Rovinné grafy

Výsledky cvičení

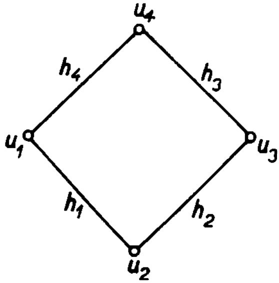
In: Bohdan Zelinka (author): Rovinné grafy. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 113–129.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403913

VÝSLEDKY CVIČENÍ

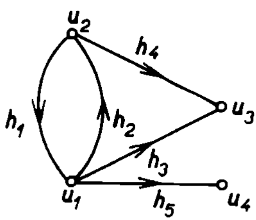
I. KAPITOLA

1. Graf G je na obrázku IX.1.



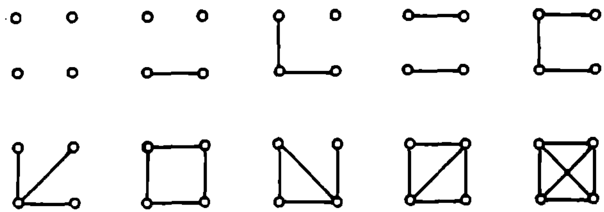
Obr. IX.1

2. Graf G je na obrázku IX.2.



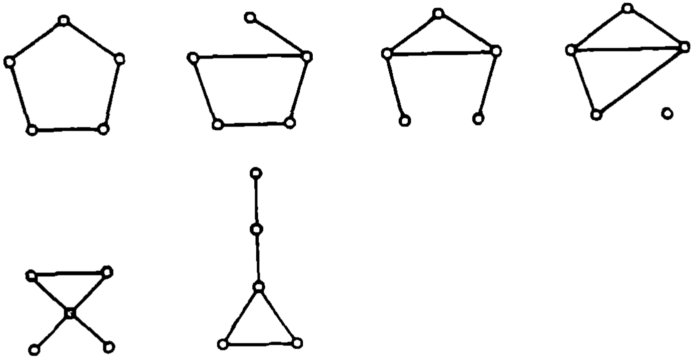
Obr. IX.2

3. Tyto grafy jsou na obrázku IX.3.



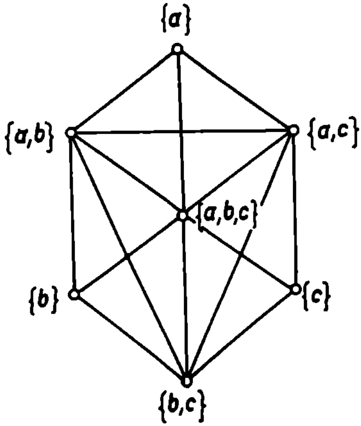
Obr. IX.3

4. Tyto grafy jsou na obrázku IX.4.



Obr. IX.4

5. Tento graf je na obrázku IX.5.



Obr. IX.5

II. KAPITOLA

1. Podle věty II.1 je počet uzlů lichého stupně v grafu vždy sudý. Ve zmíněném grafu by muselo být 35 uzlů stupně 5, tedy takovýto graf neexistuje.

2. Nechť cesta C je $u = u_0, h_1, u_1, \ldots, h_k, u_k = v$. Předpokládejme, že existují uzly u_i, u_j cesty C, které jsou spojeny hranou nepatřící do C; můžeme předpokládat, že $i < j$. Pak $j \neq i + 1$, protože jinak by hrana u_iu_j patřila do C. Odstraníme-li z cesty C uzly $u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}$ a hrany $h_{i+1}, \ldots, h_j$ a přidáme-li hranu u_iu_j, dostaneme cestu délky $k + i - j$, což je číslo menší než k. Došli jsme ke sporu s předpokladem, že $d(u, v) = k$.

