2. kapitola

KONVERGENCE A LIMITA

2.1. DEFINICE LIMITY A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

V této kapitole se seznámíme s jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy. Jde o pojem limity, který stál u zrodu matematické analýzy a stal se prostředkem, který umožnil popsat matematicky širokou škálu fyzikálních jevů, nemluvě již o jejím významu pro rozvoj samotné matematiky. V naší knížce se budeme zabývat jen limitou posloupnosti, takže se vlastně dotkneme jen okraje této problematiky. Ale na druhé straně nám posloupnosti umožní seznámit se s charakteristickými vlastnostmi tohoto pojmu na poměrně jednoduchých objektech.

Všimněme si nejdříve dobře známé věci, totiž desetinného rozvoje reálného čísla. Víme, že každému reálnému číslu přísluší jeho desetinný rozvoj. S výjimkou těch racionálních čísel, která lze zapsat jako zlomky se jmenovatelem rovným nějaké mocnině deseti, je tento rozvoj nekonečný. Protože s nekonečným desetinným rozvojem se pracuje velmi špatně, používáme místo něho při počítání obvykle desetinný zlomek, který vznikne, napíšeme-li z desetinného rozvoje čísla jen konečný počet číslic. Tak např. místo čísla $\sqrt{2}$ můžeme použít přibližného vyjádření: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;

1,41421; 1,414213; 1,4142135 atd. Přitom, použijeme-li prvního vyjádření, neudělali jsme jistě větší chybu než 0,1; použijeme-li čtvrtého napsaného vyjádření, nebude chyba větší než 0,0001 atd. Napíšeme-li více (správných) číslic, chyba se jistě nezvětší. Je-li tedy předem určena požadovaná přesnost, můžeme vždy najít tak velké přirozené číslo p, abychom při napsání p (nebo více) správných číslic desetinného rozvoje čísla $\sqrt{2}$ neudělali chybu větší, než je dovoleno. Snadno se přesvědčíte, že je-li požadovaná přesnost (tj. povolená chyba) dána kladným číslem α, stačí najít takové přirozené číslo p, že $p \geq |\log \alpha|$.

Napsané desetinné zlomky definují jistou posloupnost racionálních čísel r_n, jejíž n-tý člen dostaneme jako desetinný zlomek, příslušný číslu $\sqrt{2}$, o „délce" n. Podle toho, co jsme řekli, má posloupnost $\{r_n\}_1^\infty$ tuto vlastnost: je-li α kladné číslo, pak rozdíl $|\sqrt{2} - r_n|$ je menší než α pro všechna „dostatečně velká" přirozená n. Můžeme tedy říci, že $\sqrt{2}$ je jistá mez či hranice, k níž se členy posloupnosti blíží. Vyslovíme nyní definici, která vystihne to, co je na našem příkladu podstatné.

Definice 4. Číslo a se nazývá *limitou posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, jestliže platí: ke každému kladnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená n, $n \geq n_0$, platí

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

Píšeme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo stručně $a = \lim a_n$, nebo $a_n \to a$.

Jestliže posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ má limitu a, říkáme, že *konverguje k a* nebo že je *konvergentní*.

Je třeba si uvědomit, že číslo n_0 závisí obecně na čísle ε. To můžeme vyjádřit zápisem $n_0 = n_0(\varepsilon)$, který říká, že n_0 je funkcí ε. Nemůžeme tedy (až na zcela jednoduché případy) najít takové pevné n_0, aby pro jakékoliv kladné číslo ε platila nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro všechna přirozená n, $n \geq n_0$. Uvažujeme-li ε velké, stačí často volit n_0 poměrně malé; někdy platí požadovaná nerovnost pro všechna přirozená čísla n, takže můžeme volit $n_0 = 1$. Zmenšíme-li číslo ε, je obvykle nutno číslo n_0 zvětšit, jak to uvidíme v příkladech.

Naše definice skutečně vyjadřuje, že od jistého indexu leží již všechny další členy posloupnosti velmi blízko číslu a; přitom význam rčení „velmi blízko" můžeme konkretizovat volbou čísla ε. Obráceně: jestliže chceme znát číslo a s jistou (danou) přesností, víme, že stačí místo něj zjistit nějaký „dostatečně vzdálený" člen posloupnosti; chyba pak jistě nebude větší, než požadujeme. Samozřejmě význam slov „dostatečně vzdálený" se mění nejen s požadovanou přesností, ale je různý pro různé posloupnosti.

Dohoda o označení. V dalším výkladu se budeme velmi často setkávat s množinou všech přirozených čísel a s jejími podmnožinami určitého typu. Zavedeme proto pro množinu přirozených čísel stálé označení $\mathbf{N}$ a pro množinu, která obsahuje přirozené číslo n_0 a všechna přirozená čísla větší než n_0, označení $\mathbf{N}[n_0]$. Je tedy $\mathbf{N}[n_0] = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq n_0\}$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}[1]$.

Je jasné, že existují posloupnosti, které nemají limitu. Velmi jednoduchým příkladem takové posloupnosti je posloupnost $\{n\}_1^\infty$. Skutečně, kdyby číslo p bylo limitou této posloupnosti, existovalo by takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathbf{N}[n_0]$ by platilo

$$|n - p| < \frac{1}{3}$$

$\left(\text{zvolili jsme } \varepsilon = \frac{1}{3}\right)$. Potom však by platilo také

$$|(n + 1) - p| < \frac{1}{3},$$

neboť je-li $n \in N\,[n_0]$, je také $n + 1 \in N\,[n_0]$. Na druhé straně však trojúhelníková nerovnost dává (viz pozn. pod čarou na str. 21)

$$|(n + 1) - p| \geq ||(n + 1) - n| - |n - p|| > \left|1 - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3},$$

což je spor. Číslo p (které bylo zvoleno libovolně) není tedy limitou posloupnosti $\{n\}_1^\infty$.

Nejjednodušší posloupností, která má limitu, je tzv. *konstantní posloupnost*, tj. posloupnost, jejíž všechny členy se navzájem rovnají: $a_n = a$ pro všechna $n \in N$. Pak zřejmě $\lim a_n = a$, neboť $|a_n - a| = 0$ a tedy $|a_n - a| < \varepsilon$ pro všechna $n \in N$ a jakékoliv kladné číslo ε.

Na základě naší úvodní úvahy můžeme očekávat, že posloupnost nemůže mít dvě různé limity: to by znamenalo, že členy posloupnosti vyjadřují s libovolnou předem danou přesností dvě různá čísla: např. daný desetinný rozvoj by neurčoval jednoznačně reálné číslo. Skutečně, platí tato věta:

Věta 1. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Buď $\{a_n\}_1^\infty$ posloupnost a předpokládejme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a'$, $a \neq a'$. Potom je

$\frac{1}{2}|a - a'| > 0$ a tedy podle definice limity existuje takové přirozené číslo n_1, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}|a - a'|\,. \tag{4}$$

Podobně existuje přirozené číslo n_2 takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_2]$ platí

$$|a_n - a'| < \frac{1}{2}|a - a'|\,. \tag{5}$$

Pro přirozená čísla $n \geq \max(n_1, n_2)$ platí tedy obě nerovnosti (4), (5); z toho snadno odvodíme spor:

$$|a - a'| \leq |a - a_n| +$$

$$+ |a_n - a'| < \frac{1}{2}|a - a'| + \frac{1}{2}|a - a'| = |a - a'|\,.$$

Příklad 13. Platí $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$

Důkaz. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, zvolíme za n_0 nějaké přirozené číslo větší než $1/\varepsilon$ (např. $n_0 = [1/\varepsilon] + 1$). Pak $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ a pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon\,.$$

Poznámka. V důkazu jsme v podstatě použili jediný fakt: totiž že ke každému reálnému číslu existuje číslo větší. To ostatní byla „jen“ technická záležitost — i když právě ta může být někdy nejobtížnější.

