Uspořádané množiny

3. kapitola. Příklady svazů

In: Ladislav Beran (author): Uspořádané množiny. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1978. pp. 32–43.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403925

3. kapitola

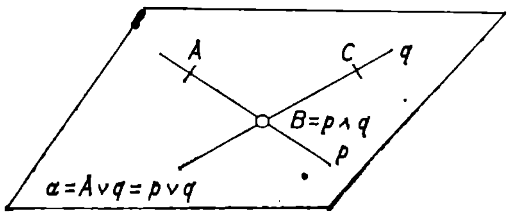
PŘÍKLADY SVAZŮ

V této kapitole doplníme základní poznatky o svazech a uvedeme některé příklady svazů, které lze situovat do středoškolské matematiky.

V předchozí kapitole jsme definovali svaz jako uspořádanou množinu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$, v níž pro každé dva prvky $a, b \in P$ existuje $\sup_{\mathscr{P}} \{a, b\}$ a $\inf_{\mathscr{P}} \{a, b\}$. Oba tyto zápisy vystihují dostatečně výrazně, které prvky jsou dvojici a, b po řadě přiřazeny. Mají však tu nevýhodu, že jsou poměrně málo stručné. Proto se v teorii svazů zavádí úmluva, že místo $\sup_{\mathscr{P}} \{a, b\}$ se píše jen $a \vee b$ a místo $\inf_{\mathscr{P}} \{a, b\}$ se píše jen $a \wedge b$. Pokud $a = b$, rozšiřujeme tuto definici tak, že klademe: $a \vee a = a \wedge a = a$. Zápis $c = a \vee b$ (resp. $d = a \wedge b$) čteme „c je rovno spojení a s b" (resp. „d je rovno průseku a s b"). Prvek c se nazývá *spojení* prvků a, b, prvek d se nazývá jejich *průsekem*.

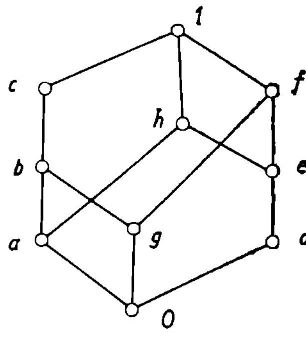
Příklad 12. Nechť E značí daný trojrozměrný prostor a $L(E)$ nechť je množina, jejímiž prvky jsou E, $\emptyset$ a všechny roviny, přímky a body prostoru E. Přitom přímku, rovinu i prostor chápeme jako množiny bodů, bod jako jednoprvkovou množinu bodů. Máme dokázat, že $(L(E), \subset)$ je úplný svaz.

Řešení. Užijeme opět větu 2. Zřejmě je E největší prvek tohoto posetu. Je-li M některá množina zmíněných geometrických útvarů z E, označme Δ množinu všech bodů, které patří do všech množin z M. Chceme ukázat, že $\Delta \in L(E)$. To je zřejmé, pokud $\Delta = \emptyset$ nebo pokud Δ obsahuje jediný bod. Obsahuje-li Δ dva různé body A, B, pak body A, B obsahuje každý útvar z M a proto každý takovýto útvar obsahuje i přímku p jimi určenou. Obsahuje-li Δ ještě další bod C, který neleží na p, obsahuje — jak bychom nahlédli obdobnou úvahou — i všechny body roviny α určené bodem C a přímkou p. Leží-li v Δ bod D, který nepatří do roviny α, obsahuje Δ i všechny body prostoru E. V každém případě je proto $\Delta \in L(E)$ a snadno nahlédneme, že $\Delta = \inf_{(L(E),\subset)} M$. Podle věty 2 je proto $(L(E), \subset)$ úplný svaz.



Obr. 5

V právě zkoumaném příkladě si povšimněme, že spojení $A \vee B$ bodů A, B (srovn. obr. 5) je přímka p, průsek přímek p, q je bod B atd. Tento příklad ilustruje geometrický obsah užité terminologie.



