Uspořádané množiny

Výsledky cvičení

In: Ladislav Beran (author): Uspořádané množiny. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1978. pp. 59–71.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403927

VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. kapitola

1. Jedná se o všechny podmnožiny kartézského součinu $\{a, b\} \times \{a, b\}$, tj. nacházíme právě tyto relace: $\varrho_1 = \emptyset$, $\varrho_2 = \{(a, a)\}$, $\varrho_3 = \{(a, b)\}$, $\varrho_4 = \{(b, a)\}$, $\varrho_5 = \{(b, b)\}$, $\varrho_6 = \{(a, a), (a, b)\}$, $\varrho_7 = \{(a, a), (b, a)\}$, $\varrho_8 = \{(a, a), (b, b)\}$, $\varrho_9 = \{(a, b), (b, a)\}$, $\varrho_{10} = \{(a, b), (b, b)\}$, $\varrho_{11} = \{(b, a), (b, b)\}$, $\varrho_{12} = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$, $\varrho_{13} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, $\varrho_{14} = \{(a, a), (b, a), (b, b)\}$, $\varrho_{15} = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$, $\varrho_{16} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

2. a) $\varrho_8, \varrho_{13}, \varrho_{14}, \varrho_{16}$. b) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_5, \varrho_8, \varrho_9, \varrho_{12}, \varrho_{15}, \varrho_{16}$. c) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \varrho_6, \varrho_7, \varrho_8, \varrho_{10}, \varrho_{11}, \varrho_{13}, \varrho_{14}$. d) $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4, \varrho_5, \varrho_6, \varrho_7, \varrho_8, \varrho_{10}, \varrho_{11}, \varrho_{13}, \varrho_{14}, \varrho_{16}$.

3. Např. $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_5$.

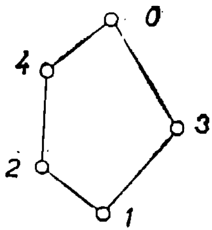
4. a) $\varrho_8, \varrho_{13}, \varrho_{14}, \varrho_{16}$. b) $\varrho_8, \varrho_{13}, \varrho_{14}$. c) ϱ_8, ϱ_{16}.

5. a) $\varepsilon_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_2 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_3 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$, $\varepsilon_4 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c)\}$, $\varepsilon_5 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\} = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$. b) $\eta_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_3 = \{(a, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_4 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_5 = \{(a, a), (a, d), (b, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$, $\eta_6 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_7 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_8 = \{(a, a),$

$(a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_9 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (b, d), (c, a), (c, c), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_{10} = \{(a, a), (a, d), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, a), (d, d)\}$, $\eta_{11} = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_{12} = \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, c), (c, d), (d, a), (d, c), (d, d)\}$, $\eta_{13} = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, a), (d, b), (d, d)\}$, $\eta_{14} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d)\}$, $\eta_{15} = \{a, b, c, d\} \times \{a, b, c, d\}$.

2. kapitola

1. Jedná se diagram na obr. 19.



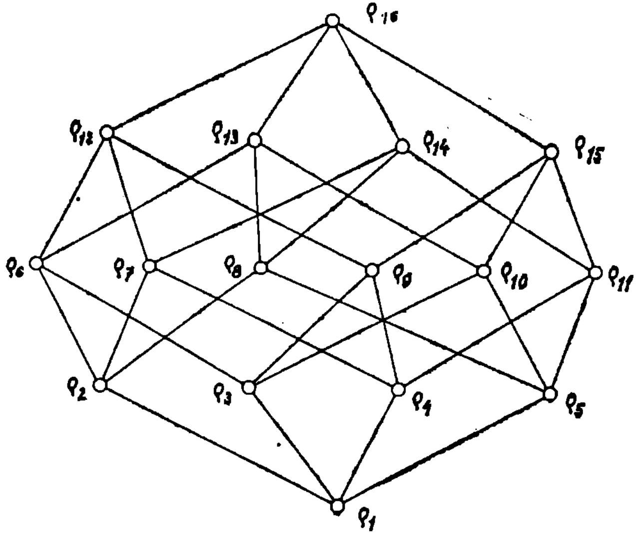
Obr. 19

2. Při označení z řešení cvičení 1 z první kapitoly je to diagram na obr. 20.

3. Zde se jedná o poset $(P(M \times M), \subset)$, což je podle příkladu 10 úplný svaz.

4. Z věty 2 plyne kladná odpověď v případech a), b), d). Protože podle výsledku cvičení 2 této kapitoly a cvičení 2 c) první kapitoly neexistuje supremum množiny $\{\varrho_6, \varrho_7\}$ v posetu všech antisymetrických relací na $\{a, b\}$, netvoří takovéto relace v obecném případě při uspořádání daném inkluzí dokonce ani svaz.