Příklad 14. Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

Důkaz. Jest

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n};$$

je-li $\varepsilon > 0$, zvolme $n_0 = [1/\varepsilon] + 1$ jako v předešlém příkladu 13. Pak zřejmě platí

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

pro všechna čísla $n \in \mathrm{N}\ [n_0]$.

Příklady 13, 14 nás vedou k formulaci věty, jejíž důkaz přenecháme čtenáři jako cvičení.

Věta 2. *Buď $\{a_n\}_1^\infty$ posloupnost, a reálné číslo, $b_n = |a_n - a|$. Pak platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ právě tehdy, jestliže* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

V příkladu 13 jsme viděli, že ve volbě čísla n_0 (při daném $\varepsilon > 0$) máme jistou volnost: stačilo vybrat je tak, aby bylo $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Kdyby bylo např. $\varepsilon = \dfrac{1}{1000}$, můžeme volit za n_0 číslo 1001 nebo kterékoliv větší přirozené číslo. Kdybychom tedy změnili třeba prvních 10 000 členů posloupnosti (např. je všechny zvětšili na číslo 1), nijak to podstatně neovlivní naši úvahu: stačí vzít $n_0 = 10\,001$. To nás vede k následující větě.

Věta 3. *Jsou-li* $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$ *posloupnosti a existuje-li takové přirozené číslo* k, *že platí* $a_n = b_n$ *pro všechna* $n \in \mathrm{N}\,[k]$, *pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a \tag{6}$$

právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,. \tag{7}$$

Důkaz. Nechť platí (7). Buď $\varepsilon > 0$ a nechť n_0 je přirozené číslo takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon\,. \tag{8}$$

Zvolme $n_1 = \max\,(n_0, k)$. Pak pro $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí současně nerovnost (8) a rovnost $b_n = a_n$, tedy

$$|b_n - a| < \varepsilon\,.$$

Tím je dokázáno (6) a tedy i věta 3, neboť obrácené tvrzení plyne ihned záměnou a_n, b_n.

Podobného typu je následující věta, jejíž důkaz přenecháváme čtenáři:

Věta 4. *Buďte* $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$ *posloupnosti a nechť existuje takové celé číslo* k, *že* $b_n = a_{n+k}$ *pro všechna přirozená* n, *pro něž je* $n + k > 0$. *Pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, *právě když* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Poznámka. Všimněte si, že k může být i záporné, tedy můžeme členy posloupnosti „posunout dopředu“ i „dozadu“.

Následující věta vyjadřuje souvislost mezi pojmem ohraničenosti posloupnosti a její konvergencí.

Věta 5. *Každá konvergentní posloupnost je ohraničená.*

Důkaz. Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je konvergentní posloupnost, tj. existuje

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Podle definice existuje číslo n_1 takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí

$$|a_n - a| < 1.$$

(Zvolili jsme $\varepsilon = 1$.) Avšak potom zřejmě platí pro všechna $n \in \mathrm{N}$

$$|a_n| \leq K,$$

kde $K = \max\,(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, |a| + 1)$, a tedy posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená.

Ohraničenost je tedy podle věty 5 nutnou podmínkou k tomu, aby posloupnost konvergovala. Není však podmínkou postačující, neboť existují ohraničené posloupnosti, které nemají limitu. Ukážeme si takovou posloupnost.

Příklad 15. Položme $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n}{n+1}$. Pak platí $|a_n| \leq 1$ pro všechna přirozená n, takže posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená. Protože $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, je posloupnost absolutních hodnot $\{|a_n|\}_1^\infty$ zřejmě rostoucí. Protože členy původní posloupnosti střídají znaménka (liché členy jsou záporné, sudé jsou kladné), odvodíte odtud snadno nerovnosti $a_{2k} < a_{2(k+1)}$, $a_{2k-1} > a_{2k+1}$ pro všechna přirozená k a tedy také

$$a_{2k} \geq a_2 = \frac{2}{3}, \quad a_{2k+1} \leq a_1 = -\frac{1}{2},$$

$$a_{2k} - a_{2k+1} \geq \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

Předpokládejme nyní, že $\lim a_n$ existuje a označme ji a. Pak existuje takové $n_0 \in \mathbf{N}$, že pro všechna $n \in \mathbf{N}\,[n_0]$ platí

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}$$

$\left(\text{zvolili jsme } \varepsilon = \frac{1}{2}\right)$. Zvolme takové sudé číslo $n = 2k$, že $2k \in \mathbf{N}\,[n_0]$. Potom i $2k + 1 \in \mathbf{N}\,[n_0]$. Platí tedy

$$|a_{2k} - a| < \frac{1}{2}, \quad |a_{2k+1} - a| < \frac{1}{2}$$

a z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$|a_{2k} - a_{2k+1}| \leq |a_{2k} - a| + |a_{2k+1} - a| < 1.$$

To však je spor, neboť jsme již odvodili, že platí

$$a_{2k} - a_{2k+1} \geq \frac{7}{6}.$$

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ tedy nemá limitu.

Příklad 9 ukazuje, že posloupnost $P(n)/Q(n)$, kde P, Q jsou polynomy, může mít limitu jen tehdy, je-li stupeň polynomu P menší či roven stupni polynomu Q. Dá se dokázat, že v tom případě skutečně limita existuje. Ale jak vypočítat její hodnotu? K tomu nám poslouží následující věta (jejíž dosah je ovšem mnohem širší).

Věta 6. *Je-li* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, *pak platí*

$$\lim (a_n + b_n) = a + b, \tag{9}$$

$$\lim a_n b_n = ab. \tag{10}$$

Je-li navíc $b \neq 0$, *je také*

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}. \tag{11}$$

Poznámka. Z věty ovšem plyne (za stejných předpokladů)

$$\lim (a_n - b_n) = \lim [a_n + (-b_n)] =$$

$$= \lim a_n + \lim (-b_n) = \lim a_n + \lim (-1) \lim b_n =$$

$$= \lim a_n - \lim b_n = a - b$$

(neboť $\lim (-1) = -1$, jak snadno ověříte),

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim a_n \frac{1}{b_n} = \lim a_n \lim \frac{1}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ při } b \neq 0.$$

Ve formulaci věty jsme nepředpokládali, že všechna b_n jsou různá od nuly, takže $\frac{1}{b_n}$ nemusí být pro některé n definováno. Dokážeme však pomocnou větu, která zaručí, že od jistého indexu jsou již všechny členy posloupnosti, jejíž limita je různá od nuly, rovněž nenulové, takže „neurčitých" je nejvýše konečný počet členů, který podle věty 3 nemá na existenci a hodnotu limity vliv. (Srov. upozornění v 1.2 na str. 13.)

Pomocná věta. *Jestliže existuje* $\lim b_n$ *a je různá od nuly, pak existuje takové číslo* $\beta > 0$ *a takové přirozené číslo* n_1, *že pro všechna* $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ je $|b_n| > \beta$ *(a tedy jistě* $b_n \neq 0$) *a znaménko* b_n *je stejné jako znaménko* $\lim b_n$.

Důkaz. Označme $\lim b_n = b$. Pak existuje takové n_1, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí $|b_n - b| < \frac{1}{2}\,|b|$.

Ukážeme, že $\beta = \frac{1}{2}\,|b|$ splňuje požadavky pomocné věty. Skutečně, z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme snadno

$$|b_n| \geq ||b| - |b_n - b|| > |b| - \frac{1}{2}\,|b| = \frac{1}{2}\,|b| = \beta .$$

Kdyby znaménko b_n pro $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ bylo opačné než znaménko b, bylo by $|b_n - b| = |b| + |b_n| \geq |b| > 0$, což je ve sporu s nerovností $|b_n - b| < \frac{1}{2}\,|b|$.

Vraťme se nyní k důkazu věty 6.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$, položme $\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{2}\,\varepsilon > 0$. Pak existují taková přirozená čísla n_1, n_2, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ platí

$$|a_n - a| < \varepsilon' \tag{12}$$

a pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_2]$ platí

$$|b_n - b| < \varepsilon''. \tag{13}$$

Položme $n_0 = \max\,(n_1, n_2)$. Z nerovností (12), (13) plyne pomocí trojúhelníkové nerovnosti:

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + \\ + |b_n - b| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon$$

pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$. Platí tedy (9).

