Uspořádané množiny

4. kapitola. Základní třídy svazů

In: Ladislav Beran (author): Uspořádané množiny. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1978. pp. 44–58.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403926

4. kapitola

ZÁKLADNÍ TŘÍDY SVAZŮ

V úloze 12 jsme konstatovali, že v každém svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ pro každé a, b, c z P platí podmínky

(S 1) $a \vee b = b \vee a$;
(S 2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;
(S 3) $a \vee (a \wedge b) = a$;
(P 1) $a \wedge b = b \wedge a$;
(P 2) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;
(P 3) $a \wedge (a \vee b) = a$.

Lze dokázat[4]), že jsou-li obráceně na některé neprázdné množině P definovány dvě operace $\vee$, $\wedge$ tak, že platí (S 1) — (S 3) a (P 1) — (P(3) a definujeme-li relaci $\leqq$ předpisem $a \leqq b$ právě tehdy, když $a \wedge b = a$, je relace $\leqq$ uspořádání množiny P a $(P, \leqq)$ je svaz. Z tohoto důvodu se často místo o svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ mluví o svazu $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$. Např. svaz $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ má za operace $\cup$, $\cap$ (sjednocení a průnik) a bývá zapisován též jako uspořádaná trojice $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$.

Bereme-li ve svazu $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$ tři množiny A, B, C patřící do $P(E)$, pak platí

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

a také

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

---

[4]) Srovn. L. Beran [1; str. 36].

(Připomeňme stručně např. důkaz prvního vztahu: Prvek x patří do množiny $A \cap (B \cup C)$ právě tehdy, když patří do A a současně buď do B či do C, tj. patří-li buď do $A \cap B$ či do $A \cap C$. V dalším nahlédneme, že druhý vztah je důsledkem prvního a toho, že $\mathscr{P}(E)$ je svaz.)

Svaz $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ se nazývá *distributivní* právě tehdy, když v $\mathscr{P}$ platí pro každé $a, b, c \in P$

(4) $$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

a také

(5) $$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Podle této definice je tedy $\mathscr{P}(E) = (P(E), \cup, \cap)$ distributivní svaz.

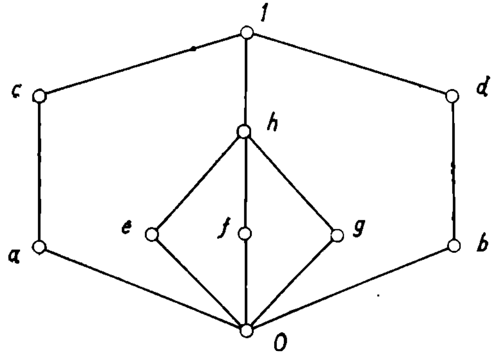
Budeme říkat, že neprázdná podmnožina M nosiče P svazu $\mathscr{P}$ je *uzavřená* vůči operacím $\vee$ a $\wedge$ právě tehdy, když pro každé m, n patřící do M patří do M také $m \vee n$ a $m \wedge n$. Uspořádanou trojici $(M, \vee, \wedge)$ v tomto případě nazýváme *podsvazem* svazu $(P, \vee, \wedge)$ (nebo svazu $(P, \leqq)$). Množina M se nazývá *nosič* tohoto podsvazu. Protože pro každé tři prvky a, b, c z M platí (S 1) — — (S 3) a (P 1) — (P 3), je každý podsvaz i svazem.

Příklad 18. Nechť E značí některou neprázdnou množinu. Označme $F(E)$ množinu všech těch podmnožin množiny E, které mají konečný počet prvků. Máme dokázat, že $(F(E), \cup, \cap)$ je podsvaz svazu $\mathscr{P}(E)$.

Řešení. Zřejmě $\emptyset \in F(E)$ a $F(E)$ je proto neprázdná množina. Jsou-li F_1, F_2 dvě množiny patřící do $F(E)$, pak také množiny $F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2$ mají konečný počet prvků, tj. patří do $F(E)$.

