II. KAPITOLA

ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE GRAFŮ

V předešlé kapitole jsme se seznámili s pojmem grafu. Nyní si povíme o některých základních pojmech teorie grafů.

Definice II.1. Je-li u uzel grafu G, pak *stupněm* uzlu u v grafu G nazýváme počet hran grafu G incidentních s uzlem u.

Stupeň uzlu u v grafu G budeme označovat $\varrho_G(u)$ nebo jen $\varrho(u)$. Vidíme, že v grafu na obrázku I.2 je $\varrho(u_1) = 1$, $\varrho(u_2) = 3$, $\varrho(u_3) = 2$, $\varrho(u_4) = 2$.

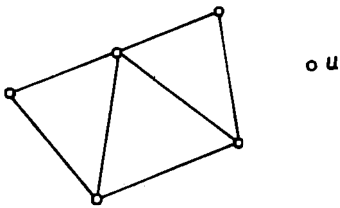
V grafu železniční sítě stupeň uzlu představuje počet směrů, jimiž může vyjet vlak z příslušné stanice. V chemickém strukturním vzorci představuje mocenství neboli valenci příslušného atomu. Proto se také někdy i v teorii grafů užívá názvu valence místo stupeň uzlu.

Sečteme-li stupně všech uzlů daného grafu, dostaneme dvojnásobek počtu hran. Je to zřejmé z toho, že vlastně sčítáme počty hran incidentních s jednotlivými uzly, přitom však každou hranu počítáme dvakrát — u každého z jejích koncových uzlů zvlášť.

Věta II.1. *V každém konečném grafu je počet uzlů lichého stupně sudý.*

Důkaz. Součet stupňů všech uzlů je dvojnásobkem počtu hran. Protože počet hran je číslo celé, jeho dvojnásobek je číslo sudé. Počet uzlů lichého stupně tedy nemůže být lichý, protože pak by součet stupňů všech uzlů byl rovněž lichý.

Definice II.2. Je-li u uzel grafu G a je-li jeho stupeň roven nule (to znamená, že u není incidentní se žádnou hranou), říkáme, že u je *izolovaný uzel* grafu G.



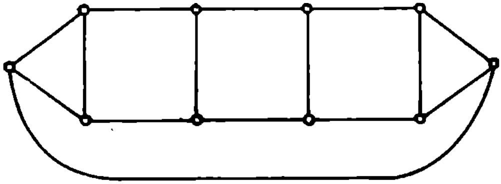
Obr. II.1

Na obrázku II.1 vidíme graf, v němž uzel u je izolovaný.

Na grafu železniční sítě se izolované uzly nevyskytují; musely by to být stanice, z nichž nevychází žádná trať, což není možné. Mohli bychom však vzít graf, jehož uzly by byla všechna města určitého okresu a v němž by dva uzly byly spojeny hranou právě tehdy, kdyby existoval mezi odpovídajícími městy úsek železniční trati neprocházející žádným dalším městem. V takovém grafu by mohly být izolované uzly; odpovídaly by městům bez železničního spojení. Taková města jsou například Český Dub a Kostelec nad Černými lesy.

Definice II.3. Graf G, v němž všechny uzly mají tentýž stupeň r, se nazývá *pravidelný graf* stupně r.

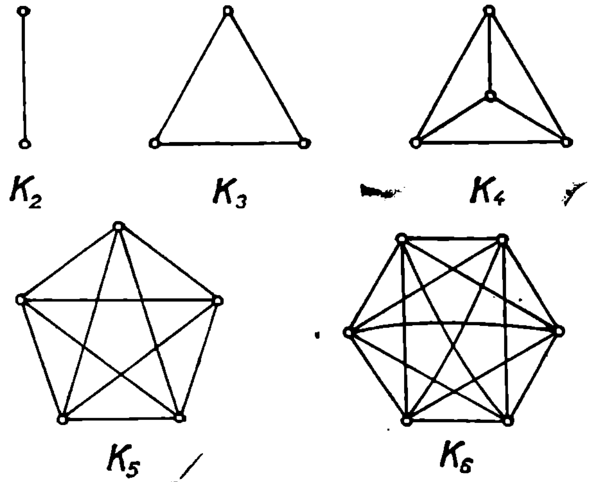
Na obrázku II.2 vidíme pravidelný graf stupně 3.



