3. kapitola

ŘADY

3.1. ÚVOD

Pojmu posloupnosti předcházel v historii matematiky pojem řady. Tento pojem se vztahuje ke sčítání čísel, tedy k velmi elementární operaci. S jedinou výhradou: jde o problém sčítání „nekonečně mnoha" čísel.

Již dávno si matematici, filozofové či „obyčejní lidé" všimli, že sčítáme-li postupně zlomky $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ atd., nepřekročí součet nikdy číslo 1. Přitom sečteme-li tato čísla až do $\frac{1}{2^k}$, bude součet roven právě $1 - \frac{1}{2^k}$. Odtud byl již jen krok k závěru, že součet $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ (všech čísel tvaru $\frac{1}{2^n}$, kde n je přirozené číslo) je právě roven jedné.

Vše se zdálo být v pořádku. Nikdo se zpočátku nepozastavil nad tím, co to vůbec znamená „sečíst nekonečně mnoho čísel". Zmíněný výsledek byl zobecňován; došlo se k závěru, že v případě $-1 < x < 1$ platí

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots = \frac{1}{x-1}\,.$$

Potíže nečinil ani případ $x = 1$: Vcelku ve shodě se „zdravým selským rozumem" se usoudilo, že čísla na levé straně rovnosti (tj. samé jedničky) nelze sečíst, neboť pravá strana uvedeného vzorce nemá smysl.

Avšak když začali matematici uvažovat o případu $x = -1$, narazili na překážky: výraz vpravo má smysl, takže bychom mohli psát

$$-1 + 1 - 1 + \ldots = -\frac{1}{2}\,.$$

Díváme-li se však na výraz na levé straně jako na zápis obyčejné aritmetické operace sčítání čísel, měl by platit asociativní zákon. Podle něho bychom však mohli psát

$$-1 + 1 - 1 + \ldots = (-1 + 1) +$$
$$+ (-1 + 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0\,,$$

ale také

$$-1 + 1 - 1 + \ldots = -1 + (1 - 1) +$$
$$+ (1 - 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1\,,$$

což dává zřejmě nesprávné rovnosti

$$-\frac{1}{2} = 0 = 1!$$

Stejně i použitím komutativního a distributivního zákona dojdeme k rozporuplným výsledkům:

$$-\frac{1}{2} = -1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\,,$$

ale také

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = -(-1 + 1 - 1 + \ldots) =$$

$$= -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Trvalo dlouhá léta — či spíše staletí — než se podařilo uspokojivě rozřešit tyto a podobné otázky. Hluboké úvahy, vyvolané uvedenými paradoxy, vedly nakonec k vytvoření základních pojmů klasické matematické analýzy. Ohromující vývoj, kterým teorie řad prošla od prvních fundamentálních prací Cauchyových, z ní vytvořil i důležitý prostředek aplikací matematiky.

3.2. DEFINICE

Budeme nyní definovat pojem řady, respektive součtu řady, pomocí pojmu limity posloupnosti.

Definice 8. Buď $\{a_n\}_1^\infty$ posloupnost. Pak symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme *řadou*. Čísla a_n jsou *členy řady*, čísla $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ nazýváme jejími *částečnými součty*. Existuje-li limita posloupnosti $\{s_k\}_{k=1}^\infty$, $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_k$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ má *součet* (a to i v případě, kdy limita s je nevlastní, tj. $s = +\infty$ nebo $s = -\infty$) a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Je-li limita s vlastní (tj. konečné číslo), říkáme také, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje k číslu* s (je konvergentní).

Neexistuje-li $\lim_{k\to\infty} s_k$ (ani nevlastní), říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemá součet.

Definice byla dost dlouhá a vyskytlo se v ní několik nových názvů. Všimněte si především toho, že symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má vlastně dva významy: jednak je vyjádřením příkazu „utvoř částečné součty $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ a zkoumej jejich limitu", jednak je přímo označením pro hodnotu této limity (pokud existuje). Dále si uvědomte rozdíl mezi výrokem „řada má součet" a „řada konverguje". Konvergentní řada má ovšem součet, a ten je (konečné) číslo. Řada, která má součet, nemusí však konvergovat: to nastane právě tehdy, je-li její součet nekonečný, tj. $+\infty$ nebo $-\infty$. Rozmyslete si také význam negací uvedených výroků a pečlivě je rozlišujte!

