Uspořádané množiny

2. kapitola. Svazy - základní vlastnosti

In: Ladislav Beran (author): Uspořádané množiny. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1978. pp. 21–31.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403924

2. kapitola

SVAZY — ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

V dalším budeme potřebovat pojem infima a suprema podmnožiny nosiče některého posetu.

Budeme říkat, že neprázdná podmnožina M nosiče P posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ má v $\mathscr{P}$

infimum právě tehdy, když existuje prvek i, který má následující tři vlastnosti:

(1i) $i \in P$;

(2i) pro každé $m \in M$ platí

$$i \leqq m;$$

(3i) platí-li pro některý prvek i_1 množiny P pro každé m patřící do M vztah $i_1 \leqq m$, pak již nutně $i_1 \leqq i$. Prvek i se nazývá *infimum* množiny M v posetu $\mathscr{P}$. Přitom zavádíme tuto dohodu: Budeme psát

$$i = \inf_{\mathscr{P}} M$$

právě tehdy, když existuje infimum množiny M v posetu $\mathscr{P}$ a rovná se i.

supremum právě tehdy, když existuje prvek s, který má následující tři vlastnosti:

(1s) $s \in P$;

(2s) pro každé $m \in M$ platí

$$m \leqq s;$$

(3s) platí-li pro některý prvek s_1 množiny P pro každé m patřící do M vztah $s_1 \geqq m$, pak již nutně $s_1 \geqq s$. Prvek s se nazývá *supremum* množiny M v posetu $\mathscr{P}$. Přitom zavádíme tuto dohodu: Budeme psát

$$s = \sup_{\mathscr{P}} M$$

právě tehdy, když existuje supremum množiny M v posetu $\mathscr{P}$ a rovná se s.

K právě podané definici suprema a infima připojme dvě poznámky. Předně pro každou množinu M, $\emptyset \neq \neq M \subset P$, existuje nejvýše jedno infimum a nejvýše jedno supremum. Splňuje-li totiž prvek I rovněž požadavky (1i) — (3i), pak dle (2i) a (3i) musí platit $i_1 = = I \leqq i$ a z těchže podmínek (2i) a (3i) vypsaných pro I plyne, že $i \leqq I$. Protože relace $\leqq$ je antisymetrická, je $i = I$. Podobně lze postupovat pro supremum. Dále uveďme, že je zvykem označovat prvek $d \in P$ takový, že $d \leqq m$ pro každé $m \in M$ názvem *dolní závora* množiny M v posetu $\mathscr{P}$. Obdobně prvek $h \in P$ takový, že $h \geqq m$ pro každé m z množiny M, se nazývá *horní závora* množiny M v posetu $\mathscr{P}$. Při této úmluvě bývají vztahy (2i) a (3i) formulovány stručněji tak, že pro prvek i žádáme, aby to byla dolní závora množiny M (viz (2i)) a aby to byla největší z dolních závor této množiny (viz (3i)). Obdobně lze požadavky (2s) a (3s) shrnout do stručnějšího požadavku, že s má být nejmenší horní závora množiny M v $\mathscr{P}$.

Příklad 6. Nechť $E = \{a, b\}$ a nechť $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ je uspořádaná množina, jejímiž prvky jsou všechny podmnožiny množiny E a v níž je uspořádání dáno inkluzí. Označme $M_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$, tj. M_2 je dvouprvková množina o prvcích $\{a\}$, $\{b\}$ (což jsou jednoprvkové množiny). Máme vyšetřit zda existuje supremum a infimum množiny M_2 v posetu $\mathscr{P}(E)$ a nalezený výsledek zobecnit.

Řešení. Předpokládejme, že existuje supremum množiny M_2 v $\mathscr{P}(E)$ a označme ho S. Podle (1s) je $S \subset E$ a dle (2s) má být $\{a\} \subset S$ a zároveň $\{b\} \subset S$, přičemž dle (3s) to má být nejmenší možná množina. Proto soudíme, že $S = \{a, b\}$ a obdobně, že infimum je prázdná množina $I = \emptyset$. Přitom zřejmě $\{a, b\}$ je sjednocením množin $\{a\}$, $\{b\}$ a $\emptyset$ je průnik množin $\{a\}$, $\{b\}$.