Protože posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ je konvergentní, je podle věty 5 ohraničená. Existuje tedy takové číslo $K > 0$, že platí $|b_n| \leq K$ pro všechna přirozená n. Předpokládejme nyní, že $a \neq 0$. Buď $\varepsilon > 0$ a položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2K}$, $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2|a|}$. Najdeme opět taková n_1, n_2, že platí (12) pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ a (13) pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_2]$. Pak pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$, $n_0 = \max\,(n_1, n_2)$, platí $|a_nb_n - ab| \leq |a_nb_n - ab_n| + |ab_n - ab| = |b_n|\,.\,|a_n - a| + |a|\,.\,|b_n - b| < K\varepsilon' + |a|\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Platí tedy (10). Je-li $a = 0$, je $ab = 0$, $|a_nb_n| \leq K|a_n|$. (Číslo K bylo zvoleno v předchozí části důkazu.) Buď $\varepsilon > 0$ a položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Existuje takové n_1, že platí $|a_n| < \varepsilon'$ pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ a tedy

$$|a_nb_n - 0| = |a_nb_n| \leq K|a_n| < K\varepsilon' = \varepsilon\,.$$

Vzorec (10) je dokázán.

V důkazu vztahu (11) budeme postupovat trochu jinak než v prvních dvou částech důkazu. Tam volba čísel ε', ε'' zdánlivě „spadla z nebe". Ve skutečnosti byla však důsledkem jisté předběžné úvahy, kterou v tomto případě naznačíme. Výraz, o který nám jde, je $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right|$. Potřebujeme jej odhadnout pomocí výrazu $|b_n - b|$, který umíme „udělat libovolně malý". Platí

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_nb}\right| < \frac{|b_n - b|}{\frac{1}{2}\,|b|\,.\,|b|}\,,$$

pokud $n \in N[n_1]$, kde n_1 má význam z předchozí pomocné věty. Aby výraz na pravé straně nerovnosti byl menší než dané ε, musí být $|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}$. Toto číslo zvolíme za ε', najdeme k němu n_0 z definice limity atd. Čtenář si nyní již snadno provede postup přísně deduktivním způsobem jako v předchozích částech důkazu.

Příklad 16. Jaká je limita posloupnosti $\left\{\frac{3n^2 - 5n + 1}{7n^2 + 8}\right\}_1^\infty$?

Pro libovolné $n \in N$ můžeme psát

$$\frac{3n^2 - 5n + 1}{7n^2 + 8} = \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{7 + \frac{8}{n^2}}.$$

Protože podle příkladu 13 a podle věty 6 je $\lim \frac{1}{n} = 0$, $\lim \frac{1}{n^2} = \lim \frac{1}{n} \lim \frac{1}{n} = 0$ atd., existují limity všech sčítanců na pravé straně rovnosti (jak v čitateli tak i ve jmenovateli). Podle věty 6 tedy existuje limita dané posloupnosti a platí

$$\lim \frac{3n^2 - 5n + 1}{7n^2 + 8} = \frac{3 - 5\lim\frac{1}{n} + \lim\frac{1}{n^2}}{7 + 8\lim\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{7},$$

Z tohoto příkladu snadno odvodíme obecné pravidlo pro výpočet limity posloupností typu $\frac{P(n)}{Q(n)}$: dělíme čitatele a jmenovatele nejvyšší mocninou n, která je ve jmenovateli, a škrtneme všechny členy tvaru c/n^p, kde p je přirozené číslo. Zbude nám zlomek, udávající hodnotu limity. V čitateli mohou ovšem „zmizet“ všechny členy (je-li stupeň mnohočlenu P menší než stupeň mnohočlenu Q); pak je limita rovna nule. Je-li stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, nemůžeme ovšem této metody použít, neboť v čitateli by se objevily členy tvaru cn^p, kde p je přirozené číslo. Víme však již z věty 5 a z příkl. 9, že v tomto případě limita neexistuje.

2.2. BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA A KONVERGENCE MONOTÓNNÍ POSLOUPNOSTI

I při řešení zcela elementárních matematických úloh musíme často uvažovat o tzv. existenčních otázkách. Příkaz „řešte danou soustavu rovnic“ obsahuje ve skutečnosti dvě úlohy: především zjistit, zda řešení existuje, a pak (pokud odpověď na první otázku je kladná) najít jeho hodnotu. Zanedbání prvního kroku může vést k hrubým chybám a zcela nesprávnému výsledku.

Podobně je tomu i tehdy, zabýváme-li se posloupnostmi. Otázka „které číslo je limitou dané posloupnosti?“ není vlastně zcela přesně formulována a je třeba jí rozumět takto: Má daná posloupnost limitu? Jestliže ano, jaká je její hodnota? Otázka existence limity je tím závažnější, že často nějaké číslo přímo definujeme jako limitu nějaké posloupnosti. Takovým číslem je např. základ přirozených logaritmů e, který definujeme jako limitu posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_1^\infty$ (viz příkl. 3). (O tom, že tato limita existuje, se přesvědčíme v příkl. 18.)

Uvedeme si nyní bez důkazu jednu důležitou větu, která udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby posloupnost měla limitu.

Věta 7. (Bolzanova-Cauchyova podmínka). *Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je konvergentní právě tehdy, jestliže je splněna Bolzanova-Cauchyova podmínka:*

Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna čísla $m \in \mathbf{N}\,[n_0]$, $n \in \mathbf{N}\,[n_0]$ platí

$$|a_m - a_n| < \varepsilon\,.$$

Tato věta má velkou důležitost pro teoretické úvahy o existenci limity. Její výhodou je, že není třeba předem znát hodnotu limity: Bolzanova-Cauchyova podmínka se týká jen členů posloupnosti.

Poznámka. Důkaz nutnosti Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro konvergenci posloupnosti je snadný: platí totiž $|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a|$. Je-li $a = \lim a_n$, jsou oba členy na pravé straně nerovnosti malé (pro dostatečně velká m, n), takže i levá strana je malá. Důkaz postačitelnosti této podmínky však podstatně závisí na charakteru množiny reálných čísel, totiž, lidově řečeno, na skutečnosti, že množina reálných čísel nemá žádné „díry“. Kdybychom znali jen racionální čísla, věta by neplatila.

Následující tvrzení, týkající se monotónní posloupnosti, je s větou 7 ekvivalentní.

Věta 8. *Každá monotónní ohraničená posloupnost má limitu.*

Protože víme, že každá konvergentní posloupnost je ohraničená, můžeme tuto větu formulovat i jako nutnou a postačující podmínku konvergence monotónní posloupnosti.

Věta 8'. *Monotónní posloupnost má limitu, právě když je ohraničená.*

Větu 8 nebudeme dokazovat. Její tvrzení zní však velmi přijatelně. Představme si, že máme např. neklesající ohraničenou posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$. Nechť číslo K je takové, že platí $a_n \leq K$ pro všechna přirozená n. Tuto nerovnost splňují ovšem různá čísla K (dokonce nekonečně mnoho). Není-li zvolené číslo nejmenší možné, pro něž ještě nerovnost $a_n \leq K$ platí, zmenšíme je „jak jen je možno" (to je ovšem velmi neurčité vyjádření, které si dovolíme jen v této názorné úvaze). To znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje a_p takové, že $a_p > K - \varepsilon$ a tedy $0 \leq K - a_p < \varepsilon$ (jinak bychom mohli číslo K ještě dále zmenšit o číslo ε). Z monotonie posloupnosti plyne, že $a_n \geq a_p$ pro všechna $n \in \mathrm{N}\ [p]$, a odtud dostáváme, že také

$$0 \leq K - a_n < \varepsilon$$

pro všechna taková n. A to znamená, že číslo K je limitou posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$. Řečeno velmi názorně (a nepřesně), členy posloupnosti jsou svými „předchůdci" tlačeny stále blíže k číslu K, jež je jakousi „bariérou", přes kterou se nemohou dostat. A protože nemohou ani „couvnout" (to by bylo ve sporu s monotonií), hromadí se stále blíže a stále hustěji u oné „bariéry".