K označení zavedenému definicí 8 je třeba ještě poznamenat, že podobně jako v pojmu posloupnosti nemusí řada začínat od indexu 1. Vedle uvedeného zápisu se setkáme nejčastěji s řadami tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ale také $\sum_{n=3}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=-2}^{\infty} a_n$ apod. Je samozřejmé, že „sčítací index" může být označen jinak než n, např. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apod. Zápis $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, který se dost často objevuje v literatuře, nebudeme v této knížce používat.

Příklad 25. Ve škole jste se seznámili se součtem *geometrické řady* (srov. příklad 5). Je-li $a_n = aq^{n-1}$ pro všechna přirozená čísla n, $a \neq 0$, můžeme hovořit o řadě

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \tag{20}$$

V příkladu 5 jsme ukázali, že platí

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}\,. \tag{21}$$

Podle věty 6 snadno odvodíme, že posloupnost $\{s_n\}_1^{\infty}$, má (vlastní) limitu, právě když $|q| < 1$, a platí

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1 - q}\,.$$

Geometrická řada tedy konverguje právě tehdy, když $|q| < 1$, a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1 - q}\,.$$

(Případ $q = 0$ jsme na rozdíl od příkladu 5 nevyloučili.)

Je-li $q \geq 1$, je posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_1^{\infty}$ monotónní a neohraničená podle vzorce (21) a platí zřejmě (srov. úlohu 8, kap. 2)

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$$

podle toho, zda $a > 0$, nebo $a < 0$. Platí tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = +\infty \quad \text{při} \quad a > 0, q \geq 1\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = -\infty \quad \text{při} \quad a < 0, q \geq 1\,.$$

Je-li $q < -1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ nemá součet, neboť ze vzorce (21) plyne, že posloupnost částečných součtů je neohraničená a přitom obsahuje jak kladné, tak i záporné členy s libovolně velkou absolutní hodnotou. Celkem tedy docházíme k závěru, že geometrická řada má součet při $q > -1$, konverguje při $-1 < q < 1$. (Případ $q = -1$ uvažte sami — srov. příkl. 28.)

Příklad 26. Nalezněte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} . \tag{22}$$

Jde ovšem jednak o to, zda součet řady existuje, jednak o jeho hodnotu. V daném případě lze však obě otázky vyřešit současně. Z rovnosti

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

plyne ihned

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 .$$

Podle definice 8 tedy řada (22) konverguje a má součet rovný jedné, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 .$$

Příklad 27. Vyšetříme tzv. *harmonickou řadu*, tj. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{23}$$

Protože $\frac{1}{n} > 0$ pro všechna přirozená čísla n, je posloupnost částečných součtů $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ monotónní (rostoucí) posloupnost. Jestliže je ohraničená, má podle věty 8 limitu; jestliže je neohraničená, má nevlastní limitu $+\infty$. Řada (23) má tedy jistě součet; otázkou zůstává, zda je dokonce konvergentní. K rozřešení této otázky nám pomůže, omezíme-li se na jistou vybranou posloupnost z posloupnosti částečných součtů, totiž na posloupnost $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$. Protože $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{8}$, $\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$, $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}$ atd., platí

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$$

$$+ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{-krát}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ a tím spíše posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neohraničená, takže podle předchozí úvahy řada (23) nekonverguje, ale platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Příklad 28. V odst. 3.1 jsme ukázali, jaké obtíže nastanou, snažíme-li se sečíst řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$. Nyní je ihned vidět, že definice se těmto obtížím vyhnula jednoduše tím, že „zakázala" takové řady sčítat, tj. nepřiřadila jim žádný součet. Skutečně, částečné součty této řady jsou $-1, 0, -1, 0$ atd., takže jejich posloupnost má dva hromadné body $-1, 0$ a nemá tedy limitu (ovšem ani nevlastní). Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ nemá proto součet.

Pokud by čtenář považoval takové řešení za příliš „laciné", můžeme jej uklidnit tím, že matematici neztratili zavedením definice 8 zájem o ty řady, které nemají součet. Avšak studium takových řad daleko přesahuje rámec naší knížky.