Obr. 6

Ve svazu s diagramem na obrázku 6 platí například $c \wedge f = g, b \vee h = 1$. Souhrn průseků a spojení zachycují tyto tabulky:

$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
0	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
a	a	a	b	c	h	h	1	b	h	1
b	b	b	b	c	1	1	1	b	1	1
c	c	c	c	c	1	1	1	c	1	1
d	d	h	1	1	d	e	f	f	h	1
e	e	h	1	1	e	e	f	f	h	1
f	f	1	1	1	f	f	f	f	1	1
g	g	b	b	c	f	f	f	g	1	1
h	h	h	1	1	h	h	1	1	h	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	0	0	0	0	a	a
b	0	a	b	b	0	0	g	g	a	b
c	0	a	b	c	0	0	g	g	a	c
d	0	0	0	0	d	d	d	0	d	d
e	0	0	0	0	d	e	e	0	e	e
f	0	0	g	g	d	e	f	g	e	f
g	0	0	g	g	0	0	g	g	0	g
h	0	a	a	a	d	e	e	0	h	h
1	0	a	b	c	d	e	f	g	h	1

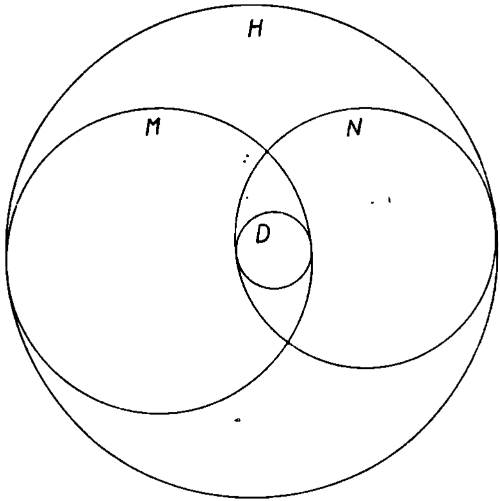
Úloha 12. V každém svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ pro každé $a, b, c \in P$ platí

a) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;
b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;
c) $a \wedge b = a$ a také $b = a \vee b$, jakmile $a \leqq b$;
d) $a \wedge b \leqq a$, $a \leqq a \vee b$;
e) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

[Návod. K důkazu e) použijte d) a c).]

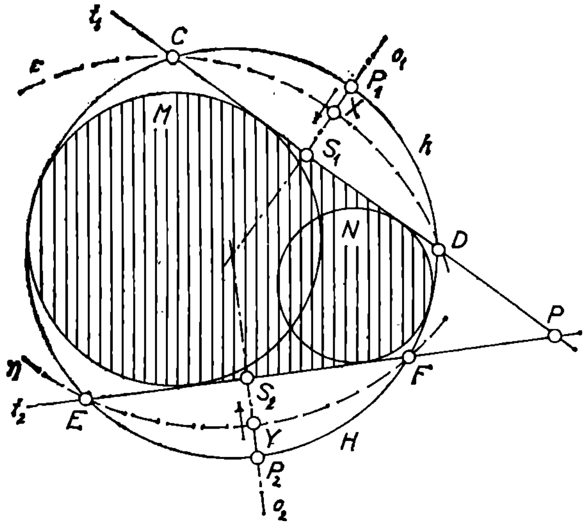
Příklad 13. Budiž $C(\varrho)$ množina všech otevřených kruhů některé dané roviny ϱ. Přitom mezi kruhy počítáme také prázdnou množinu. Máme vyšetřit, zda poset $(C(\varrho), \subset)$ je svaz.

Řešení. Vlastnímu řešení předešleme nejprve tuto úvahu: Nechť M, N značí dva kruhy (srovn. obr. 7) a nechť H, D značí kruhy určené tečnými kružnicemi obvodových kružnic zadaných kruhů M, N. Zřejmě



Obr. 7

platí, že $N \subset H$ a $M \subset H$; podobně $D \subset M$ a $D \subset N$. Odtud plyne, že H je horní závora množiny $\{M, N\}$ a D je dolní závora této množiny. Připojený obrázek má na první pohled natolik sugestivní charakter, že bychom se mohli domnívat, že H je nejmenší horní závora této množiny a že D je největší dolní závora množiny $\{M, N\}$, tj. mohli bychom se domnívat, že poset $(C(\varrho), \subset)$ je svaz. Takovéto mýlce podlehl i známý popularizátor moderní matematiky profesor G. Papy [3; str. 130, cvičení 5]. Ukažme, že pro vyznačené kruhy M, N supremum množiny $\{M, N\}$ v posetu $(C(\varrho), \subset)$ neexistuje. Kdyby S byl kruh, který by byl supremem množiny $\{M, N\}$, pak by předně každý jeho bod musel ležet uvnitř