Příklad 17. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$, $a_n = \sqrt[n]{n}$ má limitu.

Dokažme nejprve, že platí

$$\sqrt[n+1]{n+1} \leq \sqrt[n]{n} \tag{14}$$

pro všechna přirozená $n \geq 3$. Tvar členů posloupnosti naznačuje, že bude asi výhodnější zkoumat podíl dvou následujících členů než jejich rozdíl. Protože všechny členy posloupnosti jsou kladné, můžeme nerovnost (14) napsat ekvivalentně ve tvaru

$$\sqrt[n+1]{n+1}/\sqrt[n]{n} \leq 1\,.$$

Levá strana této nerovnosti je

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}} = \left[\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}} = \left[\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}.$$

Nyní použijeme binomickou větu. Abychom dostali žádanou nerovnost, budeme potřebovat vhodný odhad kombinačního čísla $\binom{n}{k}$ pro $k \geq 2$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}.$$

Teď už je vše snadné. Platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \leq$$

$$\leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3\,.$$

Poslední nerovnost plyne ihned ze vzorce pro součet konečného počtu členů geometrické posloupnosti (viz příkl. 5)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Můžeme tedy psát

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}} < \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} \leq 1,$$

pokud $n \in \mathrm{N}$ [3].

Uvažme nyní posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, $b_n = \sqrt[n+2]{n+2}$. Pro ni platí $b_n = a_{n+2}$ pro všechna přirozená n. Podle toho, co jsme právě dokázali, je posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ monotónní (klesající). Je ovšem také ohraničená, neboť platí $1 \leq \leq b_n \leq b_1 = \sqrt[3]{3}$. Má tedy limitu a podle věty 4 má limitu také posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$, přičemž

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Poznámka. V posledním odstavci jsme podrobně provedli úvahu, kterou v podobných případech většinou odbudeme mnohem stručněji. Ve větě 8 totiž není nutné předpokládat, že vyšetřovaná posloupnost je monotónní. Stačí, je-li monotónní „až na konečný počet členů“, tj. stane-li se monotónní, změníme-li vhodným způsobem konečný počet jejích členů. Jak víme z věty 3, nezáleží existence ani hodnota limity na konečném počtu členů.

Příklad 18. Dokážeme, že posloupnosti $e_n = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $e_n^* = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ z příkladů 11, 12 mají obě tutéž limitu. Z příkl. 11, 12 víme, že první posloupnost je rostoucí, druhá klesající. Protože zřejmě $e_n < e_n^*$ pro všechna přirozená n, platí

$$1 < e_n < e_n^* < e_1^* = 4$$

a tedy obě posloupnosti jsou ohraničené. Existují tedy limity

$$\lim_{n\to\infty} e_n, \lim_{n\to\infty} e_n^* .$$

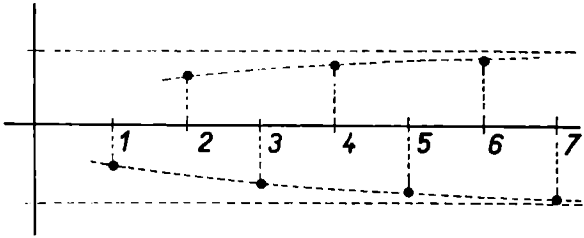
Dále je $e_n^* = e_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ a podle věty 6

$$\lim e_n^* = \lim e_n . \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim e_n .$$

2.3. HROMADNÉ BODY A VYBRANÉ POSLOUPNOSTI

V příkladu 15 jsme vyšetřovali posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}_1^\infty$ a ukázali jsme, že nemá limitu. Její členy se totiž „hromadí" v blízkosti dvou různých bodů, -1 a 1, resp. se blíží oběma rovnoběžkám s osou x ve vzdálenosti 1 (viz obr. 3). To nás vede k definici hromadného bodu posloupnosti:

Definice 5. Číslo a se nazývá *hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}_1^\infty$, jestliže platí: ke každému číslu $\varepsilon > 0$



Obr. 3

existuje nekonečně mnoho přirozených čísel p takových, že

$$|a_p - a| < \varepsilon\,. \tag{15}$$

Rozdíl mezi limitou a hromadným bodem posloupnosti (ale současně i příbuznost těchto pojmů) vynikne nejlépe, vyslovíme-li definici limity takto:

Číslo a se nazývá limitou posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, jestliže platí: ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje jen konečný počet přirozených čísel q takových, že neplatí nerovnost $|a_q - a| < \varepsilon$. Odtud ihned plyne toto tvrzení:

Důsledek. *Limita posloupnosti (existuje-li) je jejím hromadným bodem.*

Obrácené tvrzení ovšem neplatí, neboť je-li a hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, může se stát, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ platí pro nekonečně mnoho členů posloupnosti nerovnost $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

Příklad 19. Posloupnost $\{s_n\}$, $s_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ má tři hromadné body: -1, 0, 1. Skutečně, pro n sudé je $s_n = 0$, pro $n = 4k + 1$ (k přirozené) je $s_n = 1$, pro $n =$

$= 4k - 1$ je $s_n = -1$. Ve všech třech případech existuje tedy nekonečně mnoho členů posloupnosti, které se dokonce přímo rovnají hromadnému bodu a tedy splňují nerovnost (15) s jakýmkoliv kladným číslem ε.

Příklad 20. Pro posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ z příkladu 15 je číslo 1 hromadný bod. Skutečně, víme již, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$; pro každé $\varepsilon > 0$ existuje tedy takové přirozené číslo n_0, že pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí $\left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$. Avšak pro n sudé je $\dfrac{(-1)^n n}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$; všechny sudé členy posloupnosti $\{a_n\}$ splňují tedy při $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ nerovnost $|a_n - 1| < \varepsilon$. Podobně můžeme použít zřejmého vztahu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{n+1} = -1$ k důkazu, že také -1 je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ z příkl. 15.

Snadno se dokáže, že vyšetřovaná posloupnost nemá žádný jiný hromadný bod. Předpokládejme, že a je její hromadný bod, $-1 \neq a \neq 1$, tedy $|a| \neq 1$.

Budiž $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\,|1 - |a|| > 0$. Protože platí $|a_n| = \dfrac{n}{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, existuje takové přirozené číslo n_0, že pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ je $|1 - |a_n|| < \varepsilon$. Tedy pro $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ je $|a_n - a| \geq ||a_n| - |a|| = ||a_n| - 1 - (|a| - 1)| \geq$ $\geq |1 - |a|| - |1 - |a_n|| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$. Nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ může tedy platit nejvýše pro konečný počet indexů $1, 2, \ldots, n_0 - 1$, což je spor s předpokladem, že a je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad 21. Víme již z příkladu 8, že všechna racionální čísla lze uspořádat v posloupnost. Označme ji $\{r_n\}_1^\infty$. Je-li ϱ jakékoliv reálné číslo, je ϱ hromadný bod posloupnosti $\{r_n\}_1^\infty$.

Důkaz. Je-li $\varepsilon > 0$, existuje nekonečně mnoho racionálních čísel r takových, že $|r - \varrho| < \varepsilon$. (Rozmyslete si toto tvrzení! Častěji se používá slabší tvrzení, totiž že existuje nějaké (nejméně jedno) racionální číslo takové, že nerovnost platí.) Ale všechna tato čísla r jsou členy posloupnosti $\{r_n\}_1^\infty$, což dokazuje, že ϱ je její hromadný bod.

Příklady 19—21 naznačují cestu k odlišné charakterizaci hromadného bodu posloupnosti: Vybereme-li vhodným způsobem jen některé členy původní posloupnosti (musí jich být ovšem nekonečně mnoho) a seřadíme je podle rostoucích indexů, bude hromadný bod limitou této „vybrané posloupnosti“. Abychom mohli uvozovky vynechat, budeme pojem vybrané posloupnosti přesně definovat.