Obr. II.2

Definice II.4. Nechť G je graf, v němž každá dvojice různých uzlů je spojena hranou. Pak se graf G nazývá *úplný graf*. Úplný graf o n uzlech značíme symbolem K_n.

Na obrázku II.3 vidíme grafy K_2, K_3, K_4, K_5, K_6.

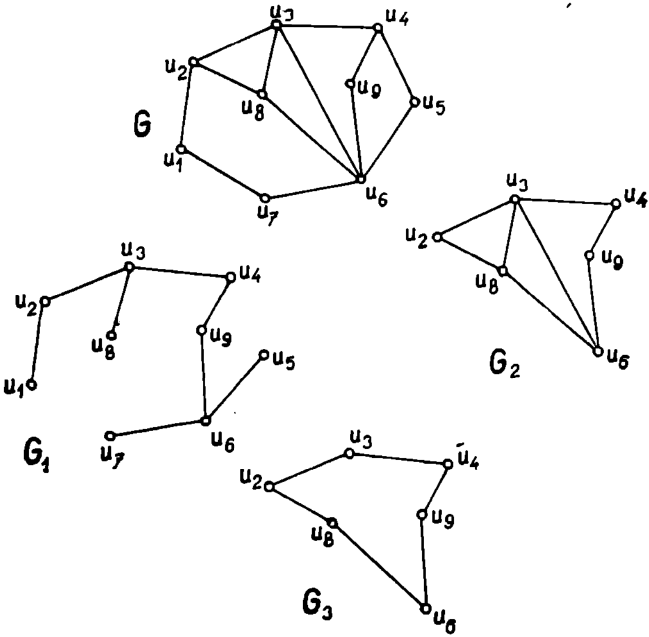


Obr. II.3

Každý uzel grafu K_n má stupeň $n - 1$ (je spojen hranami se všemi uzly grafu kromě sama sebe), součet stupňů všech uzlů je tedy $n(n - 1)$, což je dvojnásobek počtu hran (viz důkaz věty II.1). Počet hran grafu K_n je tedy $\frac{1}{2} n(n - 1)$.

Důležitý je i pojem podgrafu.

Definice II.5. Graf G' se nazývá *podgrafem* grafu G, jestliže jeho množina uzlů je podmnožinou množiny



Obr. II.4

uzlů grafu G a jeho množina hran je podmnožinou množiny hran grafu G.

Na obrázku II.4 vidíme graf G a tři jeho podgrafy G_1, G_2, G_3. Množina uzlů grafu G_1 je tatáž jako množina uzlů grafu G, jeho množina hran je vlastní podmnožinou množiny hran grafu G. Takovémuto podgrafu se někdy říká faktor grafu G. Množiny uzlů podgrafů G_2 a G_3 jsou vlastními podmnožinami množiny uzlů grafu G. Podgraf G_2 má tu vlastnost, že každá hrana grafu G, která je incidentní se dvěma uzly grafu G_2, patří do G_2. Takovémuto podgrafu se říká indukovaný podgraf. Podgraf G_3 tuto vlastnost nemá.

Je-li G graf železniční sítě a G' je graf složený ze stanic a úseků trati, jimiž projíždějí rychlíky, je G' podgrafem grafu G.

Nyní přistoupíme k pojmu souvislosti:

Definice II.6. Budiž G graf a u, v dva uzly grafu G. *Sledem* z uzlu u do uzlu v v grafu G se nazývá konečná posloupnost

$$u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, h_n, u_n = v,$$

kde $u_0, u_1, \ldots, u_n$ jsou uzly, $h_1, \ldots, h_n$ hrany grafu G a hrana h_i je incidentní s uzly u_{i-1} a u_i pro $i = 1, \ldots, n$. Existuje-li sled z u do v v grafu G, říkáme, že uzly u a v spolu souvisí v grafu G.

Posloupnost složenou z jediného uzlu a žádné hrany považujeme také za sled. Tedy každý uzel souvisí sám se sebou.

