Uspořádané množiny

Úvod

In: Ladislav Beran (author): Uspořádané množiny. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1978. pp. 7–10.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403922

ÚVOD

Ve škole jste si osvojili např. význam výroku „*číslo a je menší než číslo b*“ nebo význam výroku „*množina A je podmnožinou množiny B*“. Společné pro takovéto výroky je to, že říkají, že jeden objekt je v jistém vztahu (relaci) k druhému objektu. V dalším nám půjde o studium takovýchto relací. V první řadě proto zpřesníme tento pojem tak, abychom jej mohli podrobovat matematickému vyšetřování.

Pro větší názornost si pro úvahy vedoucí k zpřesnění pojmu relace zvolíme příklad s konečným počtem prvků. Ze školy si jistě pamatujete, že pro dvě celá čísla m, n říkáme, že *m dělí n* a píšeme $m \mid n$ právě tehdy, když existuje celé číslo k takové, že $km = n$.

Nalezněme všechna čísla a, b množiny $\boldsymbol{N}_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, pro něž $a \mid b$. Máme patrně tyto případy:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 \mid 0; \\ 1 \mid 0,\ 1 \mid 1,\ 1 \mid 2,\ 1 \mid 3,\ 1 \mid 4; \\ 2 \mid 0,\ 2 \mid 2,\ 2 \mid 4; \\ 3 \mid 0,\ 3 \mid 3; \\ 4 \mid 0,\ 4 \mid 4. \end{array} \right.$$

Pišme nyní $a\ \delta\ b$ právě tehdy, když $a, b \in \boldsymbol{N}_4$ a když a dělí b. Dostáváme tak další příklad vztahu, který jistě budeme chtít zahrnout pod pojem relace. Předně se bez potíží dohodneme na čtení zápisu $a\ \delta\ b$ slovy „*a je ve* *vztahu δ k b*“ nebo slovy „*a je v relaci δ k b*“ a tato úmluva nás přirozeným způsobem vede k tomu, že uvažovanou relaci nazveme δ. Zůstává však vyjasnit, co relace δ vlastně je. Podle výše uvedeného v (1) můžeme říci, že platí $a\,\delta\,b$ právě tehdy, když (a, b) je jedna z uspořádaných dvojic

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (0, 0); \\ (1, 0),\ (1, 1),\ (1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4); \\ (2, 0),\ (2, 2),\ (2, 4); \\ (3, 0),\ (3, 3); \\ (4, 0),\ (4, 4). \end{array} \right.$$

Tato formulace nás přivádí na myšlenku, že bude účelné definovat relaci δ jako množinu, jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (2). Tuto definici doplníme úmluvou, že zápis $a\,\delta\,b$ budeme považovat za ekvivalentní s tím, že (a, b) je prvkem množiny δ, tj. s tím, že $(a, b) \in \delta$.

Přejděme nyní k obecnému případu. Budiž A některá neprázdná množina. *Kartézskou druhou mocninou* množiny A rozumíme množinu A^2 (značenou též $A \times A$), jejímiž prvky jsou právě všechny uspořádané dvojice (a, b), kde a, b probíhá prvky množiny A. Řekneme, že ϱ je *relace* na množině A právě tehdy, když ϱ je podmnožina množiny A^2. Vztah $(a, b) \in \varrho$ považujeme za ekvivalentní se zápisem $a\,\varrho\,b$.

Příklad 1. Máme nalézt kartézskou druhou mocninu množiny $\boldsymbol{N}_4$.

Řešení. Množina $\boldsymbol{N}_4^2$ je množina o prvcích, které jsou pro přehled uspořádány do následujícího schématu:

$$
\begin{array}{lllll}
(0, 0), & (0, 1), & (0, 2), & (0, 3), & (0, 4), \\
(1, 0), & (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & (1, 4), \\
(2, 0), & (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & (2, 4), \\
(3, 0), & (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & (3, 4), \\
(4, 0), & (4, 1), & (4, 2), & (4, 3), & (4, 4).
\end{array}
$$

Závěrem úvodu připomeňme, že je-li reálné číslo p menší nebo rovno q, píšeme $p \leqq q$ a že pro kterákoli reálná čísla p, q, r platí toto: (i) $p \leqq p$; (ii) je-li $p \leqq q$ a $q \leqq p$, pak $p = q$; (iii) je-li $p \leqq q$ a $q \leqq r$, pak $p \leqq r$. Zde dostáváme další příklad relace $\leqq$ na množině $\boldsymbol{R}$ reálných čísel, kterou bychom mohli ve shodě s předcházejícím chápat jako množinu, jejímiž prvky jsou právě ty uspořádané dvojice (p, q) reálných čísel, pro něž je rozdíl $q - p$ nezáporné číslo.