Nalezený výsledek nás vede k tomu, abychom vyslovili tuto domněnku: Je-li E některá množina a M, N dvě její podmnožiny, pak

$$\sup_{(P(E),\subset)}\{M, N\} = M \cup N,\ \inf_{(P(E),\subset)}\{M, N\} = M \cap N\,.$$

Tuto domněnku dokážeme, ukážeme-li, že $M \cup N$ (resp. $M \cap N$) splňuje podmínky (1s) — (3s) (resp. (1i) — (3i)). Úvahy provedeme pro $M \cup N$. Protože $M \cup N \subset E$, platí (1s). Protože $M \subset M \cup N$ a $N \subset M \cup N$, platí (2s). Je-li H podmnožina množiny E taková, že $M \subset H$ a $N \subset H$, pak $M \cup N \subset H$, tedy platí také (3s).

Úloha 8. Dokažte, že pro každou jednoprvkovou podmnožinu $\{a\}$ množiny P existuje v kterémkoli posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ $\sup_{\mathscr{P}}\{a\}$ a $\inf_{\mathscr{P}}\{a\}$.
[V obou případech je to prvek a.]

Příklad 7. Nechť a, b jsou dvě přirozená čísla. Máme vyšetřit existenci infima a suprema množiny $\{a, b\}$ v uspořádané množině $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ z úlohy 1.

Řešení. Označme n (resp. d) nejmenší společný násobek (resp. největší společný dělitel) čísel a, b. Tvrdíme, že

$$n = \sup_{(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)}\{a, b\}, \quad d = \inf_{(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)}\{a, b\}\,.$$

Dokážeme první vztah, druhý ponecháme čtenáři jako cvičení. Předně platí (1s), neboť pro dvě přirozená čísla existuje vždy přirozené číslo, které je jejich nejmenším společným násobkem. Dále platí (2s), neboť $a \mid n$ a také $b \mid n$. Konečně platí i (3s), neboť je-li s_1 celé nezáporné číslo takové, že $a \mid s_1$ a $b \mid s_1$, pak s_1 je společným násobkem čísel a, b a proto $n \mid s_1$.

Úloha 9. Dokažte, že supremum a infimum v $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ existuje pro každou dvouprvkovou množinu $\{a, b\}$, kde a, b jsou celá nezáporná čísla.
[Pozor, platí $\sup_{(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)} \{0, a\} = 0, \inf_{(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)} \{0, a\} = a$.]

Množina $\boldsymbol{Z}$ nemá v uspořádané množině $(\boldsymbol{Z}, \leqq)$ ani infimum ani supremum, neboť v $\boldsymbol{Z}$ neexistuje ani největší ani nejmenší číslo. Méně snadnější je nahlédnout takovouto neexistenci suprema či infima v některých jiných situacích. Jedna z nich je předmětem následujícího příkladu. Čtenáři doporučujeme, aby příklad při prvním čtení této knížky probral jen orientačně a vrátil se k němu podrobněji až při druhém čtení.

Příklad 8. Nechť D značí množinu těch kladných racionálních čísel q, pro něž $q^2 > 2$. Máme dokázat, že v uspořádané množině $(\boldsymbol{Q}, \leqq)$, kde $\boldsymbol{Q}$ značí množinu racionálních čísel, neexistuje infimum množiny D.

Řešení. Především ukážeme, že (i) *pro každý prvek q patřící do D existuje prvek q_1 patřící do D a takový, že* $q_1 < q$. Abychom to nahlédli, vyjdeme z předpokladu, že prvek q_1 lze hledat ve tvaru $q_1 = q - \varepsilon$, kde ε je vhodné „malé" kladné racionální číslo. Prvek q_1 má patřit do D, má tedy být splněn vztah $2 < (q - \varepsilon)^2$, který snadno přepíšeme na požadavek $2\varepsilon q - \varepsilon^2 < q^2 - 2$. Tuto podmínku bychom potřebovali splnit vhodným kladným racionálním číslem ε. Budeme se proto snažit zjednodušit tento vztah účelným obratem tak, aby se v příslušné podmínce již nevyskytovalo ε^2. To je možné provést takto: Určíme-li $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $2\varepsilon q \leqq q^2 - 2$, pak — protože $2\varepsilon q - \varepsilon^2 < 2\varepsilon q$ — jistě platí i výchozí požadavek na ε. Nyní je další postup snadný: Zvolíme $\varepsilon = (q^2 - 2) : (2q)$. Je to kladné racionální číslo (ověřte), neboť dle předpokladu je q racionální.