Mějme nyní uzel u grafu G a označme symbolem $S(u)$ množinu všech uzlů, které souvisí s uzlem u v grafu G. Je-li $v \in S(u)$, pak každý uzel w, který souvisí s v, souvisí také s u; stačí vzít sled z w do v a k němu připojit sled z v do u. Stejně však můžeme dokázat, že každý uzel, který souvisí s u, souvisí také s v a tedy $S(u) = S(v)$. Jestliže $v \notin S(u)$, máme $S(u) \cap S(v) = 0$; kdyby totiž existoval uzel $w \in S(u) \cap S(v)$, znamenalo by to, že existuje sled z u do w a sled z w do v a tedy by musel existovat i sled z u do v, což by byl spor.

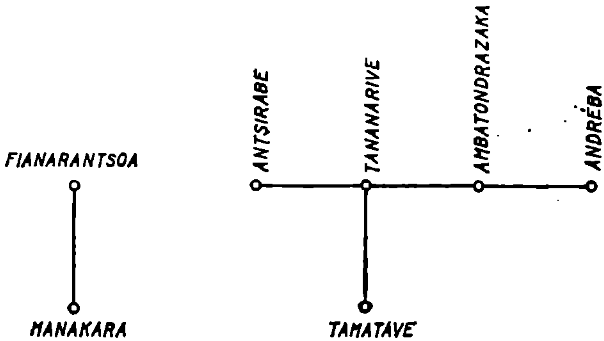
Množiny $S(u)$ pro jednotlivé uzly u tedy tvoří systém podmnožin množiny uzlů grafu G, který má tu vlastnost, že každá z těchto množin je neprázdná a každý uzel patří právě do jedné z nich (pro každé u máme $u \in S(u)$, tedy u patří alespoň do jedné z těchto množin; přitom do dvou různých množin patřit nemůže, jak jsme ukázali výše). Takovémuto systému podmnožin říkáme rozklad množiny uzlů grafu G.

Jsou-li dva uzly grafu G spojeny hranou, zřejm. spolu souvisí. Každá hrana tedy spojuje dva uzly patřící do téže množiny. Budiž nyní $C(u)$ podgraf grafu G, jehož množinou uzlů je $S(u)$ a jehož množinou hran je množina všech hran, které incidují s uzly z $S(u)$. Podgraf $C(u)$ nazýváme komponentou grafu G.

Definice II.7. Graf, v němž libovolné dva uzly spolu souvisí, se nazývá *souvislý*.

Znamená to, že každá komponenta grafu je souvislým grafem. Je-li graf souvislý, pak má pouze jednu komponentu.

Představíme-li si graf jako znázornění železniční sítě, pak dva uzly spolu souvisí právě tehdy, můžeme-li se dostat vlakem ze stanice odpovídající jednomu z nich do stanice odpovídající druhému. Je-li takovýto graf nesouvislý a vezmeme-li dva uzly (stanice) patřící různým komponentám, pak k tomu, abychom se dostali z jednoho uzlu do druhého, nestačí vlak, ale musíme použít jiného dopravního prostředku. Ve většině států, včetně Československa, tvoří železniční síť souvislý graf (nepočítáme-li ovšem lanovky). Železniční síť s nesouvislým grafem má například Malgašská republika; tento graf je na obrázku II.5. Vidíme, že z Ambatondrazaky do Fianarantsoy se vlakem nedostaneme.



Obr. II.5

Definice II.8. Nechť

$$u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \dots, h_n, u_n = v$$

je sled z uzlu u do uzlu v v grafu G. Je-li $h_i \neq h_j$ pro každé i a j takové, že $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$, pak se tento sled nazývá *tah* z u do v. Je-li navíc ještě $u_i \neq u_j$ pro každé i a j takové, že $0 \leqq i \leqq n$, $0 \leqq j \leqq n$, $i \neq j$, tento sled se nazývá *cesta* z u do v.

Jinými slovy, v tahu se nesmějí opakovat hrany, v cestě se nesmějí opakovat hrany ani uzly. Opakují-li se hrany, pak se samozřejmě opakují i uzly; tedy ve sledu, který není tahem, se opakují i uzly.