Definice 6. Budiž $\{k_n\}_1^\infty$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, $\{a_n\}_1^\infty$ posloupnost. Posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, kde $b_n = a_{k_n}$, nazýváme *vybranou posloupností* nebo *podposloupností posloupnosti* $\{a_n\}_1^\infty$.

Vybranou posloupnost z definice 6 zapisujeme často přímo ve tvaru $\{a_{k_n}\}_{n=1}^\infty$. Známe-li obecný vzorec pro k_n, např. $k_n = 5n - 2$, můžeme psát také $\{a_{5n-2}\}_1^\infty$ apod. Jiný příklad: je-li $a_n = \dfrac{1}{n}$, $k_n = 2^n$, má vybraná posloupnost členy $a_{k_n} = a_{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$.

Nyní můžeme vyslovit důležitou větu:

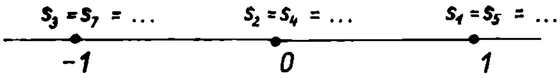
Věta 9. *Číslo* a *je hromadným bodem posloupnosti* $\{a_n\}_1^\infty$, *právě když existuje taková vybraná posloupnost* $\{a_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, *že* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Důkaz. Je-li a hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, definujeme posloupnost $\{k_n\}_1^\infty$ takto: zvolíme takové k_1, aby $|a_{k_1} - a| < 1$; je-li zvoleno $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$, zvolíme takové $k_n > k_{n-1}$, aby $|a_{k_n} - a| < \dfrac{1}{n}$. Takové k_n vždy existuje, neboť nerovnost $|a_p - a| < \dfrac{1}{n}$ platí pro nekonečně mnoho indexů a tedy jistě pro nějaký index větší než k_{n-1}. Posloupnost $\{k_n\}_1^\infty$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Dokážeme, že vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ konverguje k a.

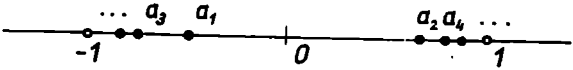
Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje přirozené číslo p takové, že $\dfrac{1}{p} < \varepsilon$. Z konstrukce čísel a_{k_n} je zřejmé, že pro $n \in \mathrm{N}\ [p]$ platí $|a_{k_n} - a| < \dfrac{1}{p} < \varepsilon$. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Nechť obráceně existuje taková vybraná posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^\infty$, že $\lim a_{k_n} = a$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo n_0, že je $|a_n - a| < \varepsilon$ pro nekonečně mnoho indexů n, totiž pro všechny indexy n, splňující podmínku $n = k_m$, $m \geq n_0$. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka. Všimněme si rozdílu v chování posloupností z příkladů 19 a 20. Načrtneme-li členy posloupností na

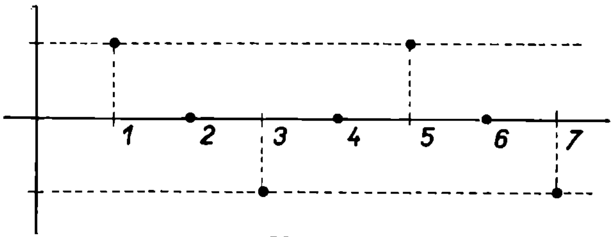


Obr. 4a

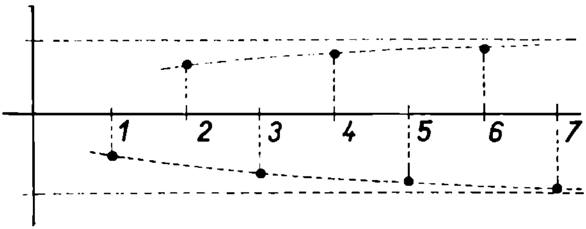


Obr. 4b

číselné ose (obr. 4 a,b), vidíme, že druhý obrázek skutečně odpovídá názorné představě „hromadného bodu", zatímco v prvním případě máme na číselné ose vyznačeny jen tři „izolované" (osamělé) body. To je způsobeno tím, že jsme nakreslili jen členy posloupnosti a nikoliv graf posloupnosti jako zobrazení. Srov. obr. 5 a,b.



Obr. 5a



Obr. 5b

Příklad 22. Zjistěme, zda posloupnost $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n = \frac{n^2 - 1}{n}$ má hromadný bod. Tato posloupnost zřejmě není ohraničená. Napíšeme-li $x_n = \frac{(n + 1)(n - 1)}{n}$, dostaneme ihned nerovnost

$$n - 1 < x_n < n + 1 .$$

Předpokládejme, že číslo a je hromadným bodem naší posloupnosti. Existuje takové přirozené číslo p, že $p \geq a + 1$. Pro všechna přirozená $n \in N[p + 1]$ pak platí

$$x_n > n - 1 \geq p \geq a + 1 . \tag{16}$$

Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pak podle definice hromadného bodu musí existovat nekonečně mnoho takových přirozených čísel n, že

$$|x_n - a| < \frac{1}{2} .$$

Speciálně musí tedy existovat přirozené číslo $m \geq p + 1$ takové, že

$$|x_m - a| < \frac{1}{2} .$$

Avšak to je ve sporu s nerovností (16), v níž místo n píšeme m (to smíme, neboť $m \geq p + 1$). Nemůže tedy posloupnost $\{x_n\}$ mít hromadný bod.

Posloupnosti z příkladů 19—21, které měly hromadné body, byly vesměs ohraničené; posloupnost bez hromadného bodu z příkladu 22 nebyla ohraničená. Zdá se tedy, že mezi existencí hromadného bodu a ohraničeností posloupnosti je nějaký vztah. Tento vztah však není ekvivalencí, jak ukazuje další příklad:

Příklad 23. Posloupnost $\{z_n\}_1^\infty$, $z_n = \dfrac{n^2+1}{n} + (-1)^n n$ není ohraničená, ale má hromadný bod.

Při zkoumání této posloupnosti je rozumné vyšetřit zvlášť liché a zvlášť sudé členy. Jest (pro všechna $k \in \mathrm{N}$)

$$z_{2k-1} = \frac{(2k-1)^2+1}{2k-1} - (2k-1) = \frac{1}{2k-1},$$

$$z_{2k} = \frac{(2k)^2+1}{2k} + 2k = \frac{8k^2+1}{2k}.$$

Platí tedy

$$\lim_{k\to\infty} z_{2k-1} = 0,$$

$$z_{2k} \geq 4k$$

pro všechna přirozená k. Posloupnost $\{z_n\}_1^\infty$ není ohraničená a má hromadný bod 0 (podle věty 9).

Platí však následující důležitá věta:

Věta 10. *Ohraničená posloupnost má aspoň jeden hromadný bod.*

Tato věta je jedním z několika důležitých tvrzení, která jsou navzájem ekvivalentní. Patří k nim věta 7, věta 8 a také tzv. věta o suprému, o níž jsme se zde nezmínili.

Ukažme, že věta 10 je důsledkem věty 7. K tomu dokážeme pomocnou větu.

Pomocná věta. *Z ohraničené posloupnosti lze vybrat posloupnost, splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

Důkaz. Nechť posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená a K je takové číslo, že platí $|a_n| \leq K$ čili $-K \leq a_n \leq K$ pro všechna přirozená n. Vybereme jeden z intervalů $\langle -K, 0\rangle, \langle 0, K\rangle$, v němž leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, označíme jej J_1 a vyberme $b_1 = a_{k_1} \in J_1$. (Je především zřejmé, že takový interval J_1 existuje; leží-li nekonečně mnoho členů posloupnosti v obou intervalech, zvolme pro určitost třeba ten „vpravo". Dále je vidět, že index k_1 můžeme zvolit nejmenší takový, že platí $a_{k_1} \in J_1$. Tím je naše konstrukce již jednoznačně určena.) Délka intervalu J_1 je $d(J_1) = K$. Nyní rozpůlíme interval J_1 a z obou intervalů délky $\frac{1}{2} K$, které tak vzniknou, vybereme opět ten, v němž leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$. (Platí-li to pro oba, vezměme opět ten „vpravo".) Označme jej J_2, takže $J_2 \subset J_1$, $d(J_2) = \frac{1}{2} K$, a vyberme $a_{k_2} \in J_2$ s nejmenším možným indexem k_2 takovým, že současně platí $k_2 > k_1$. Položme $b_2 = a_{k_2}$. Máme-li takto sestrojena čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a intervaly $J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_n$, sestrojíme obdobným způsobem interval $J_{n+1} \subset J_n$ délky $\frac{1}{2^n} K$ a číslo b_{n+1}. (Proveďte si tento krok podrobně!)