3. Nechť $d(u, v)$ a $d(v, w)$ jsou konečná čísla. Existuje cesta C_1 délky $d(u, v)$ z u do v a cesta C_2 délky $d(v, w)$ z v do w. Napíšeme-li uzly a hrany cesty C_1 v příslušném pořadí a za ně uzly a hrany cesty C_2 rovněž v příslušném pořadí, dostaneme spojení uzlů u a w, které má $d(u, v) + d(v, w)$ hran. Postupujeme-li jako v důkaze věty II.2, dostaneme cestu z u do w délky, která nemůže být větší než $d(u, v) + d(v, w)$. Je tedy $d(u, v) + d(v, w) \geqq d(v, w)$. Je-li $d(u, v) = \infty$, nebo $d(v, w) = \infty$, pak je součet $d(u, v) + d(v, w)$ také nekonečný a $d(v, w)$ nemůže být větší než tento součet. Analogické tvrzení v geometrii je tvrzení o tom, že součet délek dvou stran trojúhelníka je větší než délka třetí strany (odtud název trojúhelníková nerovnost). Obecně pro libovolné tři body A, B, C je součet vzdáleností AB a BC větší nebo roven vzdálenosti AC (rovnost může nastat, pokud body A, B C leží v přímce).

4. Nechť h je hrana grafu G s koncovými uzly u a v. Nechť G' je graf vzniklý z grafu G odstraněním hrany h. Je-li $\omega(G') \geqq \omega(G)$, pak tvrzení platí. Předpokládejme $\omega(G') < \omega(G)$. Budiž R řez grafu G' o $\omega(G')$ uzlech. Budiž G_0 graf vzniklý z G odstraněním řezu R a G_0' graf vzniklý z G' odstraněním řezu R. Graf G_0' je souvislý, protože $\omega(G') < \omega(G)$. Graf G' je nesouvislý, protože R je řez grafu G'. Graf G_0' vznikne z G_0 odstraněním hrany h. Graf G_0' má tedy právě dvě komponenty C_1 a C_2 a uzly u a v leží v různých komponentách tohoto grafu. (Žádný z nich nepatří do R, jinak by R byl řezem i v grafu G.) Kdyby každá z komponent C_1, C_2 obsahovala pouze jediný uzel, znamenalo by to, že $\omega(G') = n - 2$, kde n je počet uzlů grafu G. Pak by nemohlo být $\omega(G') < \omega(G)$, protože uzlový stupeň souvislosti grafu, který není úplný, nemůže být větší než $n - 2$. Alespoň jedna z komponent C_1, C_2 tedy obsahuje alespoň dva uzly. Je-li C_1 takováto komponenta, pak odstraněním uzlu u z G_0 dostaneme nesouvislý graf; tento graf však vznikne také odstraněním množiny $R \cup \{v\}$ z G. Tato množina

má $\omega(G') + 1$ uzlů, tedy $\omega(G) \leqq \omega(G') + 1$ a z toho $\omega(G') \geqq \geqq \omega(G) - 1$. Je-li C_2 komponenta obsahující alespoň dva uzly, provedeme tutéž úvahu pro uzel v.

5. Nechť G je strom, nechť u je jeden jeho uzel. Zvolme hranu h incidentní s u a označme u_1 její koncový uzel různý od u. Má-li uzel u_1 stupeň 1, získali jsme již jeden uzel stupně 1. V opačném případě zvolíme hranu h_2 incidentní s u_1 a různou od h_1 a její koncový uzel různý od u_1 označíme u_2. Takto pokračujeme dále a získáváme tak postupně uzly $u_1, u_2, u_3, \ldots$. Při tomto postupu se žádný uzel nemůže opakovat, protože to by znamenalo, že existuje kružnice v G. Nelze takto postupovat do nekonečna, protože G má konečný počet uzlů. Tedy po konečném počtu kroků musíme dostat uzel stupně 1. Vyjdeme-li nyní z tohoto uzlu a postupujeme opět popsaným způsobem, musíme dojít do některého dalšího uzlu stupně 1.