Úloha 18. Nechť $\mathscr{P}$ je svaz s diagramem na obr. 10. Rozhodněte, zda množina

a) $M_1 = \{0, e, f, g, h\}$;
b) $M_2 = \{0, a, b, c, d, 1\}$;
c) $M_3 = \{0, e, f, 1\}$

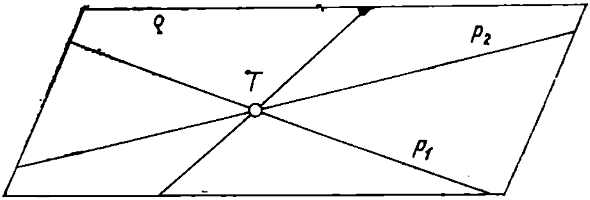


Obr. 10

je nosičem některého podsvazu svazu $\mathscr{P}$.
[a), b) ano, c) ne, neboť $h = e \vee f \notin M_3$.]

Příklad 19. Nechť ϱ je některá rovina z trojrozměrného prostoru E (srovn. příklad 12) a nechť $R(\varrho; T)$ značí množinu, jejímiž prvky jsou — v obdobném smyslu jako u příkladu 12 — rovina ϱ, pevně daný bod T roviny ϱ a všechny ty přímky p roviny ϱ, které procházejí bodem T. Máme dokázat, že $R(\varrho; T)$ je nosičem podsvazu svazu $(L(E), \subset)$.

Řešení. Tvoříme-li průsek a spojení prvků patřících do neprázdné množiny $R(\varrho;\ T)$, je to opět prvek této množiny.



Obr. 11

Příklad 20. Máme dokázat toto: Platí-li ve svazu $\mathscr{P}$ identita (4) pro každé $a, b, c \in P$, pak v $\mathscr{P}$ platí i (5).

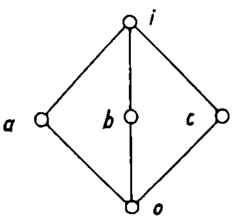
Řešení. Platí

$$
\begin{aligned}
(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] && \text{dle (4)} \\
&= a \vee [(a \vee b) \wedge c] && \text{dle (P 3) a (P 1)} \\
&= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] && \text{dle (4)} \\
&= [a \vee (a \wedge c)] \vee (b \wedge c) && \text{dle (S 2)} \\
&= a \vee (b \wedge c) && \text{dle (S 3)}
\end{aligned}
$$

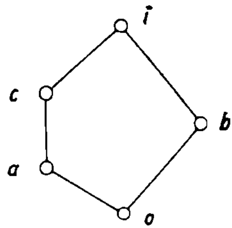
Poznámka. Zaměníme-li v požadavcích (S 1) — (S 3) a (P 1) — (P 3) symbol $\vee$ za $\wedge$ a obráceně, dostaneme tytéž požadavky. To má za následek, že provedeme-li na některý výrok platný pro svazy tuto záměnu, dostaneme opět platný výrok. Této záměně říkáme *dualizování* uvažovaného výroku. Dualizováním výroku z příkladu 20 dostáváme např. výrok, že v každém svazu je identita (4) důsledkem identity (5).

Příklad 21. Máme dokázat, že obsahuje-li svaz $\mathscr{P}$ podsvaz s diagramem shodným s jedním z obou diagramů na obr. 12a a 12b, pak $\mathscr{P}$ není distributivní.

Řešení. Platí $a \vee (b \wedge c) = a \vee o = a$, ale $(a \vee b) \wedge \wedge (a \vee c) = i \wedge (a \vee c) = a \vee c \neq a$.



Obr. 12a

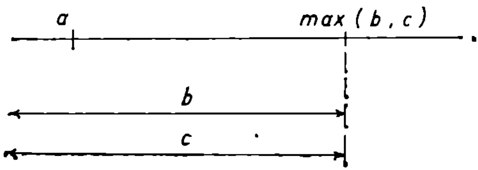


Obr. 12b

Poznámka. Lze dokázat[5]), že není-li svaz $\mathscr{P}$ distributivní, obsahuje podsvaz s diagramem shodným s jedním z obou diagramů z obr. 12ab.