Obr. 8

ostrého úhlu určeného tečnami t_1, t_2. Abychom to nahlédli, označme C, D průsečíky tečny t_1 s obvodovou kružnicí h kruhu H a E, F průsečíky tečny t_2 s touto kružnicí. Nechť o_1 (resp. o_2) značí osu úsečky CD (resp. EF), P_1 (resp. P_2) průsečík kružnice h s osou o_1 (resp. o_2), S_1 (resp. S_2) střed úsečky CD (resp. EF). Zvolme bod X (resp. Y) na úsečce P_1S_1 (resp. P_2S_2). Kružnice ε určená body C, X, D (resp. kružnice η určená body E, Y, F) omezuje kruh, který obsahuje M i N a obsahoval by proto i kruh S. Necháme-li X (resp. Y) blížit bodu S_1 (resp. bodu S_2), dospějeme k závěru, že S by měl být kruh ležící v ostrém úhlu $CDPFE$ a současně by měl obsahovat jak M tak i N. To zřejmě není možné.

Úloha 13. Popište množinu bodů, které patří do všech kruhů obsahujících oba kruhy M, N z obrázku 8. [Jsou to právě ty body, které leží ve vyšrafovaném obrazci].

Příklad 14. Budiž nyní znovu ϱ některá daná rovina, kterou chápeme jako množinu bodů. Podmnožina M roviny ϱ se nazývá *konvexní* právě tehdy, když pro každou dvojici bodů X, Y z M leží celá úsečka XY v M.[2]) Označme $K(\varrho)$ množinu všech konvexních podmnožin bodů roviny ϱ. Máme dokázat, že $(K(\varrho), \subset)$ je úplný svaz.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 2. Největším prvkem posetu $(K(\varrho), \subset)$ je patrně celá rovina ϱ. Je-li M některá neprázdná množina konvexních podmnožin A, B, ..., pak jejich průnik sestává z těch bodů roviny ϱ, které patří do všech podmnožin A, B, ... a to je konvexní podmnožina, neboť patří-li X, Y do tohoto průniku, patří celá úsečka XY do všech podmnožin A, B, ... a tedy tím spíše i do jejich průniku. Odtud již snadno vyvodíme, že zmíněný průnik je infimem množiny M.

Příklad 15. Máme dokázat, že poset $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ z úlohy 1 je úplný svaz.

Řešení. Užijeme větu 2. Při uspořádání σ_1 je číslo 0 největším prvkem posetu $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$. Nechť M je některá neprázdná podmnožina množiny $\boldsymbol{N}_0$ a nechť C značí množinu všech těch čísel z $\boldsymbol{N}_0$, která dělí všechna čísla z M. Zřejmě je $C \neq \emptyset$, neboť $1 \in C$. Je-li $M = \{0\}$,

---

[2]) K podrobnějšímu studiu pojmu konvexní množiny odkazuji čtenáře na zajímavou knížku J. Vyšína [4].

označme písmenem d číslo 0. Je-li M podmnožina, která obsahuje alespoň jedno přirozené číslo, označme písmenem d největší z čísel patřících do C (největší při obvyklém uspořádání $\leqq$); d existuje, neboť jej vybíráme z konečného počtu dělitelů zmíněného nenulového čísla patřícího do M. Tvrdíme, že d je infimem množiny M při uspořádání σ_1. Předně je dle výběru d vždy $d\ \sigma_1\ m$ pro každé $m \in M$. Je-li pro některé d_1 rovněž $d_1\ \sigma_1\ m$ pro každé $m \in M$, je každé $m \in M$ násobkem nejmenšího společného násobku $n(d, d_1)$ čísel d a d_1. Protože platí $d \leqq n(d, d_1)$ a právě jsme viděli, že $n(d, d_1) \in C$, je dle výběru d nutně $d = n(d, d_1)$. Vzhledem k tomu, že vždy je $d_1\ \sigma_1\ n(d, d_1)$, je $d_1\ \sigma_1\ d$ a platí proto (3i), což končí důkaz toho, že v $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ existuje infimum množiny M.