6. Nechť h je most v grafu G, nechť u a v jsou koncové uzly hrany h. Podle věty II.3 odstraněním hrany h z grafu G vznikne graf G', v němž uzly u a v spolu nesouvisí. Graf G' je tedy nesouvislý. Budiž C_1 komponenta grafu G' obsahující uzel u a C_2 komponenta grafu G' obsahující uzel v. Protože h je most, žádný z uzlů u, v nemá stupeň 1 a každá z komponent C_1, C_2 tedy obsahuje alespoň jeden uzel různý od u a v. Budiž G_1' graf vzniklý z G odstraněním uzlu u; tento graf je rovněž nesouvislý, protože v něm žádný uzel grafu C_1 různý od u nesouvisí se žádným uzlem grafu C_2. Graf G_1' však vznikne i z grafu G odstraněním uzlu u (při jeho odstranění se odstraní i hrana h) a tedy u je artikulací grafu G. Podobně bychom dokázali, že i v je artikulací grafu G.

7. Uzly každé komponenty grafu můžeme obarvit přípustným způsobem zcela nezávisle na obarvení uzlů ostatních komponent, protože žádná hrana nespojuje uzly dvou různých komponent. Je-li tedy k největší z chromatických čísel jednotlivých komponent grafu, lze uzly každé komponenty přípustným způsobem obarvit k barvami. Zároveň samozřejmě nelze tento graf obarvit přípustným způsobem méně než k barvami, protože pak by žádná z komponent nemohla mít chromatické číslo k.

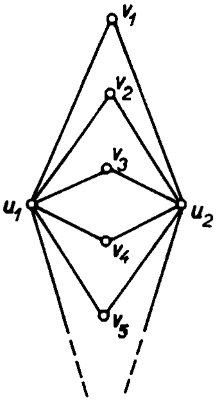
8. Nechť G je graf a nechť h je hrana grafu G s koncovými uzly u a v. Nechť G' je graf vzniklý z G odstraněním hrany h. Nechť $\chi(G')$ je chromatické číslo grafu G'. Existuje přípustné obarvení grafu G' používající $\chi(G')$ barev. Mají-li uzly u a v v tomto obarvení různou barvu, je toto obarvení také přípustným obarvením grafu G. Mají-li uzly u a v stejnou barvu, můžeme graf G obarvit přípustným způsobem $\chi(G') + 1$ barvami tak, že všechny uzly kromě v obarvíme tak jako ve zmíněném přípustném obarvení grafu G' a uzel v obarvíme barvou různou od barev všech ostatních uzlů. V obou případech máme tedy $\chi(G \leqq \chi(G') + 1$ a tedy $\chi(G') \geqq \chi(G) - 1$.

9. Nechť G je souvislý graf o n uzlech a $n - 1$ hranách. Předpokládejme, že G není stromem. Pak v G existuje hrana h, jejímž odstraněním z G vznikne souvislý graf G' (viz důkaz věty II.8). Graf G' má n uzlů a $n - 2$ hran. Protože je souvislý, existuje v něm podle věty II.8 jeho kostra. Tato kostra má $n - 1$ hran, tedy více než graf G', což je spor.

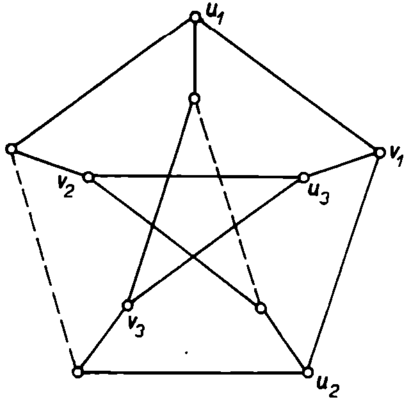
III. KAPITOLA

1. Řešení je na obrázku IX.6.

