Rovinné grafy

III. kapitola. Tři domy, tři studně a muří noha aneb věta Kuratowského

In: Bohdan Zelinka (author): Rovinné grafy. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 43–50.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403907

III. KAPITOLA

TŘI DOMY, TŘI STUDNĚ A MUŘÍ NOHA ANEB VĚTA KURATOWSKÉHO

Možná, že jste se už někdy setkali se známou úlohou rekreační matematiky o třech domech a třech studních.

Jsou tři domy a tři studně. Obyvatelé všech tří domů mohou používat všech tří studní. Každý z nich by chtěl mít od svého domu cesty ke všem třem studním, nikdo však nechce, aby se některá jeho cesta křižovala se sousedovou. Jak to zařídit?

Než odpovíme na tuto otázku, budeme si definovat rovinnou representaci grafu.

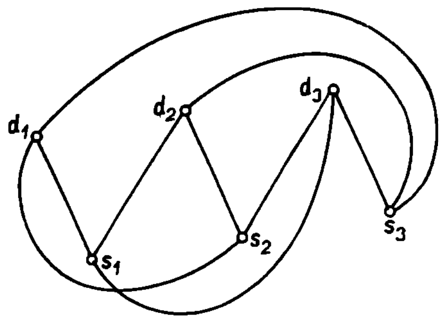
Definice III.1. Nechť G je graf. *Rovinnou representací grafu* G nazýváme množinu bodů $\mathscr{R}(G)$ v rovině složenou jednak z takzvaných uzlových bodů vzájemně jednoznačně přiřazených uzlům grafu G, jednak z oblouků spojujících ty dvojice uzlových bodů, které odpovídají dvojicím uzlů spojených hranou v grafu G, přičemž žádné dva z těchto oblouků nemají společný bod, který by byl vnitřním bodem některého z nich.

Tato definice se zdá na první pohled složitá, není to však nic jiného než matematické vyjádření toho, co známe už z dřívějška. Už v první kapitole jsme mluvili o tom, jak kreslíme grafy. Zde místo kroužků máme pouhé body, což není tak podstatný rozdíl; ve skutečnosti můžeme nadále kreslit kroužky, pokud budou dostatečně malé. Nové je na této definici to, že nepřipouštíme, aby některé dva oblouky měly společný bod, který by byl vnitřním bodem některého z nich. Tedy žádné dva z oblouků (znázorňujících hrany) se nesmějí protínat a žádný z nich nesmí procházet uzlovým bodem různým od těch dvou, které spojuje. Jedině tehdy považujeme nákres určitého grafu za jeho rovinnou representaci.

Uvidíme, že ne každý graf má rovinnou representaci.

Definice III.2. Graf G, k němuž existuje rovinná representace $\mathcal{R}(G)$, se nazývá *rovinný* graf.

Vraťme se nyní k úloze o třech domech a třech studních. Mějme graf, jehož množina uzlů se skládá z uzlů d_1, d_2, d_3, s_1, s_2, s_3 a v němž každý z uzlů d_1, d_2, d_3 je spojen hranami s uzly s_1, s_2, s_3. Uzly d_1, d_2, d_3 představují domy, uzly s_1, s_2, s_3 představují studně. Hrany grafu představují cesty od domů ke studním. Jde o úplný sudý graf $K_{3,3}$. Úloha je řešitelná právě tehdy, jestliže existuje rovinná representace tohoto grafu (ta nám

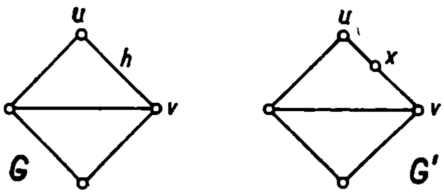


Obr. III.1

představuje mapu příslušných cest), to jest je-li graf $K_{3,3}$ rovinný.

Řekněme si nyní rovnou, že graf $K_{3,3}$ rovinný není a že tedy úloha není řešitelná. Dokazovat to nebudeme; v důkaze bychom nevystačili s teorií grafů, ale museli bychom použít prostředků topologie, což je rovněž jeden z oborů moderní matematiky. Na obrázku III.1 vidíme nákres grafu $K_{3,3}$, v němž právě dva oblouky znázorňující hrany se protínají. Vidíme tedy, že nezbývá, než aby se jeden z obyvatel domů uskromnil a spokojil se s cestami pouze ke dvěma studním.