3.3. NĚKTERÉ ZÁKLADNÍ POZNATKY O ŘADÁCH

Podobně jako je tomu u posloupností, ani u řad nezávisí jejich konvergence na změně konečného počtu členů řady. Avšak na rozdíl od posloupností, kde i hodnota limity je na takové změně nezávislá, změní řada obecně svůj součet. To je přirozené, neboť změnou třeba jediného členu řady se změní všechny částečné součty, které tento člen již obsahují, a tedy se změní i hodnota limity posloupnosti částečných součtů. Dokážeme nejprve tuto větu:

Věta 15. *Budiž p přirozené číslo. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (má součet) právě tehdy, jestliže konverguje (má součet) řada $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$.*

Poznamenejme, že druhou řadu můžeme psát také ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p}$.

Důkaz. Označíme-li $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ částečné součty první řady, $t_n = a_{p+1} + \ldots + a_{p+n}$ částečné součty druhé řady, pak zřejmě platí

$$t_n = s_{p+n} - s_p . \tag{24}$$

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, platí podle věty 4

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{p+n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Protože p je pevné přirozené číslo, platí podle věty 6

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_{p+n} - s_p ; \tag{25}$$

existuje tedy limita částečných součtů řady $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ a tedy tato řada konverguje; navíc je jasné, že platí

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_p = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - (a_1 + a_2 + \ldots + a_p) . \tag{26}$$

Jestliže konverguje řada $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$, stačí převést v rovnici (25) člen s_p na levou stranu a opět podle věty 6 dostáváme, že konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a platí (26).

Pokud jedna z řad má součet $+\infty$ nebo $-\infty$, platí ovšem opět (24), neboť zde jde o částečné (tedy konečné) součty. Podle věty 12 pro nevlastní limity pak platí

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_{p+n} = \lim_{n\to\infty} s_n ,$$

kde všechny tři limity jsou nevlastní, a to buď všechny $+\infty$, nebo všechny $-\infty$. Věta je dokázána.

Tvrzení z počátku tohoto odstavce je nyní důsledkem této věty:

Věta 16. *Jestliže řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *splňují rovnosti* $a_n = b_n$ *pro všechna přirozená* n *nejvýše s výjimkou konečného počtu, pak buď obě řady mají součet, nebo jej nemá žádná. Konverguje-li jedna z obou řad, konverguje i druhá.*

Důkaz. Platí-li $a_n = b_n$ pro všechna přirozená n až na konečný počet, existuje takové přirozené číslo p, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[p]$ platí $a_n = b_n$. Potom však platí

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=p+1}^{\infty} b_n \tag{27}$$

a tvrzení věty 16 plynou z věty 15: má-li např. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ součet, má součet i řada $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$, tedy i $\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n$ podle (27) a znovu podle věty 15 má součet i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ostatní případy se odvodí zcela obdobně.

Základní informaci o tom, zda daná řada může konvergovat, nám často dá tato věta:

Věta 17. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \tag{28}$$

Důkaz. Označíme-li jako obvykle $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, pak pro všechna $n \in \mathrm{N}$ [2] platí

$$a_n = s_n - s_{n-1} .$$

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, existuje $\lim_{n\to\infty} s_n$ a podle věty 4 platí $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$. Podle věty 6 existuje tedy $\lim_{n\to\infty} a_n$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0 .$$

Věta je dokázána.

Z příkladu 27 vidíme, že platnost vztahu (28) není postačující k tomu, aby řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergovala. Ukážeme však, že existuje poměrně důležitý typ řad, pro něž je (28) i postačující podmínkou konvergence. (Viz větu 27, kde členy řady píšeme sice ve tvaru $(-1)^n a_n$, ale to není podstatné vzhledem k tvrzení úlohy 3 kap. 2.)

Všimněte si ještě, že věta 17 nehovoří o součtu řady, ale o její konvergenci. Skutečně, geometrická řada z příkladu 25 s kvocientem $q > 1$ ukazuje, že řada může mít součet (ovšem jedině nekonečný), i když neplatí (28).

Při výpočtu součtu řad nám často pomůže následující věta, jež je slabší, ale přesto důležitou obdobou věty 6:

Věta 18. *Jestliže řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují a c je libovolné číslo, platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \tag{30}$$

(To znamená, že řady vlevo konvergují a platí napsané vztahy.)

