Rovinné grafy

VIII. kapitola. Konvexní mnohostěny

In: Bohdan Zelinka (author): Rovinné grafy. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 99–112.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403912

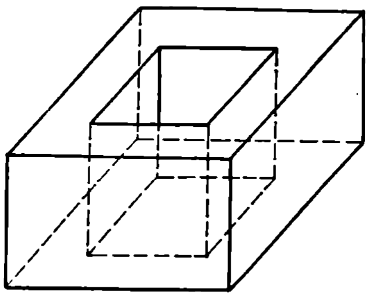
VIII. KAPITOLA

KONVEXNÍ MNOHOSTĚNY

S rovinnými grafy souvisí i teorie mnohostěnů (polyedrů). Mnohostěn je vlastně analogie mnohoúhelníka v třírozměrném prostoru. Znáte krychli, kvádr, hranol a jehlan; všechna tato tělesa patří mezi mnohostěny, a to tzv. mnohostěny konvexní. Uvedeme definici konvexní množiny.

Definice VIII.1. *Konvexní množina* v euklidovském prostoru je množina bodů v tomto prostoru, která má tu vlastnost, že patří-li dva různé body A a B do této množiny, patří do ní všechny body úsečky AB.

Konvexní množinou je například přímka, polopřímka, úsečka, rovina, kruh, koule. Všechny mnohostěny, kte-



Obr. VIII.1

rými se budeme zabývat, budou rovněž konvexními množinami a budeme jim tedy říkat konvexní mnohostěny. Nekonvexními mnohostěny se zabývat nebudeme. Uvedeme pouze příklad nekonvexního mnohostěnu, abyste si dovedli takový mnohostěn představit; je na obrázku VIII.1.

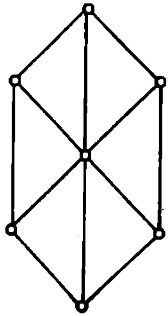
Konvexní mnohostěn lze definovat jako průnik určitých poloprostorů. Tuto definici uvádět nebudeme, pouze si popíšeme, jak takový mnohostěn vypadá.

Povrch konvexního mnohostěnu se skládá z mnohoúhelníků, kterým říkáme stěny mnohostěnu. Strany těchto mnohoúhelníků jsou hrany mnohostěnu; každá hrana náleží právě dvěma stěnám. Vrcholy stěn se nazývají vrcholy mnohostěnu; v každém vrcholu se stýká několik hran a několik stěn; vždy nejméně tři.

Vidíme, že hrany a vrcholy mnohostěnu mají podobné vlastnosti jako hrany a uzly grafu. Každá hrana mnohostěnu spojuje dva vrcholy podobně jako každá hrana grafu spojuje dva uzly. Každé dva vrcholy mnohostěnu jsou spojeny nejvýše jednou hranou podobně jako každé dva uzly grafu. Žádná hrana mnohostěnu nespojuje vrchol se sebou samým stejně jako žádná hrana grafu nespojuje uzel se sebou samým. Je proto účelné zavést pojem grafu mnohostěnu.

Definice VIII.2. Nechť $\boldsymbol{M}$ je mnohostěn. *Grafem mnohostěnu* $\boldsymbol{M}$ nazýváme graf $G(\boldsymbol{M})$, jehož množinou uzlů je množina vrcholů mnohostěnu $\boldsymbol{M}$ a jehož množinou hran je množina hran mnohostěnu $\boldsymbol{M}$, přičemž hrana h grafu $G(\boldsymbol{M})$ spojuje uzly u a v právě tehdy, spojuje-li odpovídající vrcholy mnohostěnu $\boldsymbol{M}$.

Na obrázku VIII.2 vidíme graf šestibokého jehlanu. Graf mnohostěnu je definován pro všechny mnohostěny, nikoliv pouze pro konvexní. Pro konvexní mnohostěny však platí důležitá věta, kterou dokázali E. Steinitz a H. Rademacher.



Obr. VIII.2

Věta VIII.1. *Graf G je grafem konvexního mnohostěnu právě tehdy, je-li rovinný a* $\omega(G) \geqq 3$.