Věta II.2. *Nechť v grafu G uzly u a v spolu souvisí. Pak existuje cesta z u do v v grafu G.*

Důkaz. Jestliže u a v spolu souvisí, pak existuje sled

$$u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, h_n, u_n = v.$$

Použijeme matematické indukce podle n. Je-li $n = 0$, pak $u = v$ a sled je cestou, protože se skládá z jediného uzlu a žádné hrany. Nechť nyní $k \geqq 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \leqq k - 1$. Mějme nyní $n = k$; máme tedy sled

$$u = u_0, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, h_k, u_k = v.$$

Je-li tento sled cestou, pak věta platí. Není-li cestou, pak existují uzly, které se opakují. Nechť tedy $u_l = u_m$ pro nějaké l a m takové, že $0 \leqq l < m \leqq k$. Pak existuje sled

$$u = u_0, h_1, u_1, \ldots, h_l, u_l = u_m, h_{m+1}, u_{m+1}, \ldots, h_k, u_k = v$$

z u do v, který obsahuje $k - m + l$ hran. Protože $l < m$, je $k - m + l < k$ a tedy podle indukčního předpokladu existuje cesta z u do v.

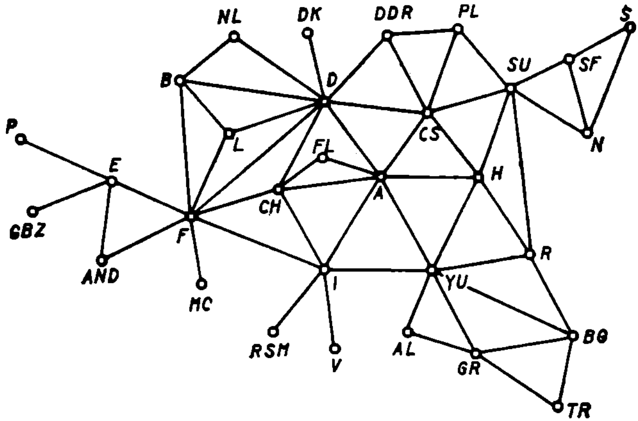
Tohle také známe z praxe. Můžeme-li se z jedné železniční stanice dostat do druhé vlakem, můžeme se tam dostat tak, že každou stanicí a každým úsekem trati projedeme nejvýše jednou. A tak také skutečně jezdíme.

Definice II.9. Je-li C cesta v grafu G, pak počet hran cesty C se nazývá *délka cesty C*.

Pochopitelně počet uzlů cesty C je vždy o jednu větší než její délka.

Definice II.10. Nechť u a v jsou dva uzly grafu G. Jestliže uzly u a v spolu souvisí, pak symbolem $d(u, v)$ označujeme délku nejkratší cesty z u do v. Jestliže u a v spolu nesouvisí, pak položíme $d(u, v) = \infty$. Výraz $d(u, v)$ nazýváme *vzdálenost uzlů* u a v v grafu G.

Vidíme, že $d(u, v) = d(v, u)$ pro každé dva uzly u a v grafu G. Dále $d(u, v) = 0$ právě tehdy, je-li $u = v$, a $d(u, v) = 1$ právě tehdy, jsou-li uzly u a v spojeny hranou.

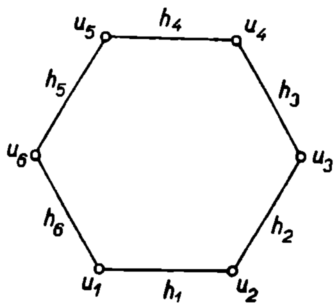


Obr. II.6

Pojem vzdálenosti si můžeme ilustrovat na příkladě grafu, jehož uzly jsou státy evropské pevniny a v němž dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, mají-li odpovídající státy společnou hranici (vedoucí po pevnině). Tento graf je na obrázku II.6. Jednotlivé státy jsou označeny příslušnými poznávacími značkami motorových vozidel. Vzdálenost dvou uzlů nám zde představuje počet přechodů hranice, kterých je třeba při cestě z jednoho státu do druhého pozemským dopravním prostředkem. Vidíme například, že vzdálenost Československa a Portugalska je v takovémto grafu rovna čtyřem.

Dalším důležitým pojmem je pojem kružnice. Je to něco jiného než kružnice v geometrickém smyslu; pro značnou podobnost s touto kružnicí se však používá stejného názvu.

Definice II.11. Souvislý pravidelný graf stupně 2 se nazývá *kružnice*. Počet hran kružnice se nazývá délka kružnice.