Příklad 22. Máme dokázat, že každý řetězec je distributivním svazem.

Řešení. Podle věty 1 je to svaz. Vzhledem k příkladu



Obr. 13

[5]) Srovn. L. Beran [1; str. 168].

20 stačí ukázat, že platí $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ pro každé tři prvky a, b, c řetězce. Podle příkladu 9 máme tedy ukázat, že prvek $l = \min(a, \max(b, c))$ se rovná prvku $p = \max(\min(a\, b), \min(a, c))$. Přitom podle definice minima a maxima je zřejmé, že l je jeden z prvků a, b, c. Pokud $l = a$, je $a \leqq \max(b, c)$ (srovn. obr. 13) a tedy platí buď $a \leqq b$ nebo $a \leqq c$. V obou případech je však alespoň jeden z prvků $\min(a, b)$, $\min(a, c)$ roven a a druhý je menší nebo roven a, tj. $p = a$.

Pokud $l = b$, pak buď $b = a$ a $p = \max(b, \min(b, c)) = b$, nebo je $b = \max(b, c)$ a současně $b \leqq a$. To ale znamená, že $c \leqq b \leqq a$ a tedy $p = \max(b, c) = b$. Obdobně postupujeme v případě $l = c$.

Úloha 19. Dva prvky a, b svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ se nazývají *srovnatelné* právě tehdy, když platí buď $a \leqq b$ nebo $b \leqq a$. Bez užití příkladu 22 dokažte, že je-li jeden ze tří prvků a, b, c svazu $\mathscr{P}$ srovnatelný s každým z obou zbývajících prvků, pak platí $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ a také $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.
[Návod: Uvažte, že nejmenší podsvaz svazu $\mathscr{P}$, který obsahuje prvky a, b, c, má buď diagram stejný jako $\mathscr{P}(\{a, b\}) = (P(\{a, b\}), \subset)$ nebo je to řetězec a má diagram stejný jako podsvaz svazu $\mathscr{P}(\{a, b\})$ s nosičem $\{0, \{a\}, \{a, b\}\}$. Podsvaz distributivního svazu je distributivní svaz.]

Úloha 20. Pomocí výsledku úlohy 19 podejte jiný důkaz výroku z příkladu 22.

Příklad 23. Máme vyšetřit, zda svaz $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ z úlohy 1 je distributivní.

Řešení. V příkladě 7 jsme ukázali, že supremum resp.

infimum dvouprvkové množiny a, b čísel z $\boldsymbol{N}$ je dáno jejich nejmenším společným násobkem resp. jejich největším společným dělitelem. Pro důkaz distributivity stačí dle příkladu 20 ověřit, že platí (4). Nadto můžeme předpokládat, že kterékoli z čísel a, b, c je různé od nuly. (Přípustnost tohoto předpokladu plyne z toho, že číslo 0 je největší prvek posetu $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ a že je tedy srovnatelným s každým z prvků z $\boldsymbol{N}_0$, takže (4) dle úlohy 19 platí, pokud jedno z čísel a, b, c se rovná 0.) Označme $l = a \wedge \wedge (b \vee c)$, $p = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ a pišme[6])

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad \text{kde } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \boldsymbol{N}_0;$$

$$b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}, \quad \text{kde } \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \boldsymbol{N}_0;$$

$$c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}, \quad \text{kde } \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \in \boldsymbol{N}_0.$$

Jak známo, je největší společný dělitel $a \wedge b$ čísel a, b číslo se zápisem $p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_k^{\delta_k}$, kde $\delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ pro $i = 1, 2, \dots, k$ a podobně je nejmenší společný násobek $a \vee b$ čísel a, b číslo se zápisem $p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}$, kde $\nu_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. Je tedy l číslo se zápisem $p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_k^{\lambda_k}$, kde $\lambda_i = \min(\alpha_i, \max(\beta_i, \gamma_i))$ a p je číslo se zápisem $p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_k^{\pi_k}$, kde $\pi_i = \max(\min(\alpha_i, \beta_i), \min(\alpha_i, \gamma_i))$. Uvažme nyní ale, že exponenty $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ jsou prvky řetězce $(\boldsymbol{N}_0, \leqq)$. Odtud a z řešení příkladu 22 plyne, že $\lambda_i = \pi_i$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$, tj. $l = p$.