Nebudeme tuto větu dokazovat, ale ukážeme si názornou ilustraci. Představme si, že bychom vyrobili gumový model konvexního mnohostěnu. Jednotlivé stěny bychom vyřezali z plátu gumy a jejich hrany mezi sebou slepili. Potom bychom hustilkou tento model nafoukli podobně jako fotbalový míč. Při dostatečně silném nafouknutí by model nabyl tvaru koule. Na povrchu této koule by ovšem byla patrná místa, kde jsme slepovali hrany. Vznikla by nám tak representace grafu mnohostěnu na kulové ploše. A existuje-li takováto representace, existuje podle věty IV.8 i rovinná representace tohoto grafu a jde tedy o graf rovinný.

Máme-li naopak rovinný graf o uzlovém stupni souvislosti větším nebo rovném třem, můžeme sestrojit jeho representaci na kulové ploše. Uzlové body této representace jsou vrcholy konvexního mnohostěnu, kterému je tato kulová plocha opsána. Hrany tohoto mnohostěnu jsou příslušné tětivy kulové plochy. Daný graf je potom grafem tohoto mnohostěnu.

Je-li graf G rovinný a $\omega(G) \geqq 3$, víme, že můžeme definovat oblasti grafu. Lze dokázat, že je-li G grafem konvexního mnohostěnu $\boldsymbol{M}$, pak jeho oblasti vzájemně jednoznačně odpovídají stěnám mnohostěnu $\boldsymbol{M}$. Hrana nebo uzel incidentní s určitou oblastí grafu G je hranou nebo vrcholem příslušné stěny mnohostěnu $\boldsymbol{M}$.

Eulerův vzorec (věta IV.8) tedy platí i tehdy, když místo rovinného grafu uvažujeme konvexní mnohostěn; n značí počet jeho vrcholů, m počet hran, p počet stěn. Však původně také tento vzorec byl formulován pro konvexní mnohostěny, nikoliv pro grafy.

Znáte jistě pravidelné konvexní mnohoúhelníky. Je-li n přirozené číslo větší než dvě, pak vždy existuje konvexní n-úhelník, jehož všechny strany jsou shodné úsečky a všechny úhly jsou shodné; říkáme mu pravidelný. (Místo „pravidelný trojúhelník" říkáme „rovnostranný trojúhelník", místo „pravidelný čtyřúhelník" říkáme „čtverec".) Analogií tohoto pojmu v třírozměrném prostoru je pravidelný konvexní mnohostěn.

Definice VIII.3. *Pravidelný konvexní mnohostěn* je takový konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné konvexní mnohoúhelníky a v němž z každého vrcholu vychází tentýž počet hran.

Čekali bychom, že zase pro každé přirozené $n \geqq 4$ bude existovat pravidelný konvexní n-stěn. Zde však analogie vede ke klamným závěrům, jak uvidíme.

Uvažujme, jak bude vypadat graf $G(\boldsymbol{M})$ pravidelného konvexního mnohostěnu $\boldsymbol{M}$. Z definice VIII.3 vyplývá, že to bude pravidelný graf, to jest všechny jeho uzly budou míst stejný stupeň r. Dále i stupně všech oblastí budou stejné; označme s stupeň oblasti v tomto grafu. Jaké mohou být hodnoty r? Musí být $r \geqq 3$, protože $\omega(G(\boldsymbol{M})) \geqq 3$. Podle věty V.7 musí být $r \leqq 5$; přicházejí tedy v úvahu pouze tři čísla 3, 4 a 5. Abychom prozkoumali možné hodnoty s, uvážíme, že ke grafu $G(\boldsymbol{M})$ existuje duální graf $G^*(\boldsymbol{M})$, který je rovinným pravidelným grafem stupně s. Provedeme-li pro tento duální graf tutéž úvahu, kterou jsme provedli pro graf $G(\boldsymbol{M})$, zjistíme, že s může rovněž nabývat pouze hodnot 3, 4 a 5.

Budiž nyní n počet uzlů, m počet hran a p počet oblastí grafu $G(\boldsymbol{M})$. Poněvadž $G(\boldsymbol{M})$ je pravidelný graf stupně r, je

$$m = \frac{1}{2} nr .$$

Počet hran grafu $G(\boldsymbol{M})$ je však také roven počtu hran duálního grafu $G^*(\boldsymbol{M})$. Graf $G^*(\boldsymbol{M})$ je pravidelný graf stupně s a obsahuje p uzlů, tedy

$$m = \frac{1}{2} ps .$$

Z těchto dvou rovnic dostáváme

$$p = nr/s.$$

Dosaďme do Eulerova vzorce; dostaneme

$$n - \frac{1}{2} nr + nr/s = 2$$

a z toho

$$n = \frac{4s}{2r + 2s - rs} .$$

Sestavíme si tabulku hodnot n pro různé hodnoty r a s. Pro dané r a s je v příslušném políčku tabulky odpovídající hodnota n, pokud je to přirozené číslo; v opačném případě je tam pomlčka.