Definice III.3. Nechť G je graf, h jeho hrana s koncovými uzly u a v. Nechť G' je graf získaný z G odstraněním hrany h, přidáním nového uzlu x a spojením tohoto uzlu hranami s uzly u a v. Pak řekneme, že G' je graf získaný z G *rozpůlením* hrany h.



Obr. III.2

Na obrázku III.2 vidíme graf G a graf G' získaný z G rozpůlením hrany h.

Definice III.4. Nechť G a G' jsou dva grafy a nechť existuje konečná posloupnost grafů

$$G_1, \; G_2, \ldots, \; G_n$$

taková, že graf G_{i+1} je získán z grafu G_i rozpůlením některé jeho hrany pro $i = 1, \ldots, n - 1$, graf G_1 splývá s grafem G a graf G_n splývá s grafem G'. Pak říkáme, že graf G' je graf získaný z grafu G postupným půlením hran.

Věta III.1. *Nechť graf G není rovinný, nechť G' je graf získaný z grafu G postupným půlením hran. Pak graf G' není rovinný.*

Důkaz. Uvažujme posloupnost grafů z definice III.4. Předpokládejme, že graf G', což je G_n, je rovinný. Budiž $\mathcal{R}(G')$ jeho rovinná representace. Graf G_n je získán z grafu G_{n-1} rozpůlením některé hrany h o koncových uzlech u a v, to jest odstraněním hrany h, přidáním nového uzlu x a spojením uzlu x hranami s uzly u a v. Vezměme v representaci $\mathcal{R}(G')$ oblouky odpovídající hranám ux a vx. Pak oblouk, který je sjednocením těchto oblouků, můžeme považovat za oblouk representace $\mathcal{R}(G_{n-1})$ grafu G_{n-1} odpovídající hraně h (bod odpovídající uzlu x přestaneme považovat za uzlový bod). Dostaneme tak rovinnou representaci $\mathcal{R}(G_{n-1})$ grafu G_{n-1} a tedy graf G_{n-1} je rovinný. Stejným způsobem pro $i = 1, \ldots, n - 1$ můžeme dokázat, že je-li G_{i+1} rovinný, je i G_i rovinný. Tedy i graf G_1, což je graf G, je rovinný, a to je spor.

Věta III.2. *Nechť G' je podgraf grafu G a nechť G' není rovinný. Pak G není rovinný.*

Důkaz je zřejmý.

Vidíme tedy, že žádný graf, který obsahuje graf $K_{3,3}$ nebo graf získaný z něho postupným půlením hran jako podgraf, není rovinný.

Teď si ukážeme, že i v klasické literatuře můžeme objevit matematické zajímavosti. Možná, že jste četli nebo viděli v divadle dramatickou báseň J. W. Goetha „Faust". Uvedeme dialog Fausta s ďáblem Mefistofelem, který právě vnikl do jeho pracovny v podobě pudla:*)

MEFISTOFELES

Víš, rád bych na vzduch, ale věř mi,
já malou překážkou tu držán jsem.
Tam — muří noha na prahu je.

FAUST

Nemůžeš přes ten pentagram?
Pak, synu pekel, problém tu je:
Jaks mohl vejít, se tě ptám.
Což démon moh být ošálen?

MEFISTOFELES

Jen podívejte, není dotažen.
Ten jeden úhel, ten, co míří ven,
vidíš, je trochu otevřen.

FAUST

Nu, tohle výborná je věc.
Ty tedy jsi můj zajatec?
Běh náhody se divně stočil.

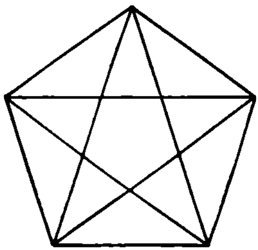
Ponechme teď Fausta jeho osudu a všimněme si jen jedné věci. V dialogu se mluví o jistém magickém zna-

---

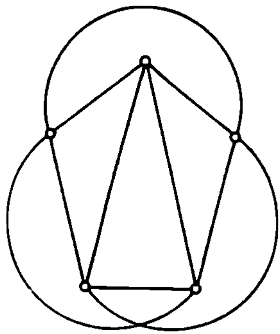
*) Překlad Otokara Fischera. Vydala Mladá fronta, Praha 1973.

mení, které podle středověkých představ dovedlo ochránit člověka před nečistými silami. Tomuto znamení se říká „muří noha“ nebo také „pentagram“. Co to asi je?