2. Řešení je znázorněno na obrázku IX.7. Vynecháním hran znázorněných čárkovaně dostaneme z Petersenova grafu graf, který je subdivisí grafu $K_{3,3}$. Uzly odpovídající uzlům grafu $K_{3,3}$ jsou značeny u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3. Dvojice $\{u_1, v_1\}$, $\{u_2, v_1\}$, $\{u_3, v_1\}$, $\{u_3, v_2\}$, $\{u_3, v_3\}$ jsou v této subdivisi přímo



Obr. IX.6



Obr. IX.7

spojeny hranou; ostatní dvojice jsou spojeny cestami délky 2 vzniklými rozpůlením hran.

3. Každá subdivise grafu K_5 nebo $K_{3,3}$ obsahuje více než jednu kružnici. Tedy graf obsahující nejvýše jednu kružnici nemůže takovouto subdivisi obsahovat a je rovinný.

4. Stačí vzít graf K_5 nebo $K_{3,3}$ a n-krát provést rozpůlení hrany.

IV. KAPITOLA

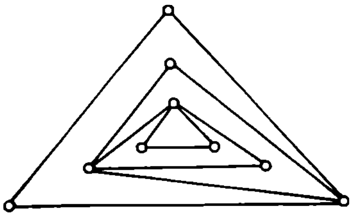
1. Řešení je na obrázku IX.8.

2. Příklad takové representace je na obrázku IX.9. Takováto representace má vždy 2 oblasti. Příslušný graf má tentýž počet hran jako uzlů.

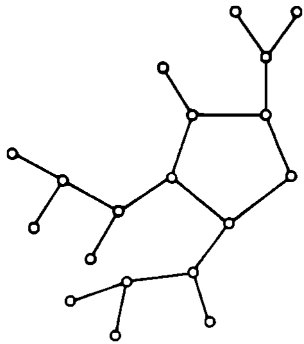
3. Řešení je na obrázku IX.10.

4. Pravidelný graf stupně 4 o n uzlech má $2n$ hran, tedy jeho rovinná representace má podle Eulerova vzorce $n + 2$ oblasti.

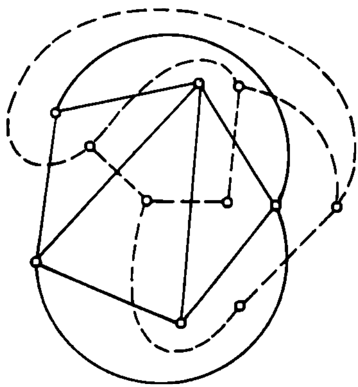
5. Je to opět kolo o témž počtu uzlů.



Obr. IX.8

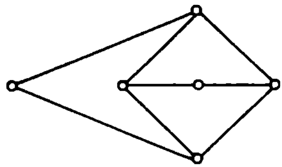


Obr. IX.9



Obr. IX.10

6. Řešení je na obrázku IX.11.



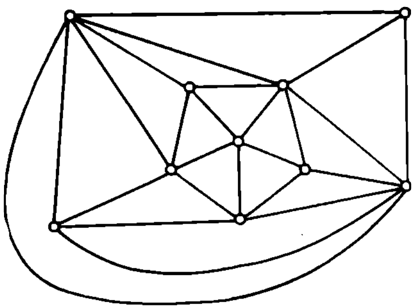
Obr. IX.11

7. Do Eulerova vzorce dosadíme $p = n$, $m = 30$. Dostaneme $n = 16$.

V. KAPITOLA

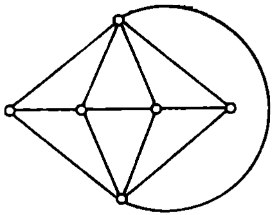
1. Triangulace v geodézii znamená rozdělení nějaké části terénu na nepřekrývající se trojúhelníky. Kdyby byla provedena pro celou zeměkouli vcelku (včetně moře), představovala by triangulaci kulové plochy a ta by se dala promítnout na rovinu jakožto triangulace roviny.