5. a) Pomocí věty 2 dostáváme kladnou odpověď. b) Užitím cvičení 4b) z první kapitoly plyne, že neexistuje supremum množiny $\{\varrho_{13}, \varrho_{14}\}$ v posetu všech uspořádání na dvouprvkové množině $\{a, b\}$ při uspořádání inkluzí; nejedná se tedy obecně ani o svaz.

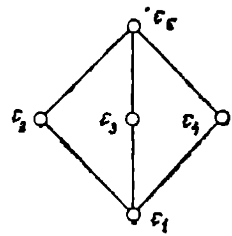


Obr. 20

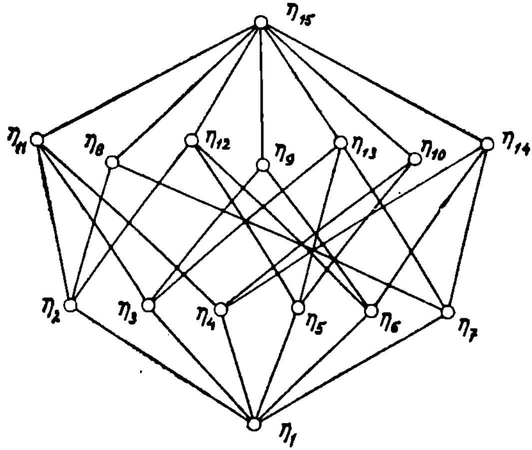
6. a) Při označení z řešení cvičení 5a) první kapitoly máme diagram svazu $\mathcal{M}_5$ na obr. 21.

b) Při označení z řešení cvičení 5b) první kapitoly nacházíme diagram z obr. 22.

7. Označme $D_0 = D \cap I$ (srovn. příklad 8). Kdyby existovalo $\inf_{(I,\leq)} D_0$, existovalo by i $\inf_{(Q,\leq)} D$, což — jak již víme — není pravda.



Obr. 21



Obr. 22

3. kapitola

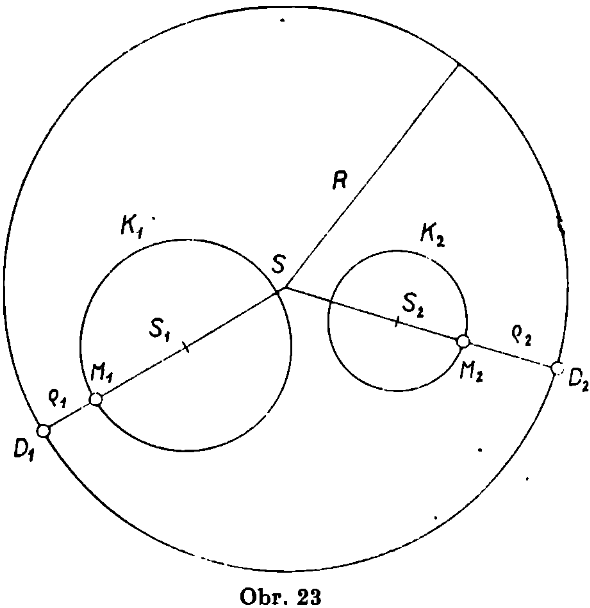
1. Kterýkoli kruh, který je dolní závorou pro $\{M, N\}$, by musel být obsažen v průniku obou kruhů M, N. Kdyby mezi těmito dolními závorami existovala největší, musela by obsahovat každý kruh, který je obsažen v průniku obou kruhů M, N a proto by toto infimum obsahovalo každý vnitřní bod průniku a samo by mělo být — dle prvního konstatování — podmnožinou průniku. To pro žádný kruh není možné.

