak dlouho, až je $b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} + c_1 + \ldots + c_{l_1} < \alpha$. Tento postup stále opakujeme. (To je umožněno právě platností rovnosti (47).) n-tý částečný součet této „přerovnané" řady se liší od čísla α nejvýše o absolutní hodnotu svého posledního sčítance; to může být nějaký člen b_k nebo c_l, ale jistě je to člen původní řady, řekněme a_r. Zvětšujeme-li neomezeně index n, zvětšuje se neomezeně i r (i když může být obecně $r < n$). Protože však členy původní řady konvergují k nule, konverguje k nule i rozdíl mezi číslem α a n-tým částečným součtem „přerovnané" řady. Tak se dokáže, že „přerovnaná" řada má součet α.

Je-li $\alpha = +\infty$, postupujeme podobně jako v přípravné úvaze před větou 32. Nejprve napíšeme tolik nezáporných členů $b_1, b_2, \ldots, b_{n_1}$, že platí

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} > 1 + |c_1| = 1 - c_1$$

(c_1 je záporné číslo!). Pak napíšeme záporný člen c_1. Dále napíšeme opět tolik nezáporných členů $b_{n_1+1}, \ldots, b_{n_2}$, aby platilo

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} + c_1 + b_{n_1+1} + \ldots + b_{n_2} >$$
$$> 2 + |c_2| = 2 - c_2 .$$

Pak napíšeme záporný člen c_2. Stejně pokračujeme dále, takže při k-tém kroku vytvoříme skupinu členů řady, skládající se z nezáporných členů $b_{n_{k-1}+1}, \ldots, b_{n_k}$ a ze záporného členu c_k, při čemž platí

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_k} > k + |c_k| = k - c_k .$$

(Součet na levé straně obsahuje ovšem kromě členů b_1, $\ldots, b_{n_k}$ také členy $c_1, \ldots, c_{k-1}$.)

Posloupnost částečných součtů takto vytvořené řady není sice monotónní, ale má nevlastní limitu $+\infty$. Snadno se totiž přesvědčíme, že všechny částečné součty této řady, které obsahují k skupin, vytvořených popsaným způsobem, jsou větší než k.

Je-li $\alpha = -\infty$, postupujeme obdobně, ale zaměníme roli kladných a záporných členů původní řady.

Ve větě 32 byl podstatný předpoklad, že původní řada neabsolutně konverguje. Pro nekonvergentní řady věta neplatí: někdy lze dosáhnout toho, že po přerovnání řada konverguje, ale její součet nelze předem zvolit. Jindy nelze vůbec dosáhnout toho, aby nekonvergentní řada se přerovnáním změnila na konvergentní. (Tento případ nastane jistě tehdy, když členy řady nekonvergují k nule.)

Na druhé straně absolutně konvergentní řady mají vlastnost právě opačnou, než je tvrzení věty 32. Vyjadřuje ji následující věta.

Věta 33. *Součet absolutně konvergentní řady se nezmění přerovnáním. To znamená:*

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje a* $\{r_n\}_1^{\infty}$ *je posloupnost přirozených čísel, obsahující každé přirozené číslo právě jednou, konverguje absolutně i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{r_n}$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{r_n}.$$

Důkaz opět jen naznačíme. Přesný důkaz najde čtenář např. v knize V. Jarníka, Diferenciální počet II. Označme součet původní řady s, její částečné součty s_n, částečné součty „přerovnané“ řady t_n, součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nechť je σ, její částečné součty σ_n. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}\varepsilon \tag{48}$$

a také

$$|\sigma_n - \sigma| < \frac{1}{2}\varepsilon . \tag{49}$$

Vezmeme nyní tak „dlouhý“ částečný součet přerovnané řady, aby v něm byly obsaženy všechny členy a_n s indexy od jedné do n_0. Přesně řečeno, najdeme takové přirozené číslo n_1, že ke každému přirozenému číslu $p \leq n_0$ existuje takové přirozené číslo $q < n_1$, že $p = r_q$. (Uvědomte si, že je nutno požadovat $p = r_q$ a nikoliv jen $a_p = a_{r_q}$, neboť členy původní — a tedy i přerovnané — řady se mohou opakovat.) Protože přerovnaná řada obsahuje všechny členy řady původní, určitě takové n_1 existuje a platí $n_1 \geq n_0$. Je-li $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$, platí tedy

$$\begin{aligned} |s_n - t_n| &= |a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + \\ &\quad + a_n - (a_{r_1} + a_{r_2} + \ldots + a_{r_{n_1}} + a_{r_{n_1}+1} + \\ &\quad + \ldots + a_{r_n}| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n}{}^{*} a_{r_k} \right| . \end{aligned}$$

Přitom hvězdička u druhého součtu znamená, že se sčítá přes ty indexy k, pro něž je $r_k > n_0$. Může se ovšem stát, že se některý člen prvního součtu zruší s některým členem druhého součtu. V každém případě však platí odhad (srov. (49))

$$|t_n - s_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| \leq |\sigma - \sigma_{n_0}| < \frac{1}{2}\varepsilon ,$$

kde $m = \max\limits_{l \leq n} r_l$ a tedy jistě $m \geq n$. Odtud a ze (48) dostáváme

$$|t_n - s| \leq |t_n - s_n| + |s_n - s| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon .$$

Dokázali jsme, že přerovnaná řada konverguje a její součet je roven součtu řady původní. Důkaz absolutní konvergence přerovnané řady se provede podobně.

Úlohy

Píšeme všude stručně $\Sigma\, a_n$ místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apod.

1. Dokažte: Jestli řada Σa_n absolutně konverguje a $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ absolutně konverguje.

2. Buď dána řada Σa_n a definujme b_n, c_n pro $n \in \mathrm{N}$ jako v důkazu věty 26. Dokažte: Jestliže obě řady Σb_n, Σc_n konvergují, pak konverguje i řada Σa_n a to absolutně a platí $\Sigma a_n = \Sigma b_n - \Sigma c_n$, $\Sigma |a_n| = \Sigma b_n + \Sigma c_n$.

3.* Při označení a_n, b_n, c_n jako v předešlé úloze dokažte, že nastane právě jedna z možností:
Σb_n, Σc_n konvergují a Σa_n konverguje absolutně;
$\Sigma b_n = +\infty$, Σc_n konverguje a $\Sigma a_n = +\infty$;
Σb_n konverguje, $\Sigma c_n = +\infty$ a $\Sigma a_n = -\infty$;
$\Sigma b_n = \Sigma c_n = +\infty$ a řada Σa_n buď konverguje neabsolutně, nebo nemá součet.
Udejte příklady na všechny možnosti.

4. Dokažte: Jestliže řada neabsolutně konverguje, pak má nekonečně mnoho kladných členů i nekonečně mnoho záporných členů.