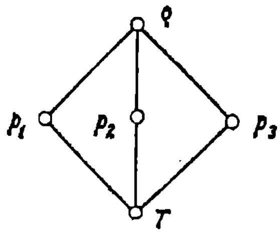
Příklad 24. Máme dokázat, že svaz $(R(\varrho; T), \subset)$ z příkladu 19

a) není distributivní;

[6]) V těchto vyjádřeních můžeme psát tatáž prvočísla $p_1, p_2, \dots, p_k$, neboť připouštíme i mocniny s exponentem 0.

b) splňuje pro každé a, b, $c \in R(\varrho; T)$ tento vztah: Je-li $a \leqq c$, pak $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$.

Řešení. a) Jsou-li p_1, p_2, p_3 tři různé přímky z $R(\varrho; T)$, je množina $\{T, p_1, p_2, p_3, \varrho\}$ nosičem podsvazu s diagramem na obr. 14. Podle příkladu 21 není svaz $(R(\varrho; T), \subset)$ distributivní.



Obr. 14

b) Pro důkaz uvedeného vztahu nejprve konstatujeme, že platí vždy tehdy, můžeme-li použít identity (5), neboť $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$ jak plyne z toho, že pro $a \leqq c$ je $a \vee c = c$. Je-li $a = c$, pak $a \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge a) = a$ dle (P 1) a (S 3). Na druhé straně je $(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge a = a$ dle (P 3) a (P 1). Pro další můžeme proto předpokládat, že $a < c$. To ovšem znamená, že buď (i) a je bod T a c je některá přímka z $R(\varrho; T)$ nebo (ii) a je přímka z $R(\varrho; T)$ a c je ϱ. V obou případech je jeden ze tří prvků buď nejmenší či největší z prvků posetu $R(\varrho; T)$ a je proto srovnatelný s kterýmkoli z prvků z $R(\varrho; T)$. Podle úvodního konstatování soudíme dle úlohy 19, že i v těchto případech dokazovaný vztah platí.

Svaz $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$, pro který — pro každé $a, b, c \in P$ — platí, že je-li $a \leqq c$, pak vždy $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$, se nazývá *modulární*.

Úloha 21. Každý distributivní svaz je modulární.

Příklad 25. Máme dokázat, že obsahuje-li svaz $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ podsvaz s diagramem shodným s diagramem na obr. 12b, pak to není modulární svaz.

Řešení. Platí $a \vee (b \wedge c) = a$, ale $(a \vee b) \wedge c = c \neq a$.

Poznámka. Dá se dokázat[7]), že není-li svaz modulární, obsahuje podsvaz s diagramem shodným s diagramem z obrázku 12b.

V dalším si odvodíme — jako typickou ukázku pracovních metod v teorii svazů — charakterizaci distributivních a modulárních svazů. Nejprve zavedeme některé další nové pojmy.

Jsou-li $a \leqq c$ dva prvky některého posetu $\mathscr{P}$, pak množinu těch prvků x z P, pro něž platí současně $a \leqq x$ a $x \leqq c$, značíme $[a, c]$ a nazýváme ji *interval* svazu $\mathscr{P}$. *Relativním komplementem* prvku $b \in [a, c]$ v intervalu $[a, c]$ rozumíme každý prvek b_1 takový, že $b \wedge b_1 = a$ a zároveň $b \vee b_1 = c$. Má-li svaz $\mathscr{P}$ největší prvek 1 a nejmenší prvek 0, nazýváme relativní komplement prvku a v intervalu $[0, 1]$ stručněji jen *komplement* prvku a.

Příklad 26. Ve svazu s diagramem na obrázku 10 určete $[0, h]$ a nalezněte všechny komplementy prvku a.