Obr. II.7

Na obrázku II.7 vidíme kružnici délky 6. Vidíme, že uzly a hrany kružnice délky n se dají srovnat v posloupnost

$$u_1, h_1, u_2, h_2, \ldots, u_n, h_n, u_1,$$

v níž pouze první a poslední člen se sobě rovnají, ostatní jsou navzájem různé, $u_1, \ldots, u_n$ jsou uzly, $h_1, \ldots, h_n$ jsou hrany, hrana h_i je incidentní s uzly u_i a u_{i+1} pro $i = 1, \ldots, n - 1$ a hrana h_n je incidentní s uzly u_n a u_1.

Nás budou především zajímat kružnice, které jsou podgrafy daných grafů.

Definice II.12. Nechť h je hrana grafu G a nechť h nepatří žádné kružnici, která je podgrafem grafu G. Pak hrana h se nazývá *acyklická hrana* grafu G.

Místo „kružnice, která je podgrafem grafu G" budeme krátce říkat „kružnice v grafu G".

Definice II.13. Graf, který neobsahuje kružnice (jakožto podgrafy), se nazývá *les*.

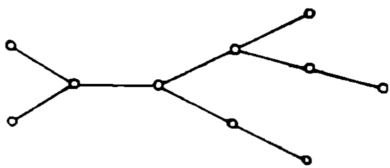
Proč se tomuto grafu říká les, poznáme z další definice.

Definice II.14. Souvislý les se nazývá *strom*.

Víme, že každá komponenta grafu je souvislým grafem. Každá komponenta lesa je rovněž lesem, tedy je to strom. Les se tedy skládá ze stromů; to je také důvod, proč se užívá termínu les.

Slovo „acyklický" je řeckého původu. Slovo „kyklos" znamená „kruh"; v polatinštěné podobě je to „cyklus", což je slovo známé z běžného života. Předpona „a-" znamená zápor.

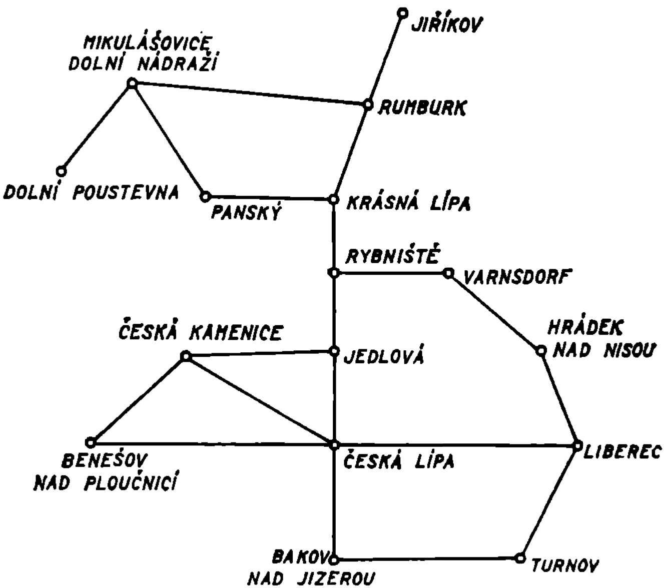
Příklad stromu je na obrázku II.8.



Obr. II.8

Věta II.3. *Budiž h hrana grafu G, buďtež u a v její koncové uzly. Budiž G' graf, který vznikne z G odstraněním hrany h. Hrana h je acyklická právě tehdy, jestliže uzly u a v spolu nesouvisí v grafu G'.*

Důkaz. Předpokládejme, že h je acyklická hrana v grafu G. Kdyby uzly u a v spolu souvisely v grafu G', existovala by cesta C z u do v v grafu G'. Přidáním hrany h k této cestě bychom dostali kružnici v grafu G obsahující hranu h, což by byl spor. Nechť nyní h není acyklická. Pak existuje kružnice K v grafu G, která obsahuje hranu



Obr. II.9

h. Odstraněním hrany h z kružnice K vznikne cesta z u do v, která neobsahuje h a tedy je cestou i v G'. Uzly u a v tedy spolu souvisí v G'.