Důkaz plyne bezprostředně z věty 6 a přenecháme jej proto čtenáři. Čtenář si také může rozmyslet, jaká tvrzení lze vyslovit, předpokládáme-li místo konvergence jen existenci součtu (třeba nekonečného).

Poznamenejme ještě, že vzorec (29) představuje jistou formu asociativního zákona pro (konvergentní) řady: místo abychom nejprve sečetli odpovídající členy obou řad vpravo a pak utvořili „nekonečný součet“ (tj. součet řady), můžeme nejdříve najít oba „nekonečné součty“ a ty pak sečíst. Čtenář se snadno přesvědčí, že vzorec (29) neplatí obecně pro nekonvergentní řady, dosadí-li třeba $a_n = 1$, $b_n = -1$ pro všechna přirozená čísla n.

Podobně vzorec (30) je jistou formou distributivního zákona: buď nejprve vynásobíme každý „sčítanec“ (člen řady) číslem c a pak sečteme, nebo nejdříve sečteme a pak celý součet vynásobíme číslem c.

8.4. KONVERGENCE ŘAD S NEZÁPORNÝMI ČLENY

Významné místo mezi řadami zaujímají ty, jejichž všechny členy mají totéž znaménko (přitom některé členy mohou být rovny nule). To znamená, že platí buď $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$, nebo $a_n \leq 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Protože podle věty 18 platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n ,$$

jakmile jedna z napsaných řad konverguje (stačí dokonce, má-li součet — třeba i $+\infty$ nebo $-\infty$), stačí si zvolit jednu z obou nerovností, např. $a_n \geq 0$. Dosažené výsledky se snadno přenesou na případ řad, jejichž členy splňují nerovnost $a_n \leq 0$. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jejíž členy splňují nerovnost $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$, budeme přirozeně nazývat řada s nezápornými členy.

Důvody, proč se těmito řadami budeme zvláště zabývat, jsou v podstatě dva. První z nich je ten, že posloupnost částečných součtů takové řady je monotónní (neklesající). Mohou tedy nastat dva případy: buď je tato posloupnost ohraničená a tedy má podle věty 8 (vlastní) limitu, takže řada konverguje, nebo je neohraničená a pak podle úlohy 8, kap. 2, má nevlastní limitu $+\infty$, takže řada má součet $+\infty$. Tento výsledek můžeme vyslovit jako větu:

Věta 19. *Řada s nezápornými členy má vždy součet; konverguje právě tehdy, když posloupnost jejích částečných součtů je ohraničená.*

Druhý důvod je ten, že každé řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (jejíž členy mohou mít různá znaménka) můžeme přiřadit „řadu absolutních hodnot“ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, což je řada s nezápornými členy. Z jejího chování můžeme často soudit na chování původní řady (srov. odst. 4.1).

Téměř samozřejmým důsledkem věty 19 je tzv. srovnávací kritérium, které nám umožňuje rozhodnout o konvergenci dané řady na základě znalosti chování jiné řady (které se často říká majorantní řada):

Věta 20. (Srovnávací kritérium.) *Nechť platí* $0 \leq a_n \leq \leq b_n$ *pro všechna* $n \in \mathrm{N}$. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,. \tag{31}$$

Důkaz. Za předpokladů věty platí pro každé přirozené číslo n nerovnost

$$0 \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n \,.$$

Protože podle věty 19 je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ohraničená, existuje číslo K takové, že $|b_1 + + b_2 + \ldots + b_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$ a tedy zřejmě platí také $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Opět podle věty 19 dostáváme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. Nerovnost (31) plyne z úlohy 1, kap. 2.

Příklad 29. Harmonická řada (23) je zvláštním případem řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}, \tag{32}$$

kde c je reálné číslo. Zřejmě je $n^c \geq 0$ pro každé $n \in \mathrm{N}$, takže jde o řadu s nezápornými členy. Důležitý je případ $c = 2$, tj. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Dokážeme, že tato řada je konvergentní, použitím srovnávacího kritéria, v němž položíme $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Platí $0 \leq \dfrac{1}{(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ pro všechna přirozená n. Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ konverguje podle příkladu 26, konverguje podle věty 20 i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Zřejmě však platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(snadno se přesvědčíte, že obě řady mají tytéž částečné součty) a podle věty 15 konverguje také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. (Přesnou hodnotu jejího součtu není tak snadné najít: ukazuje se, že je rovna $\dfrac{1}{4}\pi$.)