r \ s	3	4	5
3	4	8	20
4	6	—	—
5	12	—	—

Vidíme tedy, že je celkem pět možných dvojic [r, s], a to [3, 3], [3, 4], [3, 5], 4, 3], [5, 3]. Samozřejmě pro každou z těchto dvojic je jednoznačně určen počet uzlů, hran a oblastí příslušného grafu, tedy počet vrcholů, hran a stěn příslušného mnohostěnu. Máme tedy pět možností:

(1) Mnohostěn má 4 vrcholy, 6 hran a 4 stěny. Stěny mnohostěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, z každého vrcholu vycházejí 3 hrany.

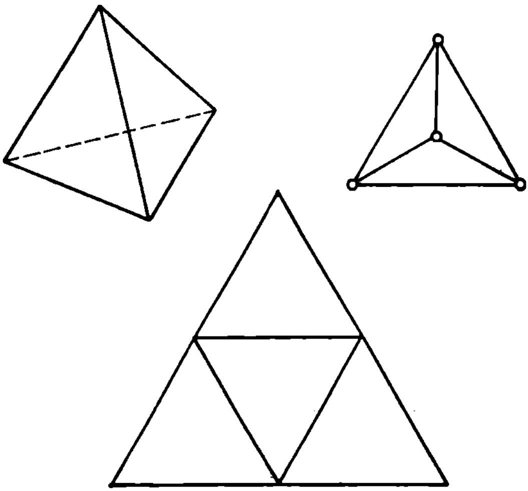
(2) Mnohostěn má 8 vrcholů, 12 hran a 6 stěn. Stěny mnohostěnu jsou čtverce, z každého vrcholu vycházejí 3 hrany.

(3) Mnohostěn má 20 vrcholů, 30 hran a 12 stěn. Stěny mnohostěnu jsou pravidelné pětiúhelníky, z každého vrcholu vycházejí 3 hrany.

(4) Mnohostěn má 6 vrcholů, 12 hran a 8 stěn. Stěny mnohostěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, z každého vrcholu vycházejí 4 hrany.

(5) Mnohostěn má 12 vrcholů, 30 hran a 20 stěn. Stěny mnohostěnu jsou rovnostranné trojúhelníky, z každého vrcholu vychází 5 hran.

Tím jsme ovšem nedokázali, že takovéto pravidelné konvexní mnohostěny existují; dokázali jsme pouze, že neexistují žádné jiné. Ony však existují; znal je už starořecký filosof Platón, proto se jim někdy říká také platónovská tělesa a jejich grafům platónovské grafy.