Jím určené číslo $q_1 = q - \varepsilon = (q^2 + 2) : (2q)$ patří do D, neboť „obrácení" předchozího postupu dává

$$q_1^2 = (q - \varepsilon)^2 = q^2 - 2q\varepsilon + \varepsilon^2 =$$
$$= q^2 - (q^2 - 2) + \varepsilon^2 = 2 + \varepsilon^2 > 2 .$$

Dále ukážeme, že (ii) *je-li $d \geqq 1$ takové racionální číslo, že $d^2 < 2$, pak existuje takové racionální číslo d_1, že $d < d_1$ a $d_1^2 < 2$*. Pro důkaz tohoto výroku uvažme, že $2 < 4 \leqq (d + 1)^2$ a že proto $0 < \varepsilon_1 = (2 - d^2) : (2d + + 1) < 1$. Poslední nerovnost pro ε_1 dává $\varepsilon_1^2 < \varepsilon_1$ a tedy platí $2d\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 < 2d\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2 - d^2$. Pro $d_1 = d + \varepsilon_1$ v důsledku toho máme $d_1^2 = (d + \varepsilon_1)^2 < 2$. (Čtenář, který se poprvé seznamuje s úvahami tohoto druhu, by si měl důkaz výroku (ii) zpětně rozebrat podrobněji tak, aby viděl, jakou úvahou (obdobnou důkazu (i)) se dojde k uvedenému tvaru pro ε_1.)

Ukážeme posléze, že (iii) *předpoklad existence infima množiny D v $(\mathbf{Q}, \leqq)$ vede ke sporu*. Vskutku, kdyby d byl prvek s vlastnostmi (1i) až (3i), pak — protože pro každý prvek $q \in D$ je $q > 1$ — je 1 dolní závorou množiny D a proto by d nutně splňovalo $d \geqq 1$. Kdyby nejprve platilo $d^2 > 2$, pak by bylo $d \in D$ a dle (i) by existoval takový prvek $q_1 \in D$, že $q_1 < d$, což je ale spor s (2i). Kdyby platilo, že $d^2 = 2$, bylo by $d = \sqrt{2}$ a současně by d mělo být racionální číslo. To je spor s dobře známým faktem, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. Zůstává případ $d^2 < < 2$. Podle (ii) ale existuje d_1 tak, že $d < d_1$ a $d_1^2 < 2$, takže tím spíše je $d_1^2 < q^2$ pro $q \in D$ a tedy i $d_1 < q$ pro každé $q \in D$. Číslo d_1 by tak bylo rovněž racionální dolní závorou množiny D a přitom by bylo větší než největší dolní závora této množiny. To je spor s (3i). Předpoklad existence infima množiny D v $(\mathbf{Q}, \leqq)$ vedl v každém případě ke sporu a proto uvedené infimum neexistuje.

Poznamenejme, že v množině $\boldsymbol{R}$ reálných čísel existuje $\inf_{(\boldsymbol{R}, \leqq)} D$ a rovná se $\sqrt{2}$.

Úloha 10. Dokažte: a) Neexistuje takové racionální číslo s/t, kde $s, t \in \boldsymbol{Z}$, aby platilo

$$10^{s/t} = 2\,.$$

b) Pro každé přirozené číslo n platí vztah

$$0 < 10^{1/n} - 1 \leqq \frac{9}{n}\,.$$

c) Je-li q takové číslo, že $10^q > 2$, pak pro každé přirozené číslo $n > 18 : (10^q - 2)$ je $2 : 10^q < 10^{-1/n} < 1$.

d) Je-li q takové racionální číslo, že $10^q > 2$, pak existuje takové racionální číslo q_1, že $q_1 < q$ a zároveň $10^{q_1} > 2$.

e) Je-li d racionální číslo s vlastností $10^d < 2$, pak existuje takové racionální číslo d_1, že $d < d_1$ a současně $10^{d_1} < 2$.

f) Budiž E množina, jejímiž prvky jsou právě ta racionální čísla q, pro něž platí $10^q > 2$. Dokažte, že v posetu $(\boldsymbol{Q}, \leqq)$ neexistuje infimum množiny E.

g) Ověřte, že $\inf_{(\boldsymbol{R}, \leqq)} E = \log 2$.