Je-li nyní $c > 2$, můžeme na řadu (32) použít srovnávací kritérium, v němž položíme $b_n = \frac{1}{n^2}$, neboť jistě platí $n^c \geq n^2$ a tedy $0 \leq \frac{1}{n^c} \leq \frac{1}{n^2}$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Je tedy řada (32) konvergentní, jakmile $c \geq 2$.

Srovnávací kritérium nám umožňuje obdržet i negativní výsledky. Nechť je $c < 1$. Pak platí $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^c}$. Kdyby řada (32) (při $c < 1$!) konvergovala, plynulo by ze srovnávacího kritéria, že harmonická řada (23) rovněž konverguje. To je však ve sporu s výsledkem příkladu 27. Tedy řada (32) při $c \leq 1$ diverguje. K úplné diskusi řady (32) nám chybí případ $1 < c < 2$. Ten vyšetříme později (viz příklad 37).

Ze srovnávacího kritéria můžeme odvozovat speciálnější věty tím, že místo řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ vezmeme nějakou konkrétní řadu, jejíž chování je nám známé. Nejčastěji užívaným výsledkem je tzv. Cauchyovo kritérium, v němž použijeme geometrické řady.

Věta 21. (Cauchyovo kritérium.) *Buď dána posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$. Nechť existuje číslo q takové, že $q < 1$, a přirozené číslo k takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[k]$ platí $a_n \geq 0$, $\sqrt[n]{a_n} \leq q$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.*

Důkaz. Položíme-li $q^n = b_n$, plyne ihned z věty 20, že řada $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ je konvergentní. Z věty 15 pak dostáváme, že také řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Příklad 30. Dokážeme, že je-li x jakékoliv nezáporné číslo, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ konvergentní. Je totiž

$$\sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{x}{n} \leq \frac{1}{2}$$

pro všechna přirozená čísla $n \geq 2x$. Položíme-li $q = \frac{1}{2}$, je konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ důsledkem věty 21, a kde při daném x položíme $k = [2x] + 1$.

Příklad 31. Pro harmonickou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ platí $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$ pro všechna přirozená čísla n. Jak víme (srov. příklad 27), harmonická řada není konvergentní. Ve větě 21 tedy nemůžeme obecně položit $q = 1$, dokonce ani tehdy, kdybychom neostrou nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ nahradili ostrou nerovností $\sqrt[n]{a_n} < 1$.

Ze srovnávacího kritéria dostaneme snadno také tzv. podílové kritérium.

Věta 22. (Podílové kritérium.) *Nechť* $0 < a_n$, $0 < b_n$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

pro všechna přirozená čísla n a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz. Uvědomme si, že všechny členy obou řad jsou kladná čísla, takže všechny zlomky, které budeme psát, mají smysl (a jsou to kladná čísla). Je-li n přirozené číslo, platí

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_n}{b_1}$$

a tedy

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n .$$

Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, konverguje podle věty 18 i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_1}{b_1} b_n$ a podle srovnávacího kritéria (věta 20) konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

I v této větě můžeme položit $b_n = q^n$, tj. použít ke srovnání geometrickou řadu. Dostaneme tzv. d'Alembertovo kritérium:

Věta 23. (D'Alembertovo kritérium.) *Buď dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nechť existuje číslo $q < 1$ a přirozené číslo k takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}[k]$ platí $a_n > 0$, $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.*

Důkaz. Protože q je podíl dvou po sobě jdoucích členů geometrické posloupnosti (s kvocientem q, $0 < q < 1$), plyne z věty 22 konvergence řady $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ a z věty 15 konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad 32. Použijeme větu 23 na řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, kde x je libovolné kladné číslo. Položíme-li $\frac{x^n}{n!} = a_n$, je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \, .$$

Pro všechna $n \geq x$ je $\frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{x+1}$, můžeme tedy položit ve větě 23 $q = \frac{x}{x+1} < 1$ a dostáváme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro všechna kladná x.