2. Příklad takové triangulace je na obrázku IX.12.



Obr. IX.12

3. Příklad takové triangulace je na obrázku IX.13.



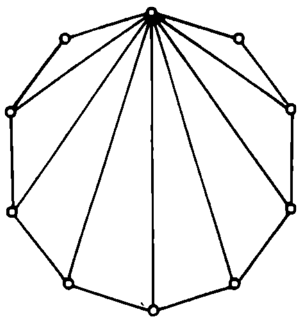
Obr. IX.13

4. Je to pravidelný graf stupně 3.

5. Není to pravda. Neplatí to například tehdy, je-li G graf $K_{3,3}$.

VII. KAPITOLA

1. Příklad takového grafu je na obrázku IX.14.

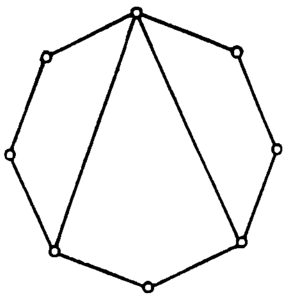


Obr. IX.14

2. Nechť u je uzel grafu G stupně $n - 1$. Nechť G' je graf vzniklý z grafu G odstraněním uzlu u. Podle věty VII.3 je graf G' vnějškově rovinný a lze tedy jeho uzly obarvit přípustným způsobem třemi barvami. Obarvíme-li nyní uzel u čtvrtou barvou, dostáváme přípustné obarvení grafu G čtyřmi barvami.

3. Nechť G je maximální vnějškově rovinný graf o $n \geqq 4$ uzlech. Podle věty VII.8 je $\omega(G) \leqq 2$. Sestrojme nyní graf $\tilde{G}$ z věty VII.3. Jak jsme poznali v důkazu věty VII.5, graf $\tilde{G}$ je grafem triangulace. Kdyby bylo $\omega(G) \leqq 1$, znamenalo by to, že graf vzniklý z G odstraněním nejvýše jednoho uzlu je nesouvislý. Takovýto graf však vznikne z grafu $\tilde{G}$ odstraněním nejvýše dvou uzlů (existuje uzel, jehož odstraněním z $\tilde{G}$ vznikne G), což je spor s tím, že podle věty V.2 je $\omega(\tilde{G}) \geqq 3$.

4. Příklad takového grafu je na obrázku IX.15.



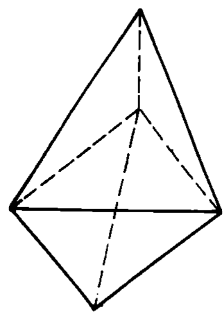
Obr. IX.15

5. Nechť G je takovýto graf. Kdyby bylo $\omega(G) \geqq 2$, pak by podle věty VII.1 hranicí každé oblasti rovinné representace tohoto grafu byla uzavřena křivka odpovídající některé kruž-

nici grafu G. Tedy oblast této representace incidentní se všemi uzly by musela mít jako svou hranici Hamiltonovu kružnici grafu G a tato kružnice by měla lichou délku, protože počet uzlů grafu G je lichý. To však není možné, protože G je sudý graf a nemůže tedy obsahovat kružnici liché délky.