Jsou-li tedy dvě stanice v grafu železniční sítě spojeny acyklickou hranou, existuje jediná možnost, jak z jedné do druhé jet vlakem. Pokud by tato hrana nebyla acyklická, bylo by těchto možností více. Na obrázku II.9 vidíme graf železniční sítě v určité oblasti severních Čech. Acyklickými hranami jsou spojeny dvojice stanic Rybniště — Krásná Lípa, Rumburk — Jiříkov, Mikulášovice-dolní nádraží — Dolní Poustevna.

Na tomto obrázku si můžeme všimnout i toho, že hrana incidentní s uzlem stupně 1 je vždy acyklická. Takovéto hraně říkáme koncová hrana grafu. Jestliže acyklická hrana není koncovou hranou grafu, říkáme jí most. Na obrázku je tedy mostem hrana spojující Rybniště s Krásnou Lípou. Proč se takové hraně říká most, je zřejmé z obrázku.

Věta II.4. *Nechť graf G je stromem. Pak ke každým dvěma uzlům u a v grafu G existuje právě jedna cesta z u do v.*

Důkaz. Strom je souvislý graf, tedy alespoň jedna cesta z u do v v něm existuje. Předpokládejme, že existují dvě různé cesty C_1 a C_2 z u do v. Nechť C_1 je

$$u = u_0, h_1, u_1, \ldots, h_m, u_m = v$$

a cesta C_2 je

$$u = u'_0, h'_1, u'_1, \ldots, h'_n, u'_n = v.$$

Vidíme, že $u_0 = u'_0$. Může být $u_i = u'_i$ i pro některá další čísla i, ale nikoliv pro všechna, protože pak by obě cesty splývaly. Nechť tedy p je nejmenší číslo takové, že $u_p \neq u'_p$; je ovšem $p \geqq 1$. Nechť dále q je nejmenší číslo takové, že $q > p$ a uzel u_q patří cestě C_2; pak ovšem $u_q = u'_r$, kde r je nějaké číslo takové, že $p \leqq r \leqq n$. Označme C'_1 část (neboli úsek) cesty C_1 tvaru

$$u_p,\ h_{p+1},\ u_{p+1}, \ldots,\ h_q,\ u_q$$

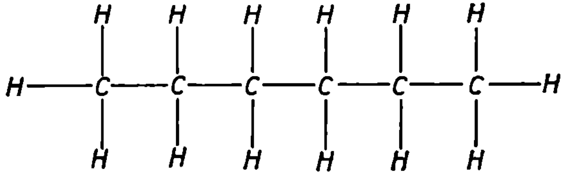
a C'_2 úsek cesty C_2 tvaru

$$u'_p,\ h'_{p+1},\ u'_{p+1}, \ldots,\ h'_r,\ u'_r.$$

Úseky C'_1 a C'_2 jsou cestami z $u_p = u'_p$ do $u_q = u'_r$. Kdyby měly společný uzel různý od těchto dvou, byl by to uzel u_s pro nějaké s takové, že $p < s < q$; potom by však u_s byl uzlem cesty C_2, což je ve sporu s minimalitou čísla q. Tedy C'_1 a C'_2 nemají ani společnou hranu. Uzly a hrany cest C'_1 a C'_2 tvoří kružnici, což je spor.

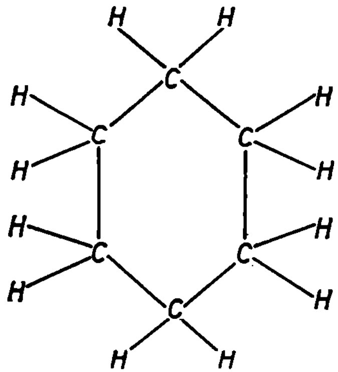
S názvem „acyklický" se setkáváme i v chemii. Acyklický uhlovodík je takový, jehož strukturní vzorec je lesem. V opačném případě se uhlovodík nazývá cyklický. Na obrázku II.10 vidíme acyklický uhlovodík hexan, na obrázku II.11 cyklický uhlovodík cyklohexan.