2. Označme R poloměr a S střed některého kruhu, který obsahuje oba kruhy K_1, K_2 určené kružnicemi $k_1 = (S_1, r_1)$, $k_2 = (S_2, r_2)$. Označme M_i (resp. D_i) průsečík polopřímky SS_i s kružnicí k_i (resp. s kružnicí $(S; R)$)

(obr. 23). Označme $M_iD_i = \varrho_i$, takže $\varrho_i \geqq 0$. Pak pro $i = 1, 2$ platí $R = \varrho_i + r_i + SS_i$ a odtud

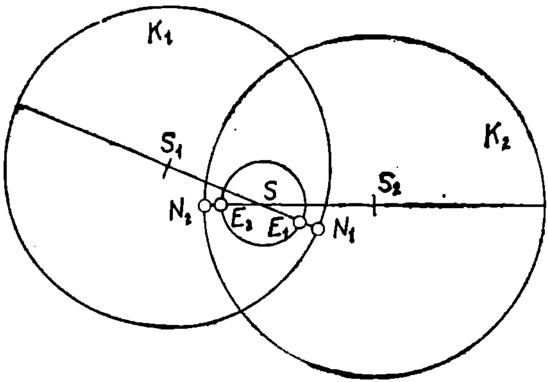
$$R = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{SS_1 + SS_2}{2} + \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

Výraz vpravo není menší než $R_0 = \dfrac{r_1 + r_2}{2} + \dfrac{S_1S_2}{2}$. (To plyne z toho, že $\varrho_1 + \varrho_2 \geqq 0$ a z trojúhelníkové nerovnosti $SS_1 + SS_2 \geqq S_1S_2$.) Přitom $R = R_0$ právě tehdy, když $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$ a když zároveň S leží na spojnici S_1 a S_2. To ale říká, že v tomto případě se jedná o vnější tečnou kružnici obou kružnic k_1, k_2.



Obr. 23

3. Označme r poloměr a S střed některého kruhu, který je obsažen v kruzích K_1, K_2 určených kružnicemi $k_i =$ $= (S_i, r_i)$. Označme N_i (resp. E_i) průsečík polopřímky



Obr. 24

S_iS s kružnicí k_i (resp. s kružnicí (S, r)) (obr. 24). Nechť ϱ_i značí délku úsečky E_iN_i. Pak platí $r_i = \varrho_i +$ $+ r + SS_i$ a odtud

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} - \frac{SS_1 + SS_2}{2}.$$

Obdobnou úvahou jako v předchozím příkladě nahlédneme, že

$$r \leqq r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2} - \frac{S_1S_2}{2}$$

a že rovnost $r = r_0$ nastane právě tehdy, když $\varrho_1 = \varrho_2 =$ $= 0$ a když současně S leží na spojnici S_1 a S_2. To znovu říká, že se jedná o kruh omezený vnitřní společnou tečnou kružnicí obou kružnic k_1, k_2.

4. Protože $\emptyset$ je nejmenším prvkem posetu $C(\varrho; p)$, je patrná existence suprema a infima každé dvouprvkové množiny $\{K_1, K_2\}$, jejíž alespoň jeden prvek je roven prázdné množině. Rovněž je patrné, že $\emptyset$ je infimum množiny $\{K_1, K_2\}$ v případě, že $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Jsou-li ale K_1, K_2 takové kruhy, že jejich průnik $K_1 \cap K_2$ je neprázdný, pak berme jim příslušný kruh K ze cvičení 3. Kterýkoli další kruh K_3, který je obsažen jak v K_1 tak i v K_2 a jehož střed leží na přímce p, určuje na p průsečíky C_1, C_2 takové, že úsečka C_1C_2 je částí úsečky určené dotykovými body obvodových kružnic kruhů K_1, K_2, K a tedy i celý kruh K_3 je obsažen v kruhu K. Obdobně lze užít cvičení 2 k odvození existence suprema množiny $\{K_1, K_2\}$, kde K_1, $K_2 \in C(\varrho; p)$ jsou neprázdné kruhy. Je proto $(C(\varrho; p), \subset)$ svaz. Není to však úplný svaz, neboť např. množina všech kruhů z $C(\varrho; p)$ nemá v tomto posetu supremum.

5. Ověřením reflexivity, tranzitivity a antisymetrie dostáváme, že $(H(\varrho), \subset)$ je poset. Není to však svaz — a tím spíše ani úplný svaz — neboť obrazec $ABCGFED$ i obrazec $EFGC$ jsou hvězdovité množiny, ale jejich průnik sestává z úseček EF, FG a GC a to není hvězdovitá množina. Odtud je patrné, že množina utvořená z obou zmíněných obrazců má v $(H(\varrho), \subset)$ jak EFG tak i FGC za dolní závoru a že neexistuje největší dolní závora této množiny (patřící do $H(\varrho)$). Pro tuto dvouprvkovou množinu $\{ABCGFED, EFGC\}$ proto v $(H(\varrho), \subset)$ neexistuje infimum.