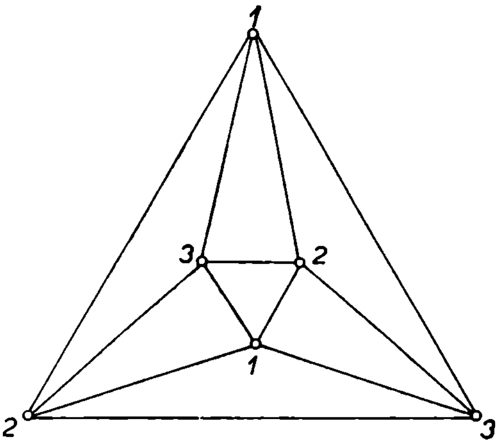
VIII. KAPITOLA

2. Příklad takového mnohostěnu je na obr. IX.16.

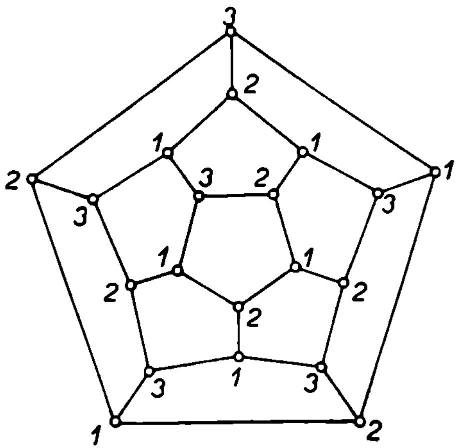


Obr. IX.16

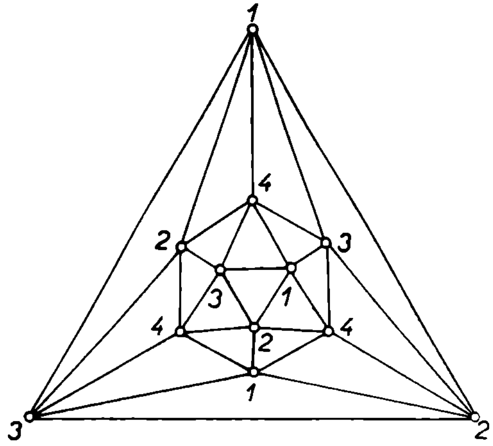
3. Chromatické číslo grafu pravidelného čtyřstěnu je 4, poněvadž je to úplný graf o čtyřech uzlech. Graf krychle je sudý, tedy jeho chromatické číslo je 2. Graf pravidelného osmistěnu a graf pravidelného dvanáctistěnu mají chromatické číslo 3; příslušná přípustná obarvení jsou na obrázcích IX.17 a IX.18 (menší chromatické číslo mít nemohou, protože obsahují kružnice liché délky). Přípustné obarvení grafu pravidelného dvacetistěnu čtyřmi barvami je na obrázku



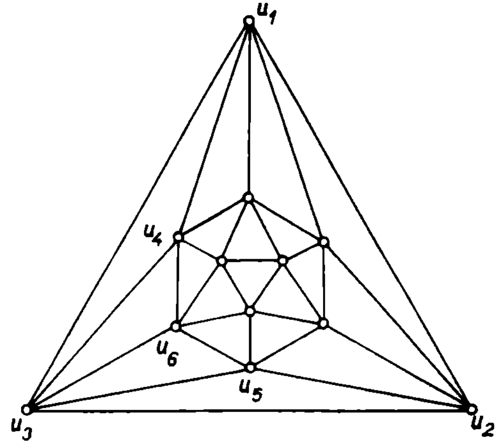
Obr. IX.17



Obr. IX.18



Obr. IX.19



Obr. IX.20

IX.19. Na obrázku IX.20 je opět graf pravidelného dvacetistěnu, u něhož některé uzly jsou označeny $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$. Kdybychom chtěli uzly tohoto grafu obarvit přípustným způsobem třemi barvami, musel by mít u_4 stejnou barvu jako u_2 a u_5 stejnou barvu jako u_1; uzly u_1, u_2, u_3 by musely být obarveny navzájem různými barvami. Uzel u_6 by pak byl spojen hranami s uzly tří různých barev, tedy by už nemohl být obarven žádnou z těchto barev. Proto chromatické číslo tohoto grafu je 4.