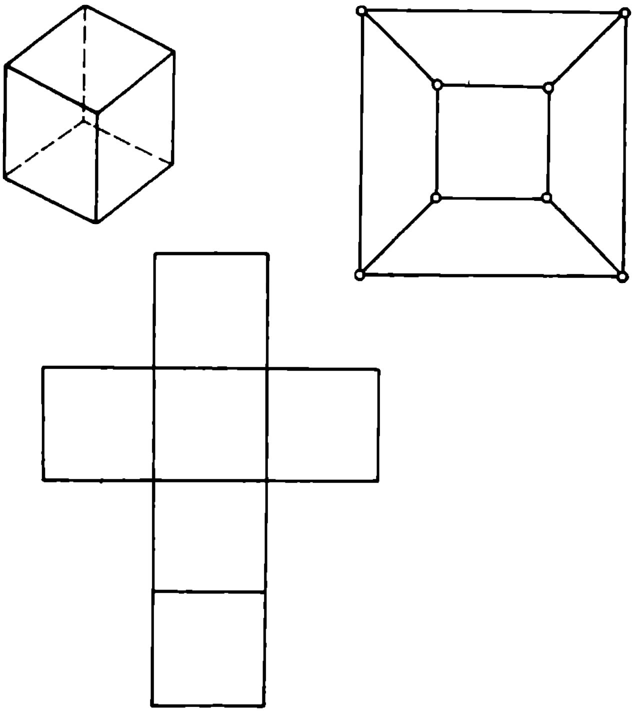


Obr. VIII.3

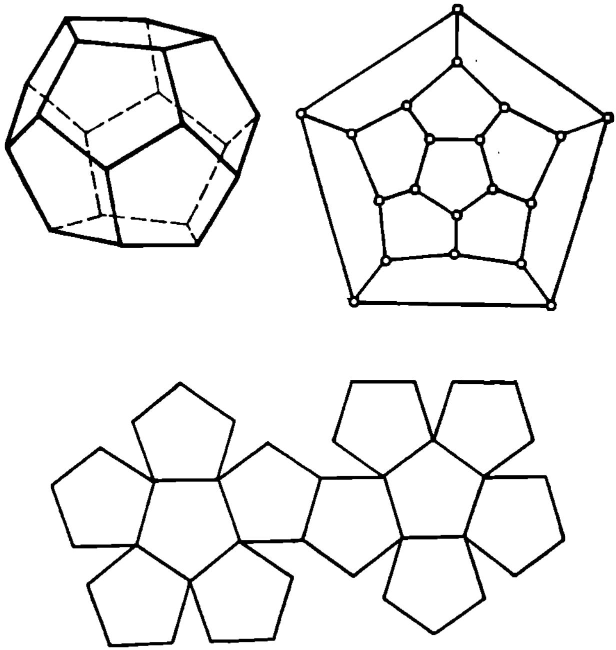
Pravidelný konvexní mnohostěn s vlastností (1) je pravidelný čtyřstěn (tetraedr), s vlastností (2) pravidelný šestistěn (hexaedr), častěji nazývaný krychle, s vlastností (3) pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr), s vlastností (4) pravidelný osmistěn (oktaedr) a s vlastností (5) pravidelný dvacetistěn (ikosaedr). Jsou to jediné pravidelné konvexní mnohostěny, více jich neexistuje.

Na obrázcích VIII.3 až VIII.7 jsou tyto mnohostěny nakresleny v pořadí, v jakém byly popsány (čtyřstěn, krychle, dvanáctistěn, osmistěn, dvacetistěn). Na každém z těchto obrázků je obraz příslušného mnohostěnu, jeho graf a rozvinutí jeho povrchu do roviny.

Všimněme si ještě duálních grafů ke grafům pravidelných konvexních mnohostěnů. Duální graf ke grafu