[Návod: a) Vyšetřete vztah $5^s = 2^{t-s}$, kde s, t patří do množiny $\boldsymbol{N}$ přirozených čísel. b) Užijte binomickou poučku na výraz $\left(1 + \dfrac{9}{n}\right)^n$. c) Ukažte, že $\dfrac{10^q}{2} - 1 > \dfrac{9}{n}$.
d) Položte $q_1 = q - \dfrac{1}{n}$, kde $n > 18 : (10^q - 2)$. e) Položte $d_1 = d + \dfrac{1}{m}$, kde $m > 9 . 10^d : (2 - 10^d)$ a ukažte, že pak $10^{1/m} \leqq 1 + (9 : m) < 2 . 10^{-d}$.]

V uspořádaných množinách definujeme pojem největšího (nejmenšího) prvku následovně: Řekneme, že

prvek $\iota \in P$ je *největší prvek* posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ právě tehdy, když pro každé $p \in P$ platí $p \leqq \iota$. Největší prvek posetu $\mathscr{P}$ bývá rovněž nazýván *jednotkový prvek* posetu $\mathscr{P}$ a značí se zpravidla 1.	prvek $\omega \in$ P je *nejmenší prvek* posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ právě tehdy, když pro každé $p \in P$ platí $p \geqq \omega$. Nejmenší prvek posetu $\mathscr{P}$ bývá rovněž nazýván *nulový prvek* posetu $\mathscr{P}$ a značí se zpravidla 0.

Úloha 11. Rozhodněte, zda existuje nulový či jednotkový prvek a) v posetu $(\boldsymbol{N}, \leqq)$ b) v posetu $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ (srovn. úlohu 1).
[a) existuje nulový prvek a neexistuje jednotkový prvek. b) existuje nulový i jednotkový prvek.]

Existuje-li pro každé dva různé prvky a, b uspořádané množiny $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ jak $\sup_{\mathscr{P}} \{a, b\}$ tak i $\inf_{\mathscr{P}} \{a, b\}$, nazývá se $\mathscr{P}$ *svaz*. Existuje-li pro každou neprázdnou podmnožinu M nosiče P posetu $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ jak $\sup_{\mathscr{P}} M$ tak i $\inf_{\mathscr{P}} M$, nazývá se $\mathscr{P}$ *úplný svaz*.

Podle této definice je zřejmé, že každý úplný svaz je svazem. Z řešení příkladu 6 plyne, že uspořádaná množina $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ je příkladem svazu. Výsledek úlohy 9 říká, že $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ je svaz. Z poznámky za úlohou 9 usuzujeme, že poset $(\boldsymbol{Z}, \leqq)$ není úplný svaz. Je to však svaz, což vyplyne nejrychleji z následujících obecnějších úvah.

Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ je některá uspořádaná množina a pro dva její prvky a, b nechť platí $a \leqq b$. V tomto případě píšeme

$$\max_{\mathscr{P}} (a, b) = b \quad \text{a} \quad \min_{\mathscr{P}} (a, b) = a$$

a oba zápisy čteme po řadě „maximum (resp. minimum) prvků a, b je rovno b (resp. a)". *Řetězcem* se rozumí uspořádaná množina $(R, \leqq)$, v níž pro každé dva prvky r, s platí buď $r \leqq s$ nebo $s \leqq r$. Posety $(\boldsymbol{N}, \leqq)$, $(\boldsymbol{Z}, \leqq)$, $(\boldsymbol{Q}, \leqq)$, $(\boldsymbol{R}, \leqq)$ jsou příklady řetězců, poset $(\boldsymbol{N}_0, \sigma_1)$ není řetězec, neboť neplatí ani $2\ \sigma_1\ 3$ ani $3\ \sigma_1\ 2$.

Příklad 9. Nechť $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ je poset a pro dva jeho prvky a, b nechť platí $a \leqq b$. Máme dokázat, že

$$\inf_{\mathscr{P}} \{a, b\} = \min_{\mathscr{P}} (a, b)$$

a

$$\sup_{\mathscr{P}} \{a, b\} = \max_{\mathscr{P}} (a, b).$$

Řešení. Provedeme příslušné úvahy pouze pro první z obou vztahů, ověření druhého ponecháváme čtenáři.