4. Vrcholy pravidelného čtyřstěnu označme A, B, C, D. Střed S kulové plochy opsané i kulové plochy vepsané pravidelnému čtyřstěnu $ABCD$ leží zřejmě na libovolné výšce čtyřstěnu, to jest na úsečce spojující vrchol čtyřstěnu s těžištěm protilehlé stěny. Mějme tedy výšku z vrcholu A. Těžiště stěny BCD označme T; tato výška je tedy úsečka AT. Zřejmě poloměr kulové plochy opsané $r = AS$, poloměr kulové plochy vepsané $\varrho = ST$, tedy $AT = r + \varrho$. Trojúhelník ABT je pravoúhlý. Je-li a délka hrany čtyřstěnu $ABCD$, je $AB = a$, $BT = \frac{1}{3} a \sqrt{3}$ (dvě třetiny délky těžnice rovnostranného trojúhelníka). Odtud z Pythagorovy věty dostáváme $AT = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$. Pravidelný čtyřstěn $ABCD$ lze rozložit na čtyři nepřekrývající se shodné čtyřstěny $ABCS$, $ABDS$, $ACDS$, $BCDS$; objem každého z nich je čtvrtinou objemu čtyřstěnu $ABCD$. Čtyřstěny $ABCD$, $BCDS$ lze považovat za trojboké jehlany o společné podstatě BCD a o výškách AT, ST. Protože objem čtyřstěnu $BCDS$ je čtvrtinou objemu čtyřstěnu $ABCD$, je $\varrho = AS = \frac{1}{4} AT = \frac{1}{12} a \sqrt{6}$. Potom $r = AT - \varrho = \frac{1}{4} a \sqrt{6}$. Poloměr kulové plochy vepsané krychli o hraně

délky a je zřejmě $1/2\ a$ a poloměr kulové plochy opsané je roven polovině délky tělesové úhlopříčky, tedy $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$. Pro výpočet poloměru kulové plochy vepsané pravidelnému osmistěnu o hraně délky a použijeme řezu rovinou, která je rovinou souměrnosti některé hrany tělesa. Tento řez je kosočtverec o délce strany $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$ (výška rovnostranného trojúhelníka) a o jedné úhlopříčce délky a. Snadno zjistíme, že poloměr kulové plochy vepsané tělesu je roven poloměru kružnice vepsané tomuto kosočtverci a tedy $\varrho = \frac{1}{6} a \sqrt{6}$. Pro výpočet poloměru kulové plochy opsané pravidelnému osmistěnu použijeme řezu rovinou vedenou třemi vrcholy neležícími v jedné stěně. Tento řez je čtverec o délce strany a. Poloměr kulové plochy opsané tělesu je roven poloměru kružnice opsané tomuto čtverci a tedy $r = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$.

5. Objem pravidelného čtyřstěnu o hraně délky a vypočteme jako objem trojbokého jehlanu. Obsah stěny je $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, výška je $\frac{1}{3} a \sqrt{6}$ (viz cvičení 4), tedy $V = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$. Objem krychle o hraně délky a je a^3. Pravidelný osmistěn lze rozložit na osm nepřekrývajících se shodných čtyřstěnů takových, že jedna stěna každého z nich je stěnou osmistěnu a vrchol k ní protilehlý je střed kulové plochy opsané i kulové plochy vepsané S. Objem kteréhokoliv z nich dostaneme jako objem trojbokého jehlanu o podstavě obsahu $\frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$ a výšce $\frac{1}{6} a \sqrt{6}$. Je to tedy $\frac{1}{24} a^3 \sqrt{2}$. Objem pravidelného osmistěnu je osminásobkem tohoto výrazu, tedy $\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$.

6. Nechť a je délka hrany původního čtyřstěnu, b délka hrany nového čtyřstěnu. Kulová plocha opsaná novému čtyřstěnu je vepsána původnímu, máme tedy $\frac{1}{4} b \sqrt{6} = \frac{1}{12} a \sqrt{6}$ a z toho $b = \frac{1}{3} a$.

7. Podobnou úvahou zjistíme, že délka hrany pravidelného osmistěnu, jehož vrcholy jsou středy stěn dané krychle, je rovna $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$, kde a je délka hrany krychle.