Příklad 33. Konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$, kde x je dané kladné číslo, bychom mohli opět vyšetřit pomocí d'Alembertova kritéria. Vhodnější je však odvodit tzv. limitní d'Alembertovo kritérium, které je užitečné i v jiných případech.

Věta 24. (D'Alembertovo limitní kritérium.) *Buď* $a_n >$ > 0 *pro všechna* n *a nechť platí*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \, .$$

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Důkaz. Položme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$. Pak je $\dfrac{1}{2}(1 - a) > 0$ a tedy existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq a + \frac{1}{2}(1 - a) = \frac{1}{2}(a + 1) < 1\,.$$

Podle d'Alembertova kritéria (věta 23) tedy řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Vrátíme-li se k příkl. 33, vidíme, že

$$\frac{(n + 1)x^{n+1}}{nx^n} = \frac{n + 1}{n}\,x \to x\,.$$

Je-li $x < 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ konverguje. Pro $x \geq 1$ ovšem nekonverguje (např. podle věty 17).

Zkuste pro srovnání řešit příklad 33 přímo pomocí d'Alembertova kritéria (věta 23). Uvidíte, že postup je složitější, protože číslo q musíte volit v závislosti na čísle x.

Podobně jako limitní d'Alembertovo kritérium můžeme vyslovit i tzv. limitní Cauchyovo kritérium:

Věta 25. (Cauchyovo limitní kritérium.) *Buď $a_n \geq 0$ pro všechna přirozená n. Nechť platí*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1\,.$$

Pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Důkaz je obdobný jako pro větu 24. Položíme-li $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, pak je $\frac{1}{2}(1 - a) > 0$ a tedy existuje takové n_0, že pro všechna $n \in N[n_0]$ platí $|\sqrt[n]{a_n} - a| \leq \leq \frac{1}{2}(1 - a)$, tj. $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1}{2}(1 + a) = q < 1$.
Z Cauchyova kritéria (věta 21) plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Úlohy

Píšeme všude stručně Σa_n místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ apod. Abychom mohli v některých úlohách hovořit i o nekonvergentních řadách, definujme $c \leq +\infty$, $-\infty \leq c$ pro libovolné reálné číslo c i pro $c = +\infty$, $c = -\infty$.

1. Dokažte: Je-li $a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in N$ a mají-li obě řady Σa_n, Σb_n součet, platí $\Sigma a_n \leq \Sigma b_n$.
2.* Dokažte: Je-li $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna $n \in N$ a řady Σa_n, Σc_n konvergují, konverguje i řada Σb_n a platí $\Sigma a_n \leq \Sigma b_n \leq \leq \Sigma c_n$.
Ukažte na příkladu, že tvrzení neplatí, nahradíme-li slovo „konverguje“ v obou případech slovy „má součet“. Přesto je možné vyslovit a dokázat podobnou větu pro nekonvergentní řady, které mají součet. Pokuste se o to!
3. Dokažte: Nechť platí $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \in N$. Jestliže řada Σa_n nekonverguje, pak nekonverguje ani řada Σb_n.
4. Dokažte: Nechť $0 < a_n$, $0 < b_n$, $a_{n+1}/a_n \leq b_{n+1}/b_n$ pro

všechna $n \in N$. Jestliže řada Σa_n nekonverguje, pak nekonverguje ani řada Σb_n.

5. Dokažte: Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je posloupnost nezáporných čísel a nechť pro nekonečně mnoho čísel $n \in N$ platí $a_{n+1}/a_n \geq 1$. Pak řada Σa_n nekonverguje.
6. Dokažte: Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je posloupnost kladných čísel a nechť pro nekonečně mnoho čísel $n \in N$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Pak řada Σa_n nekonverguje.
7.* Formulujte a dokažte srovnávací kritérium (obdobné větě 20) pro řady s nekladnými členy.
8. Dokažte (s použitím věty 7): Řada Σa_n konverguje právě tehdy, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna čísla $p \in N\,[n_0]$, $q \in N\,[n_0]$ splňující $p < q$ platí $\left|\sum_{n=p+1}^{q} a_n\right| < \varepsilon$. (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro řady.)