6. Jedná se o poset, který je dokonce svazem, v němž $\{a_i\} \vee \{b_i\} = \{c_i\}$, kde $c_i = \max(a_i, b_i)$, $\{a_i\} \wedge \{b_i\} = \{d_i\}$, kde $d_i = \min(a_i, b_i)$. Není to však úplný svaz, neboť bereme-li za M množinu všech posloupností tvaru $n, n, n, \ldots$ (postupně pro $n = 1, 2, \ldots$), je zřejmé, že ve svazu $(F(\boldsymbol{R}), \ll)$ neexistuje supremum množiny M.

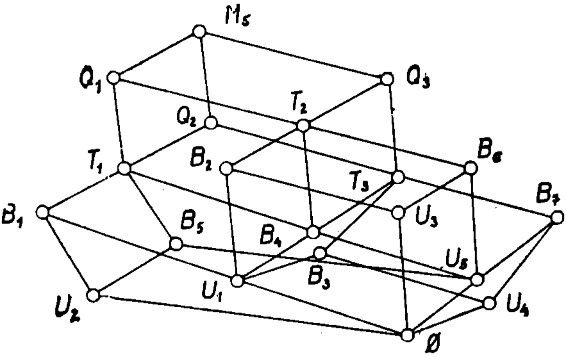
7. a) Protože $k \leqq h$ a $n \leqq m$ a protože $h \vee m$ je horní závorou množiny $\{h, m\}$, je $h \leqq h \vee m$ a podobně $m \leqq \leqq h \vee m$. V důsledku tranzitivity relace $\leqq$ je proto také $k \leqq h \vee m$ a $n \leqq h \vee m$, takže $h \vee m$ je horní závora množiny $\{k, n\}$; dle (3s) je tedy $k \vee n \leqq h \vee m$. b) V a) položte $k = d_1$, $m = h$, $n = d_2$ a uvažte, že $h \vee h = = h$. c) V a) položte $h = d$, $k = c$ a $m = n = g$. d)—f) se odvodí obdobně.

8. a) Je $a \leqq a \vee b$ a $a \leqq a \vee c$. Proto dle cvičení 7e) platí $a \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Dále platí $b \wedge c \leqq b \leqq a \vee b$ a podobně $b \wedge c \leqq c \leqq a \vee c$. Podle téhož cvičení je proto $b \wedge c \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Z cvičení 7b) plyne, že $a \vee (b \wedge c) \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. b) Vyjdeme ze vztahů $a \geqq a \wedge b$, $a \geqq a \wedge c$ a postupujeme obdobně jako v a). c) Je-li $a \leqq c$, je $a \vee c = c$ a výrok z c) je proto důsledkem a).

4. kapitola

1. Kterákoli jednoprvková množina $U_i = \{\varepsilon_i\}$ je nosičem podsvazu. Z dvouprvkových určují podsvaz právě tyto (srovn. obr. 21): $B_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $B_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3\}$, $B_3 = = \{\varepsilon_1, \varepsilon_4\}$, $B_4 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_5\}$, $B_5 = \{\varepsilon_2, \varepsilon_5\}$, $B_6 = \{\varepsilon_3, \varepsilon_5\}$, $B_7 = = \{\varepsilon_4, \varepsilon_5\}$. Tříprvkové: $T_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_5\}$, $T_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5\}$, $T_3 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$. Čtyřprvkové: $Q_1 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_5\}$, $Q_2 = = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$, $Q_3 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$. Rovněž množina $M_5 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$ je nosičem podsvazu.

2. Užijeme větu 2: P je největší prvek tohoto posetu a je-li M některá neprázdná množina nosičů podsvazů svazu $\mathscr{P}$, je jejich průnik buď prázdná množina nebo nosič podsvazu.
Diagram tohoto svazu pro svaz $\mathscr{M}_5$:



Obr. 25

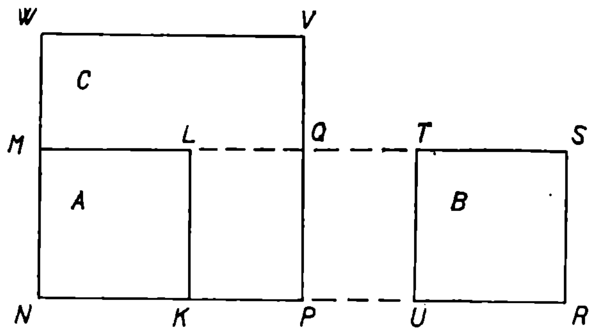
Tento diagram není podle příkladu 25 modulární, neboť $\{\emptyset, U_4, B_7, B_1, Q_2\}$ je nosič podsvazu s diagramem shodným s obr. 12b.