Řešení. Je $[0, h] = \{0, e, f, g, h\}$. Prvky e, f, g, h, b, d jsou všemi komplementy prvku a.

Úloha 22. Je-li b_1 relativní komplement prvku $b \in [a, c]$ v intervalu $[a, c]$ takový, že $b_1 = c$, pak $a = b$. Dokažte.

---

[7]) Srovn. L. Beran [1; str. 167].

Úloha 23. Dokažte, že je-li $[a, c]$ interval distributivního svazu $\mathscr{P}$ a je-li $b \in [a, c]$, pak existuje nejvýše jeden relativní komplement prvku b v intervalu $[a, c]$.
[Návod: Jsou-li b_1, b_2 relativními komplementy prvku b a jsou-li $i \neq j$ čísla 1, 2, pak $b_j = b_j \wedge (b \vee b_i) = b_j \wedge \wedge b_i \leqq b_i$.]

Úloha 24. Nechť $\mathscr{P}$ je modulární svaz. a) Pak platí toto (srovn. obr. 15):

(6) Pro prvky a, b, c, A, B, C takové, že

$$A \leqq a \leqq b \leqq c \leqq C,$$

$$A \leqq B \leqq C$$

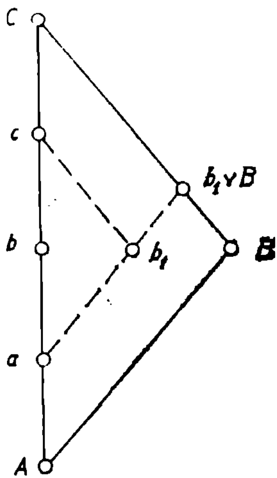
s vlastností

$$b \vee B = C \quad \text{a} \quad b \wedge B = A$$

existuje relativní komplement b_1 prvku b v intervalu $[a, c]$ takový, že $c \wedge (b_1 \vee B) = b_1$.

b) Je-li $c = C$, pak $b_1 \geqq B$.

[Návod:
a) Položte $b_1 = (a \vee B) \wedge c$ a dokažte, že $b_1 = a \vee (B \wedge c)$
b) Užijte úlohu 22.]

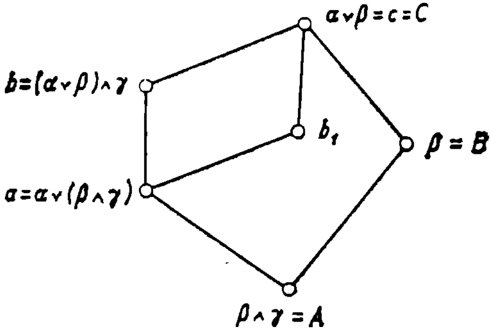


Obr. 15

Věta 3. *Svaz $\mathscr{P}$ je modulární právě tehdy, když splňuje podmínku* (6).

Důkaz. 1) Modulární svaz splňuje podmínku (6) dle úlohy 24. 2) Nechť $\mathscr{P}$ je svaz splňující podmínku (6);

ukážeme, že pak je to nutně modulární svaz. Za tím účelem berme prvky $\alpha, \beta, \gamma \in P$ takové, že $\alpha \leqq \gamma$. Podle cvičení 8c) z třetí kapitoly je $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leqq (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$. Označme tyto prvky po řadě a, b (srovn. obr. 16).



Obr. 16

Označme dále $\beta \wedge \gamma = A$, $\beta = B$, $\alpha \vee \beta = C = c$ a ověřme, že prvky a, b, c, A, B, C splňují předpoklady z podmínky (6). Předně je zřejmě $A \leqq a \leqq b \leqq C$ a proto také

$$\beta \wedge \gamma = A \wedge \beta \leqq a \wedge \beta \leqq b \wedge \beta =$$

$$= [(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma] \wedge \beta = \beta \wedge \gamma$$

a podobně

$$\alpha \vee \beta = [\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)] \vee \beta =$$

$$= a \vee \beta \leqq b \vee \beta \leqq C \vee \beta = \alpha \vee \beta.$$

Z toho získáváme $a \vee B = b \vee B = C$ a $b \wedge B = A$. V důsledku předpokladu platnosti podmínky (6) existuje proto relativní komplement b_1 prvku b v intervalu

$[a, C]$. Podle úlohy 24b) je $b_1 \geqq B$ a tak $b_1 \geqq a \vee B = C$, takže $b_1 = C$. Z výsledku úlohy 22 plyne, že pak $a = b$, tj. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$, takže svaz $\mathscr{P}$ je vskutku modulární.