Tím je definována posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, která, jak plyne z konstrukce, je vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$. Dokážeme, že $\{b_n\}_1^\infty$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, najdeme takové přirozené číslo p, že $\frac{K}{2^{p-1}} < \varepsilon$. Pak pro $n \in \mathbf{N}\,[p]$ všechny členy b_n leží v intervalu J_p délky $\frac{1}{2^{p-1}} K$; jejich vzdálenost (tj. absolutní hodnota jejich rozdílu) nemůže být větší než $d(J_p)$, takže pro $n \in \mathbf{N}\,[p]$ platí

$$|b_m - b_n| \leq \frac{1}{2^{p-1}} K < \varepsilon\,.$$

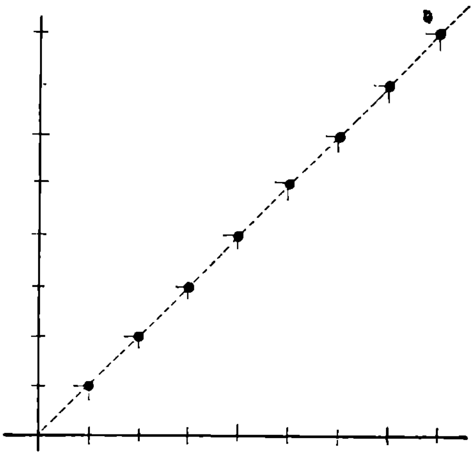
Tím je pomocná věta dokázána.

Vraťme se nyní k důkazu věty 10, který je již snadný. Z ohraničené posloupnosti vybereme podle pomocné věty posloupnost splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Ta má limitu podle věty 7, a podle věty 9 je tato limita hromadným bodem původní posloupnosti. Věta 10 je dokázána.

2.4. NEVLASTNÍ LIMITA

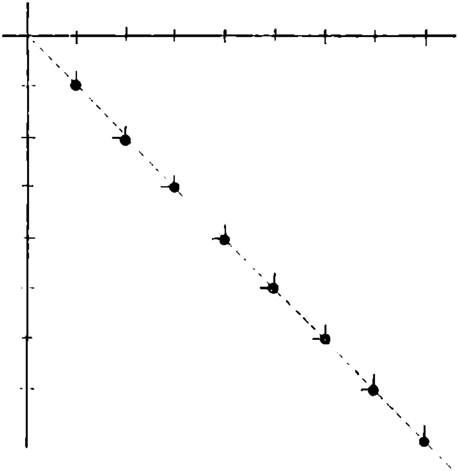
V předešlých dvou kapitolách jsme se zabývali hlavně ohraničenými posloupnostmi. To byl důsledek věty 5. Zavedením pojmu konvergentní posloupnosti jsme rozlišili — jak ukazuje věta 10 a úloha 5 v kap. 2 — ohraničené posloupnosti s jediným hromadným bodem a ohraničené posloupnosti s více hromadnými body. Ty druhé bychom mohli nazvat oscilujícími, neboť jejich členy se jakoby „nemohou rozhodnout“ a kmitají (oscilují) z blízkosti jednoho hromadného bodu do blízkosti jiného. (Přitom není podstatné, zda přímo nabývají hodnoty svého hromadného bodu: srovnej posloupnosti $\{(-1)^n\}_1^\infty$, $\left\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\right\}_1^\infty$.)

Podobné rozlišení je výhodné provést i pro neohraničené posloupnosti. Porovnejme k tomu cíli posloupnosti $\{n\}_1^\infty, \{-n\}_1^\infty, \left\{\frac{1}{2}(n+(-1)^{n-1}n)\right\}_1^\infty, \{(-1)^{n-1}n\}_1^\infty$ a načrtněme jejich grafy (obr. 6 až 9). Budete asi souhlasit s tím, že třetí a čtvrtá posloupnost má opět charakter „oscilující" posloupnosti, zatímco první a druhé bychom mohli „při dobré vůli" přiznat jisté „cílevědomé" chování, připomínající trochu konvergenci. Neexistuje ovšem reálné číslo, jemuž by se členy posloupnosti — ať první či druhé — v rozumném smyslu blížily. Spíše bychom mohli říci, že se nekonečně vzdalují. Proto k zápisu jejich chování použijeme symbolu ∞.

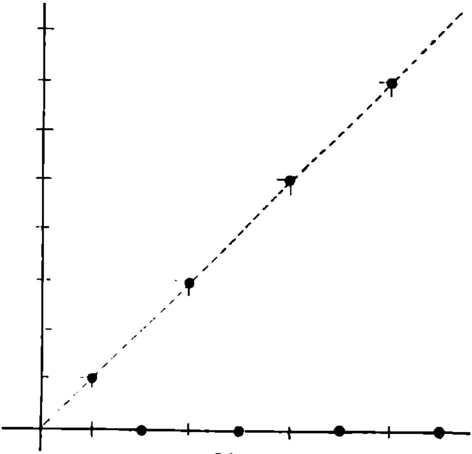


Obr. 6

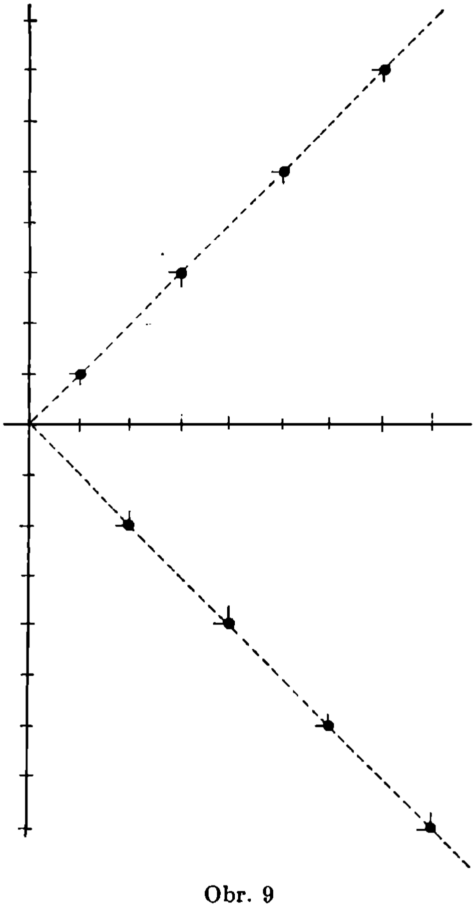
Definice 7. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ má *nevlastní limitu* $+\infty$ (plus nekonečno), jestliže platí: ke každému



Obr. 7



Obr. 8



Obr. 9

číslu K existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí $a_n > K$. Píšeme pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim a_n = +\infty$ nebo $a_n \to +\infty$. Znaménko plus v symbolu $+\infty$ se často vynechává.

Podobně říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ má *nevlastní limitu* $-\infty$ (minus nekonečno), jestliže platí: ke každému číslu K existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí $a_n < K$. Píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim a_n = -\infty$ nebo $a_n \to -\infty$.

Poznámka. Uvědomte si především, že nevlastní limita není limita. To je poněkud neobvyklé: pravoúhlý rovnoběžník určitě je rovnoběžník. Ale připomeňme již okřídlené přirovnání, že nevlastní matka není ve skutečnosti matka.