Vyšetříme nyní dva způsoby, jak lze danou rovinu opatřit strukturou uspořádané množiny. Přitom předpokládáme, že v této rovině máme dán pravoúhlý systém souřadnic. Každý bod roviny je pak určen uspořádanou dvojicí $[r_1, r_2]$ sestavenou ze souřadnic r_1, r_2.

Příklad 16. Pro dvě dvojice $[r_1, r_2]$, $[s_1, s_2]$ reálných čísel pišme $[r_1, r_2] \ll [s_1, s_2]$ právě tehdy, když nastane jedna z těchto situací:

(i) $[r_1, r_2] = [s_1, s_2]$[3]);
(ii) $r_1 < s_1$;
(iii) $r_1 = s_1$ a $r_2 < s_2$.

Máme vyšetřit relaci $\ll$ právě definovanou.

Řešení. Podle (i) je $\ll$ reflexivní. Tato relace je antisymetrická, neboť je-li $[r_1, r_2] \ll [s_1, s_2]$ a zároveň $[s_1, s_2] \ll [r_1, r_2]$, pak — ať nastane kterákoli ze situací

[3]) Tento požadavek znamená, že $r_1 = s_1$ a zároveň $r_2 = s_2$.

(i) až (iii) — je $r_1 \leqq s_1$ a $s_1 \leqq r_1$, takže $s_1 = r_1$ a v obou uvažovaných situacích nemůže nastat případ (iii), neboť pak by bylo $r_2 < s_2$ a také $s_2 < r_2$, což představuje spor. Zbývá tedy — jako jediná možná — situace (i). Relace $\ll$ je také tranzitivní, neboť je-li $[r_1, r_2] \ll$ $\ll [s_1, s_2]$ a $[s_1, s_2] \ll [t_1, t_2]$, pak je-li buď $[r_1, r_2] =$ $= [s_1, s_2]$ nebo $[s_1, s_2] = [t_1, t_2]$, je jistě $[r_1, r_2] \ll [t_1, t_2]$. Je-li ale $[r_1, r_2] \neq [s_1, s_2]$ a $[s_1, s_2] \neq [t_1, t_2]$, pak buď je alespoň jedno z čísel $t_1 - s_1$, $s_1 - r_1$ kladné a tedy také $t_1 - r_1 = (t_1 - s_1) + (s_1 - r_1) > 0$, což dává dle (ii) $[r_1, r_2] \ll [t_1, t_2]$, nebo jsou obě tato čísla rovna nule, takže $t_1 = r_1$, ale pak nutně $t_2 - r_2 = (t_2 - s_2) + (s_2 -$ $- r_2)$ je součet dvou kladných čísel, tj. $t_2 > r_2$ a proto $[r_1, r_2] \ll [t_1, t_2]$. Protože dle (i) — (iii) při kterékoli volbě $[r_1, r_2]$, $[s_1, s_2]$ nastane vždy buď $[r_1, r_2] \ll [s_1, s_2]$ nebo $[s_2, s_1] \ll [r_1, r_2]$, jedná se o řetězec a je to proto podle věty 1 svaz.

Uspořádání $\ll$ se nazývá *lexikografické.*

Úloha 14. Nechť $\ll$ značí lexikografické uspořádání bodů roviny a nechť $A = [a, b]$ je některý bod této roviny. Určete množinu těchto bodů $X = [x, y]$, které splňují $A \ll X$.
[Jsou to body X, pro něž $a < x$ a body polopřímky $x = a$, $b \leqq y$.]

Úloha 15. Popište množinu bodů X, které zároveň splňují podmínky $A \ll X$ a $X \ll B$, kde $A = [a, b]$, $B = [c, d]$ jsou dva pevně zvolené body.
[Návod: Rozlište případy $a = c$, $a < c$.]

Úloha 16. Nechť $A = [a, b]$ je daný bod roviny ϱ. Určete všechny ty přímky p roviny ϱ, které mají tu vlastnost, že pro kterýkoli jejich bod B platí $B \ll A$.

[Jsou to právě všechny rovnoběžky s osou y o rovnici $x = e$, kde $e < a$.]