Úloha 25. Nechť $\mathscr{P}$ je distributivní svaz. Pak platí toto:

(7) Pro prvky a, b, c, A, B, C takové, že

$$A \leqq a \leqq b \leqq c \leqq C, \qquad A \leqq B \leqq C$$

s vlastností

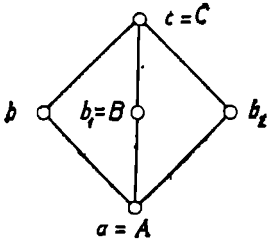
$$b \vee B = C \quad \text{a} \quad b \wedge B = A$$

existuje právě jeden relativní komplement b_1 prvku b v intervalu $[a, c]$.

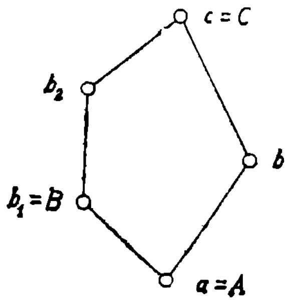
[Návod: Užijte úlohu 21, 23 a 24.]

Věta 4. *Svaz $\mathscr{P}$ je distributivní právě tehdy, když splňuje podmínku* (7).

Důkaz. 1) Podle úlohy 25 splňuje každý distributivní svaz podmínku (7).



Obr. 17



Obr. 18

2) Předpokládejme, že $\mathscr{P}$ je svaz splňující podmínku (7). Protože přímý důkaz je poměrně dlouhý (srovn. cvičení 8—12 této kapitoly), použijeme výrok z poznámky za příkladem 21. Kdyby $\mathscr{P}$ obsahoval jako podsvaz svaz s diagramem z obr. 12a či 12b, označme si prvky těchto svazů ve shodě s označením z (7): Pro prvek b by v obou případech existovaly dva různé relativní komplementy b_1, b_2 v intervalu $[a, c]$. To je spor s předpokladem platnosti (7) a tento spor dokazuje, že svaz $\mathscr{P}$ je distributivní.

Svaz $\mathscr{P}$, který má nejmenší prvek 0 a největší prvek 1 a který je takový, že v něm pro každý prvek existuje alespoň jeden jeho komplement, se nazývá *komplementární svaz*. Svaz, který je komplementární a současně distributivní, se nazývá *Booleův svaz*.

Úloha 26. Dokažte, že v každém Booleově svazu existuje pro každý prvek $b \in [a, c]$ právě jeden jeho relativní komplement v intervalu $[a, c]$.

[Návod: Užijte úlohu 25.]

Věta 5. *Nechť $\mathscr{P}$ je svaz s nejmenším a největším prvkem. Pak $\mathscr{P}$ je Booleův svaz právě tehdy, když pro kterékoli prvky a, b, c s vlastností $a \leqq b \leqq c$ existuje právě jeden relativní komplement prvku b v intervalu $[a, c]$.*

Důkaz. Dle úlohy 26 stačí dokázat, že svaz $\mathscr{P}$ s uvedenou vlastností je distributivní (to ale plyne z věty 4) a že je komplementární, což plyne přímo z uvedené podmínky, volíme-li za a nejmenší a za c největší prvek svazu $\mathscr{P}$.

Úloha 27. Dokažte, že svaz $\mathscr{P}(E)$ podmnožin množiny E s uspořádáním inkluzí je Booleův svaz.

[Návod: Pro $M \subset E$ je komplementem množina $E \setminus M$, jejímiž prvky jsou právě ty prvky z E, které nepatří do M.]