Dále si všimněte, že členy posloupnosti vystupují v nerovnostech v definici bez absolutních hodnot; proč tomu tak je, pochopíte jistě sami (porovnejte ještě jednou posloupnosti $\{n\}_1^\infty$ a $\{(-1)^{n-1}n\}_1^\infty$.

Obdobně jako v definici 4, i v definici nevlastní limity závisí číslo n_0 na čísle K, tedy $n_0 = n_0(K)$.

A nakonec poznamenejme, že označení „konvergentní" zůstává vyhrazeno pro ty posloupnosti, které mají limitu (někdy říkáme důrazněji vlastní limitu). Posloupnosti, které mají nevlastní limitu ($+\infty$ nebo $-\infty$), se někdy nazývají *divergentní*, jindy *určitě divergentní* (na rozdíl od *neurčitě divergentních*, tj. *oscilujících*). My těchto názvů používat nebudeme.

Mnohé věty z kapitoly 2 se dají přenést na pojem nevlastní limity pouhou záměnou slova „limita" slovem „nevlastní limita". Je to především věta 1, která platí dokonce v silnějším znění, spojujícím pojem limity a nevlastní limity:

Věta 11. *Posloupnost má buď právě jednu limitu, nebo právě jednu nevlastní limitu, nebo nemá limitu, ani nevlastní limitu.*

Také věty 3 a 4 platí, zaměníme-li slovo limita slovem nevlastní limita.

Abychom mohli vyslovit větu o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu ve formálně stejném tvaru jako větu 6 i pro případ, kdy jedna či obě limity na pravé straně jsou nevlastní, museli bychom definovat algebraické operace se symboly $+\infty$, $-\infty$. To v některých případech nečiní potíže (např. $\infty + \infty = \infty$, $a - \infty = -\infty$, je-li a reálné číslo apod.), ale v jiných je nalezení vyhovující definice prakticky nemožné (např. $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ apod. — tzv. *neurčité výrazy*).

Spokojíme se proto s tím, že vyslovíme několik vět podobných větě 6, i když většinou slabších.

Věta 12. *Má-li posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ nevlastní limitu ($+\infty$ nebo $-\infty$) a posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ buď je ohraničená, nebo má tutéž nevlastní limitu jako $\{a_n\}_1^\infty$, pak i posloupnost $\{a_n + b_n\}_1^\infty$ má tutéž nevlastní limitu.*

Důkaz. Mají-li obě posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$ tutéž nevlastní limitu, např. $-\infty$, pak ke každému K existují taková přirozená čísla n_1, n_2, že pro všechna $n \in \mathbf{N}\,[n_1]$ platí $a_n < \min\,(0, K)$ a pro všechna $n \in \mathbf{N}\,[n_2]$ platí $b_n < \min\,(0, K)$. Pro všechna $n \in \mathbf{N}\,[\max\,(n_1, n_2)]$ tedy platí $a_n + b_n < 0 \leq K$, je-li $K \geq 0$, $a_n + b_n < 2K < K$, je-li

$K < 0$. Tedy $a_n + b_n \to -\infty$. Pro nevlastní limitu $+\infty$ je důkaz zcela obdobný.

Je-li např. $\lim a_n = +\infty$, $|b_n| \leq c$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$, pak ke každému K existuje takové n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\ [n_0]$ je $a_n > K + c$. Pro všechna $n \in \mathrm{N}\ [n_0]$ tedy platí

$$a_n + b_n \geq a_n - |b_n| > K + c - c = K\,.$$

Ostatní případy se dokáží obdobně.

Podobnou větu lze dokázat pro limitu součinu, je však třeba rozeznávat případy nevlastních limit $+\infty$ a $-\infty$ a pozměnit předpoklady na posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$. (Srov. úlohu 11 na str. 67.)

Dokážeme nyní jednu větu o limitě podílu, která je v jistém smyslu obecnější.

Věta 13. *Má-li $\{b_n\}_1^\infty$ nevlastní limitu a posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ je ohraničená, je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.*

Důkaz. Nechť $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathrm{N}$. Nechť $b_n \to +\infty$. Buď $\varepsilon > 0$. Existuje takové n_0, že $b_n > \frac{K}{\varepsilon}$ (můžeme ovšem předpokládat, že $K > 0$) pro všechna $n \in \mathrm{N}\ [n_0]$. Pro tato n platí tedy také $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{K}{K/\varepsilon} = \varepsilon$. Tím je věta dokázána pro $b_n \to +\infty$. Jestliže $b_n \to -\infty$, najdeme n_1 takové, že $b_n < -\frac{K}{\varepsilon} < 0$ a tedy $|b_n| = -b_n > \frac{K}{\varepsilon}$. Další postup je stejný.

Ve větě 6 jsme odvodili mj. „vzorec pro limitu podílu“

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n},$$

který platí, existují-li obě limity na pravé straně rovnosti a platí $\lim b_n \neq 0$. Limita vlevo však může existovat i tehdy, když některá (nebo žádná) z limit vpravo neexistuje. (Např. je-li $a_n = b_n \neq 0$ a neexistuje $\lim a_n$.) Zvlášť zajímavý a důležitý je případ, kdy obě posloupnosti jsou neohraničené. Tento případ zahrnuje věta, s jejíž obdobou se setkáte, budete-li dále studovat matematickou analýzu, v teorii funkcí pod názvem *L'Hospitalovo pravidlo*. Její podstata je v tom, že místo členů obou posloupností zkoumáme diference, tj. rozdíly dvou za sebou následujících členů.

Věta 14. *Nechť $\{b_n\}_1^\infty$ je neohraničená rostoucí posloupnost. Nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$. Pak existuje i $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ a obě limity se rovnají.*

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Pak existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_0]$ platí

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < L + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (17)$$

kde $L = \lim\,[(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1})]$.

Použijeme tohoto tvrzení:

Pomocná věta. *Jsou-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ reálná čísla, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ kladná čísla a platí-li*

$$K_1 < \frac{\alpha_i}{\beta_i} < K_2 \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (18)$$

platí také

$$K_1 < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k} < K_2 . \tag{19}$$

Důkaz. Nerovnost dokážeme indukcí. Pro $k = 1$ je její platnost zřejmá. Je-li $k > 1$, označme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1} = A$, $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{k-1} = B$. Je-li $\frac{A}{B} = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$, je $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} = \frac{2\alpha_k}{2\beta_k} = \frac{\alpha_k}{\beta_k}$ a nerovnost (19) není nic jiného než jedna z nerovností (18), která platí podle předpokladu.

Buď nyní např. $\frac{\alpha_k}{\beta_k} < \frac{A}{B}$ a předpokládejme, že platí $K_1 < \frac{A}{B} < K_2$, ale $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} \geq K_2$. Podle indukčního předpokladu platí tím spíše $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} > \frac{A}{B}$, což je totéž jako $(A + \alpha_k) B > A(B + \beta_k)$, neboť ve jmenovatelích zlomků jsou kladná čísla. Odtud snadno dostaneme $\frac{A}{B} < \frac{\alpha_k}{\beta_k}$, což je spor. Platí tedy $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} < K_2$. Podobně dokážeme tuto nerovnost za předpokladu, že $\frac{\alpha_k}{\beta_k} > \frac{A}{B}$. Předpokládáme-li, že platí $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} \geq K_2$, platí tím spíše $\frac{A + \alpha_k}{B + \beta_k} > \frac{\alpha_k}{\beta_k}$, odtud dostaneme jako v prvním případě nerovnost $\frac{\alpha_k}{\beta_k} < \frac{A}{B}$, která je ve sporu s předpokladem. Obdobně se dokáže i druhá část nerovnosti (19).