Úloha 17. Pro dvě dvojice $[r_1, r_2]$, $[s_1, s_2]$ reálných čísel definujeme $[r_1, r_2] \leqq [s_1, s_2]$ právě tehdy, když $r_1 \leqq s_1$ a současně $r_2 \leqq s_2$. Dokažte, že relace $\leqq$ určuje na množině všech dvojic $[r_1, r_2]$ uspořádání a že příslušný poset je svaz, v němž platí

$$[r_1, r_2] \vee [s_1, s_2] = [\max(r_1, s_1), \max(r_2, s_2)],$$

$$[r_1, r_2] \wedge [s_1, s_2] = [\min(r_1, s_1), \min(r_2, s_2)].$$

Příklad 17. Označme Q množinu všech kvadratických trojčlenů $x^2 + px + q$, kde $p, q \in \boldsymbol{R}$, pro něž je diskriminant $\Delta = p^2 - 4q$ nezáporný. Pro dva kvadratické trojčleny $x^2 + p_i x + q_i$, $i = 1, 2$, patřící do Q, pišme

$$x^2 + p_2 x + q_2 \ll x^2 + p_1 x + q_1$$

právě tehdy, když

$$p_1 - p_2 \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|,$$

kde $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i$. Našim úkolem má být vyšetření relace $\ll$.

Řešení. Ukážeme nejprve, že relace $\ll$ je uspořádání množiny Q. Přitom je nejdříve ihned patrné, že tato relace je reflexívní. Je to ale i antisymetrická relace, neboť je-li $p_1 - p_2 \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ a $p_2 - p_1 \geqq |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_1}|$, je $p_1 - p_2 \geqq 0$ a $p_2 - p_1 \geqq 0$, takže $p_1 = p_2$ a proto $\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} = 0$, což má za následek, že $q_1 = q_2$. Relace $\ll$ je tranzitivní, neboť z $p_1 - p_2 \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ a $p_2 - p_3 \geqq |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_3}|$ plyne $p_1 - p_3 = (p_1 - p_2) +$

$+ (p_2 - p_3) \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}| + |\sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_3}| \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_3}|$, přičemž poslední nerovnost plyne užitím trojúhelníkové nerovnosti.

Dokážeme ještě tuto názornou charakterizaci relace $\ll$: Vztah $x^2 + p_2x + q_2 \ll x^2 + p_1x + q_1$ platí právě tehdy, když pro kořeny $\alpha_1 \leqq \beta_1$ polynomu $x^2 + p_1x + q_1$ a kořeny $\alpha_2 \leqq \beta_2$ polynomu $x^2 + p_2x + q_2$ platí $\alpha_2 \geqq \alpha_1$ a $\beta_2 \geqq \beta_1$. Abychom to nahlédli, uvažme, že vztah $p_1 - p_2 \geqq |\sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2}|$ je ekvivalentní se současnou platností vztahů

$$p_1 - p_2 \geqq \sqrt{\Delta_1} - \sqrt{\Delta_2} \text{ a } p_1 - p_2 \geqq \sqrt{\Delta_2} - \sqrt{\Delta_1}$$

a je tedy i ekvivalentní s tím, že současně platí

$$\alpha_1 = \frac{-p_1 - \sqrt{\Delta_1}}{2} \leqq \frac{-p_2 - \sqrt{\Delta_2}}{2} = \alpha_2$$

a

$$\beta_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2} \leqq \frac{-p_2 + \sqrt{\Delta_2}}{2} = \beta_2.$$

Užitím výsledku úlohy 17 usuzujeme, že i zde se jedná o svaz, v němž pro trojčleny $x^2 + p_3x + q_3$, $x^2 + p_4x + q_4$ s kořeny po řadě $\alpha_3 \leqq \beta_3$ a $\alpha_4 \leqq \beta_4$ je

$$x^2 + p_3x + q_3 \vee x^2 + p_4x + q_4$$

(resp. $x^2 + p_3x + q_3 \wedge x^2 + p_4x + q_4$) trojčlen $x^2 + p_5x + q_5$ (resp. $x^2 + p_6x + q_6$) s kořeny $\alpha_5 = \max(\alpha_3, \alpha_4) \leqq \beta_5 = \max(\beta_3, \beta_4)$ (resp. s kořeny $\alpha_6 = \min(\alpha_3, \alpha_4) \leqq \beta_6 = \min(\beta_3, \beta_4)$). Zejména tedy máme

$$p_5 = -\left[\max\left(\frac{-p_3 - \sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4 - \sqrt{\Delta_4}}{2}\right) + \right.$$

$$+ \max\left(\frac{-p_3+\sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4+\sqrt{\Delta_4}}{2}\right)\Bigg],$$

$$q_5 = \max\left(\frac{-p_3-\sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4-\sqrt{\Delta_4}}{2}\right).$$

$$\cdot \max\left(\frac{-p_3+\sqrt{\Delta_3}}{2}, \frac{-p_4+\sqrt{\Delta_4}}{2}\right)$$

a nahradíme-li v těchto formulích symbol max symbolem min, získáváme formule pro p_6, q_6.