Budeme nyní mluvit o odstraňování určitých množin uzlů z grafu. Je-li R nějaká podmnožina množiny uzlů



Obr. II.10

grafu G a řekneme-li, že odstraníme z grafu G množinu R, znamená to, že odstraníme současně i všechny hrany incidentní s uzly množiny R. Graf získaný z grafu G odstraněním množiny R je tedy podgraf grafu G, jehož množinou uzlů je $U - R$, kde U je množina uzlů grafu G, a jehož množinou hran je množina všech hran grafu G, jejichž oba koncové uzly patří do $U - R$.



Obr. II.11

Definice II.15. Budiž G souvislý graf, budiž R vlastní podmnožina jeho množiny uzlů. Budiž G' graf, který získáme z G odstraněním množiny R. Je-li G' nesouvislý graf, pak množina R se nazývá *řez grafu* G. Jestliže navíc graf získaný z G odstraněním libovolné vlastní podmnožiny množiny R je souvislý, říkáme, že R je *minimální řez grafu* G.

Je-li graf G nesouvislý, pak prázdná množina je jeho řezem. Protože každá množina obsahuje prázdnou podmnožinu, je prázdná množina jediným minimálním řezem tohoto grafu. Naproti tomu v úplném grafu řezy neexistují, protože graf vzniklý z úplného grafu odstraněním libovolné vlastní podmnožiny jeho množiny uzlů je opět úplný graf, a tedy je souvislý. Jestliže graf není úplný, existuje v něm dvojice uzlů u, v, které nejsou spojeny hranou. Potom množina $U - \{u, v\}$ je řezem takového grafu; jejím odstraněním dostaneme nesouvislý graf složený ze dvou izolovaných uzlů u a v.

Definice II.16. Budiž G graf, který není úplným grafem. Nejmenší počet uzlů řezu grafu G se nazývá *uzlový stupeň souvislosti grafu G* a značí se $\omega(G)$.

Mluvíme o uzlovém stupni souvislosti, protože existuje také hranový stupeň souvislosti; tím se zde nebudeme zabývat. Zřejmě $\omega(G) \leqq n - 2$, kde n je počet uzlů grafu G. Někdy se také definuje uzlový stupeň souvislosti úplného grafu o n uzlech jako $n - 1$. Uzlový stupeň souvislosti nesouvislého grafu je roven nule.

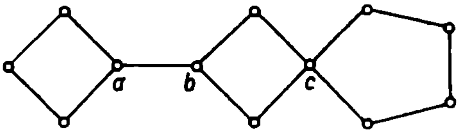
Je-li G graf železniční sítě a známe-li jeho uzlový stupeň souvislosti $\omega(G)$, pak víme, že i když $\omega(G) - 1$ železničních stanic bude vyřazeno z provozu, bude přesto existovat spojení mezi libovolnými dvěma ze zbývajících stanic.

Je-li $\omega(G) = 1$, pak graf G je souvislý, ale obsahuje řez R složený z jediného uzlu.

Definice II.17. Nechť v grafu G existuje řez složený z jediného uzlu. Pak se tento uzel nazývá *artikulace grafu G*.

Na obrázku II.12 vidíme graf s třemi artikulacemi a, b, c.

Je-li $\omega(G) \geqq 2$, artikulace v grafu G neexistují. Mluvíme-li tedy o souvislém grafu bez artikulací, myslíme tím graf, jehož uzlový stupeň souvislosti je alespoň dvě. Takovýto graf má například tu vlastnost, že v něm ke každým dvěma jeho hranám existuje kružnice, která je obě obsahuje. Toto tvrzení zde nebudeme dokazovat.



Obr. II.12

Věta II.5. *Každý uzel stromu G, který nemá stupeň 0 ani 1, je artikulací stromu G.*

Důkaz. Pro strom o jediném uzlu platí tvrzení triviálně. Nechť tedy G obsahuje alespoň dva uzly. Nechť u je uzel stupně alespoň dvě. Pak existují dva různé uzly v a w, které jsou spojeny hranami s uzlem u. Z toho vyplývá, že existuje cesta z v do w (délky 2) procházející uzlem u. Podle věty II.4 tato cesta je jedinou cestou spojující v a w v grafu G, tedy po odstranění uzlu u dostaneme graf, v němž uzly v a w spolu nesouvisí. Uzel u je tedy artikulací.