Pomocné věty můžeme nyní použít na vzorec (17). Položíme-li $a_{n_0+1} - a_{n_0} = \alpha_1, \ldots, a_n - a_{n-1} = \alpha_k$, $b_{n_0+1} - b_{n_0} = \beta_1, \ldots, b_n - b_{n-1} = \beta_k$ (tedy $k = n - n_0$) a $K_1 = L - \frac{\varepsilon}{2}$, $K_2 = L + \frac{\varepsilon}{2}$, dostaneme (pro $n \in \mathbf{N}[n_0 + 1]$)

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

čili

$$\left| \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Nám však jde o rozdíl $\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right|$. Můžeme psát

$$\frac{a_n}{b_n} - L = \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n} + \frac{a_{n_0}}{b_n} - L = \frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} \frac{b_n - b_{n_0}}{b_n} +$$

$$+ \frac{a_{n_0}}{b_n} - L = \left(\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - L \right) \frac{b_n - b_{n_0}}{b_n} + \frac{a_{n_0}}{b_n} +$$

$$+ L \left(\frac{b_n - b_{n_0}}{b_n} - 1 \right) =$$

$$= \left(\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - L \right) \left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n} \right) + \frac{a_{n_0} - b_{n_0} L}{b_n} .$$

Zvolíme-li nyní $n_1 \in \mathbf{N}$ tak velké, aby bylo

(I) $n_1 \geq n_0$,

(II) $0 \leq 1 - \frac{b_{n_0}}{b_n} \leq 1$ pro všechna $n \in \mathbf{N}[n_1]$,

(III) $\left| \frac{a_{n_0} - b_{n_0} L}{b_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}[n_1]$

(rozmyslete si, že podmínkám (II), (III) lze skutečně vyhovět), pak pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[n_1]$ bude platit

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| \leq \left|\frac{a_n - a_{n_0}}{b_n - b_{n_0}} - L\right| \cdot \left|1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\right| + \\ + \left|\frac{a_{n_0} - b_{n_0}L}{b_n}\right| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Platí tedy $\lim\,(a_n/b_n) = L$.

Příklad 24. Posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, $b_n = n$ jistě splňuje předpoklady věty 14. Odtud dostáváme zajímavou větu o konvergenci aritmetických průměrů: *Jestliže posloupnost $\{X_n\}_1^\infty$ konverguje, pak konverguje i posloupnost $\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right\}_1^\infty$ a platí*

$$\lim \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \lim X_n\,.$$

Důkaz. Položíme-li $a_n = X_1 + \ldots + X_n$, je $a_n - a_{n-1} = X_n$, $b_n - b_{n-1} = n - (n-1) = 1$, tedy $\lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim X_n$ a použijeme naší věty.

Konverguje-li posloupnost aritmetických průměrů, nemusí konvergovat původní posloupnost. Ověřte si to na posloupnosti $\{(-1)^n\}_1^\infty$!

Poznámka. Není-li posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$ monotónní (rostoucí), nemusí věta 14 platit. Položme např. $a_n = n^2$ pro všechna přirozená n, $b_n = n^2$ pro n sudé, $b_n = n$ pro n liché. Potom postoupnost $\{a_n/b_n\}_1^\infty$ nemá limitu, neboť pro lichá n platí $a_n/b_n = n$. Avšak označíme-li

$$(a_n - a_{n-1})/(b_n - b_{n-1}) = \Delta_n,$$

platí $\Delta_{2k} = \dfrac{(2k)^2 - (2k-1)^2}{(2k)^2 - (2k-1)} = \dfrac{4k-1}{4k^2 - 2k + 1} \to 0,$

$$\Delta_{2k+1} = \frac{(2k+1)^2 - (2k)^2}{2k+1-(2k)^2} = \frac{4k+1}{-4k^2 + 2k + 1} \to 0.$$

Odtud snadno odvodíme, že $\lim \Delta_n = 0$. Všechy ostatní předpoklady věty 14 jsou splněny, její tvrzení však neplatí.

Věty 14 můžeme užít i na součin dvou posloupností, z nichž jedna konverguje k nule a druhá má nevlastní limitu. Například je-li $\lim c_n = +\infty$, $\lim d_n = 0$ a $\{d_n\}_1^\infty$ je klesající, stačí položit $a_n = c_n$, $b_n = \dfrac{1}{d_n}$. Není-li $\{d_n\}_1^\infty$ klesající, nemusí věta platit. Položte např. $c_n = n^2$, $d_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Pak $c_n d_n = (-1)^n$, takže posloupnost $\{c_n d_n\}_1^\infty$ nemá limitu. Ale při označení zavedeném výše je

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1}^{-1} - d_n^{-1}} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{(-1)^{n+1}(n+1)^2 - (-1)^n n^2} =$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2n^2 + 2n + 1} \to 0\,.$$

Poznámka. Předpoklady věty 14 mohou být splněny i tehdy, má-li posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ nevlastní limitu. (Je-li $\{a_n\}_1^\infty$ ohraničená, máme „lepší“ větu 13.) Prozkoumali jsme tedy jeden z „neurčitých výrazů“, totiž $\dfrac{\infty}{\infty}$ $\left(\text{čili, což je vlastně totéž, } \dfrac{0}{0}\right)$.

Úlohy

Ve všech úlohách jsou $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$, $\{c_n\}_1^\infty$ posloupnosti.

1. Dokažte: Je-li $a_n \leq b_n$ pro všechna přirozená n a existují-li limity $a = \lim a_n$. $b = \lim b_n$, platí $a \leq b$. Ukažte na příkladu, že ze vztahu $a_n < b_n$ pro všechna přirozená n neplyne obecně $a < b$, ale jen $a \leq b$.
2. Dokažte: Je-li $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna přirozená n a existují-li limity $\lim a_n$, $\lim c_n$ a jsou-li si rovny, pak existuje také $\lim b_n$ a platí $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$. (Platí i pro nevlastní limity.)
3. Dokažte, že $\lim a_n = 0$ platí právě tehdy, když $\lim |a_n| = 0$.
4. Dokažte, že pro každé číslo $a > 1$ a každé celé číslo k platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

(Návod: Zkoumejte podíl dvou následujících členů posloupnosti a použijte úlohu 2, v níž položíte $a_n = 0$ a za $\{c_n\}_1^\infty$ vezmete vhodnou geometrickou posloupnost s kladným kvocientem menším než jedna.)

5. Dokažte: Hromadný bod ohraničené posloupnosti je její limitou právě tehdy, když je jejím jediným hromadným bodem.
6. Dokažte (bez použití věty 7), že každá posloupnost splňující Bolzanovu-Cauchyovu podmínku je ohraničená.
7. Dokažte (bez použití věty 7), že posloupnost, která má dva (nebo více) hromadné body, nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
8. Dokažte: Monotónní neohraničená posloupnost má nevlastní limitu.
9. Dokažte: Platí $\lim |a_n| = +\infty$ právě když $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.

(Použijte úlohu 3.)

10. Dokažte: Nechť $P_r(x) = p_0x^r + p_1x^{r-1} + \ldots + p_{r-1}x + p_r$, $Q_s(x) = q_0x^s + q_1x^{s-1} + \ldots + q_{s-1}x + q_s$, $p_0q_0 \neq 0$, $r > s$. Pak platí: Je-li $p_0q_0 > 0$, je

$$\lim_{n \to \infty} [P_r(n)/Q_s(n)] = +\infty;$$

je-li $p_0q_0 < 0$, je

$$\lim_{n \to \infty} [P_r(n)/Q_s(n)] = -\infty.$$

11.* Je-li $\lim a_n = +\infty$ a existuje-li kladné číslo b a přirozené číslo k takové, že pro všechna $n \in \mathrm{N}\,[k]$ platí $b_n \geq b$, pak

$$\lim a_nb_n = +\infty.$$

Jak musíme změnit předpoklady na posloupnost $\{b_n\}_1^\infty$, aby tvrzení zůstalo správné, platí-li pro posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$

$$\lim a_n = -\infty?$$

Vyslovte a dokažte obdobné věty, jejichž tvrzení bude

$$\lim a_nb_n = -\infty.$$

12.* Udejte příklady posloupností $\{a_n\}_1^\infty$, $\{b_n\}_1^\infty$, pro něž platí $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$ a přitom $\lim (a_n - b_n)$ $\left(\text{resp. } \lim \dfrac{a_n}{b_n}\right)$ a) existuje, b) neexistuje, c) je nevlastní.