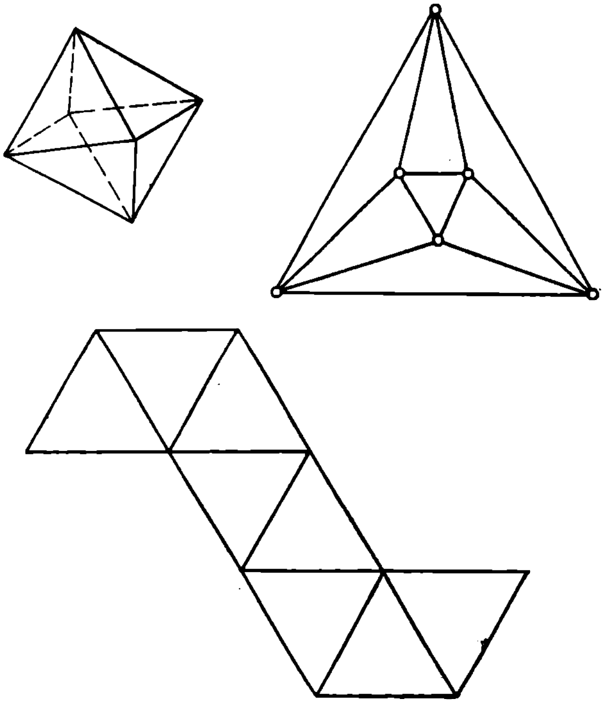
Obr. VIII.4



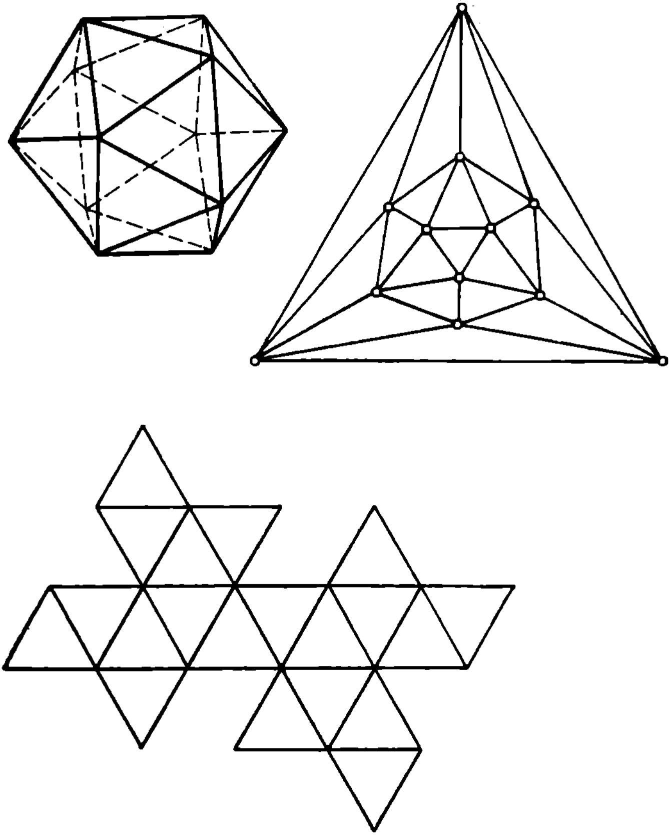
Obr. VIII.5

pravidelného čtyřstěnu je opět graf pravidelného čtyřstěnu (je to úplný graf K_4), duální graf ke grafu krychle je graf pravidelného osmistěnu, duální graf ke grafu pravidelného dvanáctistěnu je graf pravidelného dvacetistěnu, duální graf ke grafu pravidelného osmistěnu je graf krychle a duální graf ke grafu pravidelného dvacetistěnu je graf pravidelného dvanáctistěnu.

Tato dualita se však netýká jen grafů, ale v jistém smyslu i mnohostěnů samotných. Stěny těchto mnohostěnů jsou pravidelné konvexní mnohoúhelníky, každé z nich lze tedy opsat kružnici. Nyní ke každému pravidelnému konvexnímu mnohostěnu existuje pravidelný konvexní mnohostěn, jehož graf je duální ke grafu původního mnohostěnu a jehož vrcholy jsou středy stěn původního mnohostěnu. Říkáme, že pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě, že krychle a pravidelný osmistěn

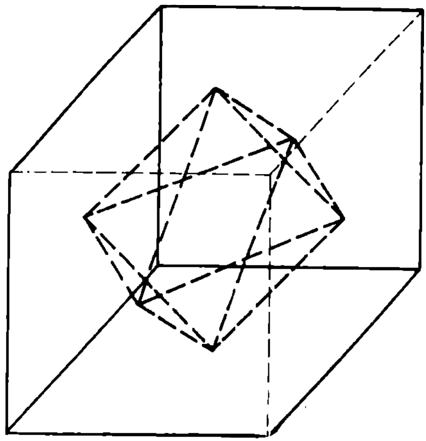


Obr. VIII.6



Obr. VIII.7

jsou k sobě navzájem duální a pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn jsou rovněž k sobě navzájem duální. Na obrázku VIII.8 vidíme krychli a pravidelný osmistěn, jehož vrcholy jsou středy stěn krychle.



Obr. VIII.8

Na závěr uvedeme ještě, že každému pravidelnému konvexnímu mnohostěnu lze opsat i vepsat kulovou plochu. Středy obou těchto ploch splývají. Kulová plocha vepsaná se dotýká stěn mnohostěnu v jejich středech.

Cvičení

1. Slepte si z papíru modely pravidelných konvexních mnohostěnů.

2. Uveďte příklad konvexního mnohostěnu, který není pravidelný, ale všechny jeho stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky.

3. Určete chromatická čísla grafů pravidelných konvexních mnohostěnů.

4. Odvoďte vzorec pro poloměr kulové plochy opsané a vepsané pravidelnému čtyřstěnu, krychli a pravidelnému osmistěnu, je-li dána délka hrany.

5. Odvoďte vzorce pro objemy těchto mnohostěnů, je-li dána délka hrany (použijte výsledku cvičení 4).

6. Je-li dána délka hrany pravidelného čtyřstěnu, určete délku hrany pravidelného čtyřstěnu, jehož vrcholy jsou středy stěn původního čtyřstěnu.

7. Totéž pro krychli a pravidelný osmistěn.