3. Užitím popisu průseku a spojení dvou prvků svazu $(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}), \ll)$ daného ve cvičení 6 z třetí kapitoly a z řešení příkladu 22 usuzujeme, že platí identita (4), což dle příkladu 20 znamená, že platí též (5) a tento svaz je proto distributivní.

4. 1) Je-li $a \leqq c$ a platí-li uvedená podmínka, pak nejprve $a \wedge c = a$ a $a \vee c = c$. Odtud je zřejmé, že přepis podmínky ze cvičení 4 vede na požadavek modularity svazu $\mathscr{P}$. 2) Je-li obráceně $\mathscr{P}$ modulární svaz, stačí si uvědomit, že v každém svazu je $a \wedge c \leqq c \leqq a \vee c$ a tedy tím spíše $a \wedge c \leqq a \vee c$. Užití definice modulárního svazu dává ve cvičení uvedenou podmínku.

5. Tento svaz není modulární a tedy tím spíše dle úlohy 21 není distributivní. Abychom nahlédli, že tento svaz není modulární, berme v rovině ϱ pravoúhlý souřadný systém a za přímku p berme osu x. Značí-li A otevřený kruh omezený kružnicí se středem v bodě $[0{,}75;\ 0]$ a poloměrem 0,25, C kruh určený kružnicí se středem v bodě $[0{,}5;\ 0]$ a poloměrem 0,5 a je-li B kruh omezený kružnicí se středem v bodě $[-0{,}5;\ 0]$ a s poloměrem 0,5, je $B \vee C = B \vee A = I$, kde I značí kruh určený kružnicí se středem v počátku a s poloměrem rovným 1 a $B \wedge C = B \wedge A = \emptyset$. Protože $A \subset C$, určují $A, B, C, I, \emptyset$ nosič podsvazu s diagramem z obrázku 12b a tedy podle příkladu 25 není tento svaz modulární.

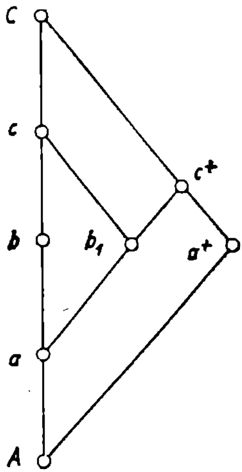
6. Tento svaz není distributivní, neboť není dokonce ani modulární. Abychom to nahlédli, podívejme se na připojený obrázek 26. Za konvexní množiny A, B, C volme po řadě čtverce $KLMN$, $RSTU$, $PVWN$. Patrně $A \subset C$. Ve svazu $(K(\varrho), \subset)$ je $A \vee B$ nejmenší konvexní množina, která obsahuje jak A tak i B. To je patrně obdélník $NRSM$. Jsou-li K_1, K_2 dvě konvexní podmnožiny roviny ϱ, pak dle úvahy z řešení příkladu 14 je $K_1 \wedge K_2 =$



Obr. 26

$= K_1 \cap K_2$. Je tedy $(A \vee B) \wedge C$ rovno průniku obdélníku $NRSM$ se čtvercem $NPVW$, tj. je to obdélník $MNPQ$. Vyšetříme posléze výraz $A \vee (B \wedge C)$. Zde ale je $B \wedge C = B \cap C = \emptyset$ a nejmenší konvexní množina, která obsahuje jak A tak i prázdnou množinu, je množina A. To znamená, že $A \vee (B \wedge C) = A$.

7. Platí (srovn. obr. 27) $b \wedge a^+ \leqq c \wedge c^+ = b_1$ a proto



Obr. 27

$b \wedge a^+ \leqq b \wedge b_1 = a$. Odtud dále $b \wedge a^+ \leqq a \wedge a^+ = A$ a ježto $A \leqq b$ a $A \leqq a^+$, je současně $A \leqq b \wedge a^+$, takže $A = b \wedge a^+$. Dále je $b \vee a^+ \geqq a \vee a^+ = c^+ \geqq b_1$ a proto $b \vee a^+ \geqq b \vee b_1 = c$. Máme rovněž $b \vee a^+ \geqq c^+$ a na základě toho též $b \vee a^+ \geqq c \vee c^+ = C$. Protože $b \leqq C$ a $a^+ \leqq c^+ \leqq C$, je $b \vee a^+ \leqq C$ a nutně proto $b \vee a^+ = C$.