Z úlohy 26 plyne, že pro každý prvek a Booleova svazu $\mathscr{P} = (P, \vee, \wedge)$ existuje právě jeden jeho komplement, zpravidla značený a'. To dovoluje definovat na P další operaci „komplement", která každému prvku a přiřazuje jeho komplement. Uspořádaná čtveřice $(P, \vee, \wedge, ')$ se pak nazývá *Booleova algebra*. Čtenáři zajímajícímu se o jejich studium doporučujeme moderně napsanou knížku O. Odvárky [2].

Cvičení

1. Nalezněte všechny množiny, které ve svazu ze cvičení 6a) druhé kapitoly jsou nosičem podsvazu.

2. Dokažte, že nosiče všech podsvazů daného svazu $\mathscr{P}$ spolu s prázdnou množinou tvoří při uspořádání daném inkluzí úplný svaz a nalezněte diagram tohoto svazu v případě svazu $\mathscr{M}_5$ ze cvičení 6a) druhé kapitoly. Určuje tento diagram modulární svaz?

3. Svaz $(F(\boldsymbol{R}), \ll)$ ze cvičení 6 třetí kapitoly je distributivní. Dokažte.

4. Dokažte, že svaz $\mathscr{P}$ je modulární právě tehdy, když pro každé $a, b, c \in P$ platí

$$(a \wedge c) \vee [b \wedge (a \vee c)] = [(a \wedge c) \vee b] \wedge (a \vee c).$$

5. Rozhodněte, zda svaz $(C(\varrho; p), \subset)$ ze cvičení 4 třetí kapitoly je a) distributivní b) modulární.

6. Vyšetřete, zda svaz $(K(\varrho), \subset)$ z příkladu 14 je a) distributivní b) modulární.

7. Platí-li v některém svazu $\mathscr{P}$ vztahy $A \leqq a \leqq b \leqq$

$\leqq c \leqq C$, je-li b_1 relativní komplement prvku b v intervalu $[a, c]$, c^+ relativní komplement prvku c v intervalu $[b_1, C]$ a je-li a^+ relativní komplement prvku a v intervalu $[A, c^+]$, je a^+ relativním komplementem prvku b v intervalu $[A, C]$.

8. Splňuje-li svaz $\mathscr{P}$ podmínku (7) a jsou-li $A \leqq a \leqq b \leqq \leqq c \leqq C$, B, b_1 prvky s vlastnostmi z (7), pak a) $c \wedge (b_1 \vee B) = b_1$ b) $\mathscr{P}$ je modulární svaz.
[Návod: Užijte větu 3.]

9. Dokažte, že pro každé tři prvky a, b, c distributivního svazu $\mathscr{P}$ platí

$$(8) \quad [b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c) = [c \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b).$$

10. Svaz $\mathscr{P}$ je distributivní právě tehdy, když pro každé $a, b, c \in P$ platí (8). Dokažte.

11. a) Nechť $\mathscr{P}$ je modulární svaz. Pro $a, b, c \in P$ označme $d = a \wedge (b \vee c)$, $\beta = [b \vee (a \wedge c)] \wedge (a \vee c)$, $\gamma = [c \vee \vee (a \wedge b)] \wedge (a \vee b)$.
Pak platí

$$d \wedge \beta = d \wedge \gamma = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$d \vee \beta = d \vee \gamma = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c);$$

$$\beta = [b \wedge (a \vee c)] \vee (a \wedge c).$$

b) Je-li $\mathscr{P}$ modulární svaz, v němž platí (7), pak — v označení z a) — je $\beta = \gamma$.

12. Bez použití poznámky za příkladem 21 dokažte, že svaz splňující (7) je distributivní.

13. a) Ukažte, že ve svazu $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ z úlohy 1 nemusí pro tři čísla z $\boldsymbol{N}_0$ splňující $a\, \sigma_1\, b$, $b\, \sigma_1\, c$ existovat relativní komplement prvku b v intervalu $[a, c]$.

b) Ukažte, že svaz $(R(\varrho; T), \subset)$ z příkladu 19 je komplementární, ale není to Booleův svaz.