Předně je $a = \min_{\mathscr{P}} (a, b)$. Stačí tedy ukázat, že prvek a má vlastnosti infima množiny $\{a, b\}$. Platnost (1i) je zřejmá. Protože relace $\leqq$ je reflexivní, platí $a \leqq a$ a dle předpokladu je též $a \leqq b$, takže platí (2i). Je-li $a_1 \in P$ dolní závora množiny $\{a, b\}$, pak tím spíše $a_1 \leqq a$ a proto platí i (3i).

Věta 1. *Každý řetězec je svaz.*

Důkaz. Protože pro každé dva prvky a, b řetězce platí $a \leqq b$ nebo $b \leqq a$, existuje podle příkladu 9 jak infimum tak i supremum každé dvouprvkové podmnožiny nosiče řetězce a tedy řetězec je svaz.

Z věty 1 usuzujeme, že posety $(\boldsymbol{N}, \leqq)$, $(\boldsymbol{Z}, \leqq)$, $(\boldsymbol{Q}, \leqq)$, $(\boldsymbol{R}, \leqq)$ jsou svazy. Právě tak je svazem poset $(D, \leqq)$ z příkladu 8 a poset $(E, \leqq)$ z úlohy 10. Žádný z těchto svazů však není úplný, neboť neexistuje supremum jeho nosiče.

K snadnému rozpoznání, zda daný poset je či není úplný svaz, slouží následující poučka.

Věta 2. *Poset $\mathscr{P} = (P, \leqq)$ je úplný svaz právě tehdy, když pro každou neprázdnou množinu $M \subset P$ existuje* $\inf_{\mathscr{P}} M$ *a když poset $\mathscr{P}$ má největší prvek.*

Důkaz. 1) Předpokládejme, že je splněna podmínka této věty. Nejprve dokážeme, že pro každou neprázdnou podmnožinu $M \subset P$ existuje $\sup_{\mathscr{P}} M$. Označme H množinu těch prvků $h \in P$, pro něž platí $m \leqq h$ pro každé $m \in M$ (takže do H dáváme právě všechny horní závory množiny M). Množina H je neprázdná, neboť největší prvek posetu $\mathscr{P}$ zřejmě patří do H. Podle předpokladu existuje $\inf_{\mathscr{P}} H$. Označme toto infimum i_0. Zvolíme-li $m \in M$, pak $m \leqq h$ platí pro každé $h \in H$. Podle (3i) tedy platí $m \leqq i_0$. Vidíme tak, že prvek $i_0 \in P$ má vlastnost (1s) a (2s). Ukážeme, že má i vlastnost (3s): Je-li totiž $m \leqq i_1$ pro každé $m \in M$, je $i_1 \in H$ a protože i_0 je infimum množiny H, je dle (2i) $i_0 \leqq i_1$, což ukazuje platnost vztahu (3s). Dokázali jsme tak, že $i_0 = \sup_{\mathscr{P}} M$.

2) Je-li $\mathscr{P}$ úplný svaz, pak přímo z definice plyne existence zmíněných infim. Protože existuje $\iota = \sup_{\mathscr{P}} P$ a protože je to dle (2s) prvek takový, že $p \leqq \iota$ pro každé $p \in P$, je zřejmé, že $\mathscr{P}$ má největší prvek.

Příklad 10. Máme dokázat, že poset $\mathscr{P}(E) = (P(E), \subset)$ z příkladu 6 je úplný svaz.

Řešení. K řešení užijeme větu 2. Největším prvkem posetu $\mathscr{P}(E)$ je zřejmě E. Je-li M neprázdná množina podmnožin $A, B, \ldots$ množiny E, pak $I = \inf_{\mathscr{P}(E)} M$ má být podmnožina množiny E, která je obsažena ve všech podmnožinách $A, B, \ldots$ (to žádá přepis podmínky (2i)) a je-li I_1 podmnožina množiny E, která je obsažena ve všech podmnožinách $A, B, \ldots$, pak I_1 má být podmnožinou množiny I (to žádá přepis podmínky (3i)). Těmto požadavkům patrně vyhovuje množina, jejímiž prvky jsou právě ty prvky množiny E, které patří do všech podmnožin $A, B, \ldots$, tj. *průnik* všech těchto podmnožin.