8. a) Užijeme-li (7) na $A_3 = a_3 = B \wedge c$, $b_3 = B$, $c_3 = C_3 = C$, $B'_3 = c \geqq B''_3 = b \vee (B \wedge c)$ a na $A_4 = a_4 = A$,

$b_4 = B \wedge c$, $c_4 = C_4 = a \vee (B \wedge c)$, $B_4' = b \wedge [a \vee (B \wedge c)] \geqq \geqq B_4'' = a$, máme $b_1 = a \vee (B \wedge c)$ a podobně $b_1 = = c \wedge (B \vee a)$. Proto $c \wedge (b_1 \vee B) = c \wedge \{[a \vee (B \wedge c)] \vee B\} = = c \wedge (a \vee B) = b_1$. b)Podle a) je splněna podmínka (6), načež stačí užít větu 3.

9. Platí (užitím distributivity): $[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) =$
$= [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \vee (a \wedge c)$; $[c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b) =$
$= [c \wedge (a \vee b)] \vee [(a \wedge b) \wedge (a \vee b)] =$
$= [(c \wedge a) \vee (c \wedge b)] \vee (a \wedge b) =$
$= [(a \wedge b) \vee (b \wedge c)] \vee (a \wedge c)$.

10. Předpokládejme, že v (8) je $b \leqq c$; přepisem pak dostáváme $[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = b \vee (a \wedge c)$, $[c \vee (a \wedge \wedge b)] \wedge (a \vee b) = c \wedge (a \vee b)$ a svaz $\mathscr{P}$ je proto modulární. V důsledku modularity platí $V = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = = a \wedge [b \vee (a \wedge c)] = a \wedge (a \vee c) \wedge [b \vee (a \wedge c)]$. Užitím modularity nejprve máme $[b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = = [b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c)$ a dle (8) tedy platí $[b \vee (a \wedge c)] \wedge \wedge (a \vee c) = [c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b)$. Provedeme-li dále záměnu a za c, c za a a b za b, dostaneme odtud $[b \vee \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) = [a \vee (c \wedge b)] \wedge (c \vee b)$ a proto $V = a \wedge [a \vee (c \wedge b)] \wedge (c \vee b) = a \wedge (c \vee b)$.

11. a) Platí (užitím modularity a toho, že $b \vee c \geqq b \vee \vee (a \wedge c)$) $d \wedge \beta = a \wedge (b \vee c) \wedge [b \wedge (a \wedge c)] \wedge (a \vee c) = = a \wedge (a \vee c) \wedge [b \vee (a \wedge c)] = a \wedge [b \vee (a \wedge c)] = = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $d \vee \beta = [a \wedge (b \vee c)] \vee \{[b \vee (a \wedge c)] \wedge \wedge (a \vee c)\} = [a \wedge (b \vee c)] \vee [b \wedge (a \vee c)] \vee [(a \wedge c) \wedge \wedge (a \vee c)]$. Protože $a \wedge (b \vee c) \geqq a \wedge c = (a \wedge c) \wedge \wedge (a \vee c)$, máme dále $d \vee \beta = [a \wedge (b \vee c)] \vee [b \wedge (a \vee \vee c)] = \{[a \wedge (b \vee c)] \vee b\} \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge \wedge (a \vee c)$. Obdobné vztahy pro γ plynou záměnou c za b, b za c a a za a. Poslední výraz pro β jsme odvodili v řešení příkladu 10. b) Podle a) jsou β a γ dva relativní komplementy prvku d a podle (7) je proto $\beta = \gamma$.

12. Podle cvičení 8b) je $\mathscr{P}$ modulární svaz, podle cvičení 11b) a cvičení 10 je distributivní.

13. a) Stačí např. volit $a = 3$, $b = 6$, $c = 12$ b) V příkladě 24a) jsme ukázali, že tento svaz není distributivní, takže tím spíš to není Booleův svaz. Je to však komplementární svaz: K bodu T je komplementem rovina ϱ a obráceně. K dané přímce p procházející bodem T je komplementem kterákoli přímka p_1 procházející bodem T a různá od p.