Řecká předpona „penta-“ nám říká, že to souvisí s číslem 5. A skutečně, jde o pětiúhelník se všemi jeho úhlopříčkami; vidíme jej na obrázku III.3.



Obr. III.3



Obr. III.4

Proč se mu říká „muří noha“, to vám nevysvětlím; na to byste se museli zeptat historika. Stejně těžké by bylo asi vysvětlit, proč se tomuto symbolu připisoval magický význam. Snad proto, že pětiúhelník je jediným mnohoúhelníkem, který má stejný počet úhlopříček jako stran. Možná však to bude i tím, že si lidé všimli jisté jeho vlastnosti, která souvisí s teorií grafů (i když samozřejmě tehdy ještě teorie grafů neexistovala). Bereme-li „muří nohu“ jako graf, to jest považujeme-li vrcholy pětiúhelníka za uzly grafu a jeho strany i úhlopříčky za hrany grafu, je to úplný graf K_5. A ten má podobnou vlastnost jako $K_{3,3}$. Není to rovinný graf, kdybychom však z něho odstranili jednu hranu, dostali bychom rovinný graf. Na obrázku III.4 je nákres grafu K_5, v němž se jediné dvě hrany protínají.

Samozřejmě také každý graf, který obsahuje graf K_5 nebo graf získaný z tohoto grafu postupným půlením hran jako podgraf, není rovinný.

Máme už tedy velkou řadu grafů, o nichž víme, že nejsou rovinné. Jsou to všechny grafy obsahující podgraf, který je grafem K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo je z některého z těchto grafů získán postupným půlením hran. Následující věta nás ujistí o tom, že další nerovinné grafy už neexistují.

Věta III.3. (věta Kuratowského). *Graf je rovinný právě tehdy, jestliže neobsahuje podgraf, který by byl grafem K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo grafem získaným z některého z těchto grafů postupným půlením hran.*

Tuto větu nebudeme dokazovat; je to výsledek, který spadá opět do topologie, a k jeho důkazu jsou potřebné topologické úvahy. Jeho autorem je významný polský matematik Kazimierz Kuratowski, který vynikl především právě v topologii.

Věta Kuratowského má v teorii rovinných grafů především ten význam, že její pomocí lze z této teorie odstranit všechny pojmy, které nepatří do čisté teorie grafů. Umožňuje nám podat novou definici rovinného grafu.

Definice III.5. Nechť G je graf neobsahující žádný podgraf, který by byl grafem K_5 nebo $K_{3,3}$ nebo grafem získaným z některého z těchto grafů postupným půlením hran. Pak se graf G nazývá *rovinný.*

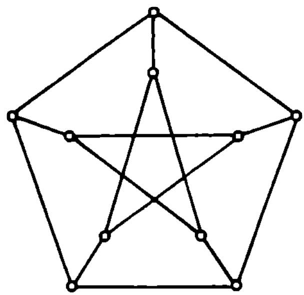
Věta Kuratowského nám zaručuje ekvivalenci této definice s definicí III.2. Znamená to, že každý konečný graf, který je rovinný podle definice III.2, je rovinný i podle definice III.5 a obráceně. Přitom v definici III.5 se vůbec nevyskytují takové pojmy jako rovina, bod a oblouk. Mluví se v ní pouze o podgrafech, půlení hran a o grafech K_5 a $K_{3,3}$, a to jsou pojmy teorie grafů.

Mohli bychom tedy vybudovat teorii rovinných grafů zcela bez geometrických (respektive topologických) pojmů. Nicméně v dalších kapitolách se budeme stále opírat o pojem rovinné representace grafu, protože to bude výhodné s hlediska názornosti.

Cvičení

1. Najděte rovinnou representaci úplného sudého grafu $K_{2,n}$ pro libovolné n.

2. Na obrázku III.5 je takzvaný Petersenův graf. Dokažte podle věty Kuratowského, že tento graf není rovinný.



Obr. III.5

3. Dokažte, že každý graf obsahující nejvýše jednu kružnici je rovinný.

4. Dokažte, že pro libovolně velké přirozené číslo n existuje sudý graf, který má více než n uzlů a není rovinný.