Příklad 11. Nechť $E(N)$ značí množinu všech ekvivalencí na množině $N \neq \emptyset$. Máme dokázat, že uspořádaná množina $(E(N), \subset)$ je úplný svaz.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 2. Největším prvkem je taková ekvivalence ϱ_0, že pro každé dva prvky $n_1, n_2 \in N$ je $n_1 \varrho_0 n_2$ (takže $\varrho_0 = N \times \times N$). Je-li M neprázdná množina ekvivalencí $\varrho, \sigma, \ldots$ na množině N, pak existuje $\inf_{(E(N),\subset)} M$. Vskutku, definujeme-li relaci τ na M tak, že $n_1 \tau n_2$ platí právě tehdy, když pro všechny ekvivalence $\varrho, \sigma, \ldots$ z M platí $n_1 \varrho n_2, n_1 \sigma n_2, \ldots$, snadno nahlédneme, že τ je ekvivalence. Například tranzitivita relace τ plyne takto: Je-li $n_1 \tau n_2$ a $n_2 \tau n_3$, pak pro každé $\varrho, \sigma, \ldots$ je $n_1 \varrho n_2$, $n_2 \varrho n_3$, $n_1 \sigma n_2$, $n_2 \sigma n_3$, $\ldots$ a protože $\varrho, \sigma, \ldots$ jsou tranzitivní relace, je také $n_1 \varrho n_3$, $n_1 \sigma n_3$, $\ldots$, tj. vidíme, že $n_1 \tau n_3$. Požadavek (2i) se pro τ přepisuje takto: Má být $\tau \subset \varrho, \tau \subset \sigma, \ldots$. Co ale znamená například požadavek $\tau \subset \varrho$? Znamená, že ze vztahu $(n_1, n_2) \in \tau$ plyne vždy vztah $(n_1, n_2) \in \varrho$. Přejdeme-li k ekvivalentnímu přepisu, jedná se o ověření toho, že z $n_1 \tau n_2$ plyne $n_1 \varrho n_2$. To je ale okamžitě patrné přímo z definice relace τ. Podívejme se dále na přepis požadavku (3i). Platí-li současně $\tau_1 \subset \varrho, \tau_1 \subset \sigma, \ldots$, pak má být $\tau_1 \subset \tau$. Zvolme proto $n_3, n_4 \in N$ tak, že $(n_3, n_4) \in \tau_1$. Potřebujeme ukázat, že nutně $(n_3, n_4) \in \tau$. Ale $(n_3, n_4) \in \tau_1$ a $\tau_1 \subset \varrho$ dává $(n_3, n_4) \in \varrho$, tj. $n_3 \varrho n_4$ a podobně najdeme i $n_3 \sigma n_4, \ldots$, tj. $n_3 \tau n_4$. Ukázali jsme tak, že τ je infimum množiny M v posetu $(E(N), \subset)$.

Cvičení

1. Nakreslete diagram posetu $(\boldsymbol{N}_4, \delta)$ (srovn. str. 7).

2. Užitím výsledku cvičení 1 z 1. kapitoly nalezněte diagram posetu, který má za nosič množinu všech relací na dvouprvkové množině $\{a, b\}$ a jehož uspořádání je dáno inkluzí.

3. Dokažte, že všechny relace na množině M tvoří při uspořádání daném inkluzí úplný svaz.

4. Rozhodněte, zda
   a) všechny reflexívní;
   b) všechny symetrické;
   c) všechny antisymetrické;
   d) všechny tranzitivní

relace na dané množině M tvoří při uspořádání daném inkluzí úplný svaz.

5. Vyšetřete, zda
   a) všechna preuspořádání;
   b) všechna uspořádání

na dané množině tvoří při uspořádání inkluzí úplný svaz.

6. Užitím výsledků cvičení 5 z první kapitoly nalezněte diagram svazu $(E(N), \subset)$ v případě, že
   a) $N = \{a, b, c\}$;
   b) $N = \{a, b, c, d\}$.

7. Nechť I značí množinu všech racionálních čísel z uzavřeného intervalu $\langle 1, 2 \rangle$. Poset $(I, \leqq)$ není úplný svaz. Dokažte.