Cvičení

1. Pro kruhy M, N z obrázku 7 neexistuje v posetu $(C(\varrho), \subset)$ infimum množiny $\{M, N\}$.

2. Dokažte, že jsou-li K_1, K_2 dva kruhy ve smyslu příkladu 13, přičemž $K_1 \neq \emptyset$ a $K_2 \neq \emptyset$, pak existuje právě jeden kruh K, který obsahuje K_1 i K_2 a který má nejmenší poloměr.

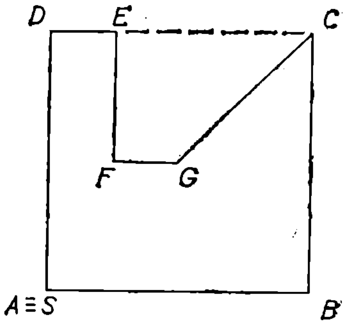
3. Dokažte: Jsou-li K_1, K_2 dva kruhy ve smyslu příkladu 13, přičemž jejich průnik je neprázdný, pak existuje právě jeden kruh K, který je obsažen v K_1 i v K_2 a který má největší poloměr.

4. Rozhodněte, zda omezíme-li se v příkladu 13 pouze na ty otevřené kruhy, jejichž střed leží na dané přímce p (včetně prázdné množiny), tvoří množina $C(\varrho; p)$ takovýchto kruhů při uspořádání inkluzí svaz (resp. úplný svaz).

5. Podmnožinu M některé roviny nazveme *hvězdovitou* právě tehdy, když platí toto (srovn. obr. 9): V M existuje alespoň jeden bod S takový, že pro každý bod X z M

leží v M i každý bod úsečky SX. Např. obrazec $ABCGFED$ určuje hvězdovitou množinu. Označme $H(\varrho)$ množinu všech hvězdovitých množin bodů roviny ϱ. Rozhodněte, zda $(H(\varrho), \subset)$ je a) poset b) svaz c) úplný svaz.

6. Označme $F(\boldsymbol{R})$ množinu, jejímiž prvky jsou všechny posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ reálných čísel (stručný zápis posloupnosti: $\{a_i\}$). Pro dvě posloupnosti $a = \{a_i\}$, $b = \{b_i\}$ pišme $a \ll b$ právě tehdy, když $a_i \leqq b_i$ pro každé $i \in \boldsymbol{N}$. Rozhodněte, zda $(F(\boldsymbol{R}), \ll)$ je a) poset b) svaz c) úplný svaz.



Obr. 9

7. Dokažte, že v každém svazu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ platí toto:

a) Je-li $k \leqq h$ a $n \leqq m$, pak $k \vee n \leqq h \vee m$.
b) Je-li $d_1 \leqq h$ a $d_2 \leqq h$, pak $d_1 \vee d_2 \leqq h$.
c) Je-li $c \leqq d$, pak pro každé $g \in P$ platí $c \vee g \leqq d \vee \vee g$.
d) Je-li $k \leqq h$ a $n \leqq m$, pak $k \wedge n \leqq h \wedge m$.
e) Je-li $d \leqq h_1$ a $d \leqq h_2$, pak $d \leqq h_1 \wedge h_2$.
f) Je-li $c \leqq d$, pak pro každé $g \in P$ platí $c \wedge g \leqq d \wedge g$.

8. Dokažte, že v každém svazu $\mathscr{P}$ platí pro kterékoli $a, b, c \in P$

a) $a \vee (b \wedge c) \leqq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;
b) $a \wedge (b \vee c) \geqq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
c) je-li $a \leqq c$, pak $a \vee (b \wedge c) \leqq (a \vee b) \wedge c$.