Věta II.6. *Nechť G je graf, který není úplný, nechť U je jeho množina uzlů. Potom*

$$\omega(G) \leq \min_{u \in U} \varrho_G(u).$$

Poznámka. Jak jsme uvedli výše, $\varrho_G(u)$ značí stupeň uzlu u v grafu G. Výraz $\min\limits_{u \in U} \varrho_G(u)$ tedy znamená minimum stupňů všech uzlů u z množiny U, to jest nejmenší stupeň uzlu v grafu G.

Důkaz. Nechť n je počet uzlů grafu G a budiž u_0 uzel grafu G, jehož stupeň je minimální, to jest $\varrho_G(u_0) = \min_{u \in U} \varrho_G(u)$. Stupeň uzlu u_0 nemůže být $n - 1$, protože pak by všechny uzly grafu G měly stupeň $n - 1$ a graf G by byl úplný. Existuje tedy alespoň jeden uzel v v grafu G, který není spojen hranou s u_0. Odstraňme nyní z G všechny uzly spojené hranami s u_0. V grafu takto získaném uzly u_0 a v spolu zřejmě nesouvisí. Tedy množina uzlů spojených hranami s u_0 je řezem grafu G. Znamená to, že minimální počet uzlů řezu grafu G je menší nebo roven počtu uzlů tohoto řezu, to jest $\omega(G) \leqq \varrho_G(u_0)$.

Ještě se vrátíme ke stromům.

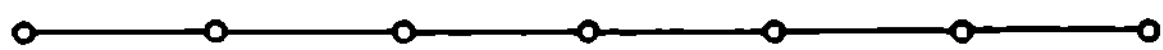
Věta II.7. *Nechť S je strom o n uzlech. Pak počet hran stromu S je $n - 1$.*

Důkaz. Použijeme matematické indukce podle n. Je-li $n = 1$, pak S je graf sestávající z jediného uzlu a žádné hrany, tedy tvrzení pro něj platí. Budiž nyní $k \geqq 2$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \leqq k - 1$. Budiž S strom o k uzlech. Budiž u uzel stromu S; označme $p = \varrho(u)$. Uzel u je spojen hranami s uzly $u_1, \ldots, u_p$. Podobně jako v důkaze věty II.6 můžeme ukázat, že v grafu S' vzniklém odstraněním uzlu u z S žádné dva z uzlů $u_1, \ldots, u_p$ spolu nesouvisí. Označíme-li C_i komponentu grafu S', která obsahuje uzel u_i pro $i = 1, \ldots, p$, vidíme, že komponenty $C_1, \ldots, C_p$ jsou navzájem různé. Dále zřejmě S' neobsahuje žádnou komponentu, která by neobsahovala žádný z uzlů $u_1, \ldots, u_p$. Komponenty

$C_1, \ldots, C_p$ jsou souvislé acyklické grafy, tedy stromy. Budiž n_i počet uzlů komponenty C_i pro $i = 1, \ldots, p$. Je zřejmě $n_i \leqq n - 1$ pro každé i, tedy podle indukčního předpokladu počet hran komponenty C_i je $n_i - 1$. Počet hran grafu S' dostaneme sečtením počtů hran komponent C_i pro $i = 1, \ldots, p$, je to tedy součet všech n_i minus p. Avšak součet všech n_i je $k - 1$, tedy počet hran grafu S' je $k - 1 - p$. Počet hran grafu S dostaneme, přičteme-li k počtu hran grafu S' číslo p, které je počtem všech hran incidentních s u. Tedy tento počet je $k - 1$, což jsme měli dokázat.

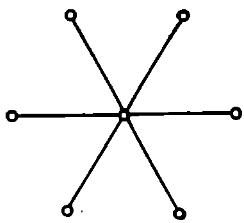
Budeme ještě definovat dva speciální případy stromu.

Definice II.18. Strom, který se skládá ze dvou uzlů stupně 1 a z uzlů a hran cesty spojující tyto uzly, se nazývá *had* (obr. II.13).



Obr. II.13

Definice II.19. Strom, v němž jeden uzel je spojen hranami se všemi ostatními a který neobsahuje žádné další hrany, se nazývá *hvězda* (obr. II.14).



Obr. II.14

Nyní budeme definovat pojem kostry grafu.

Definice II.20. Nechť G je souvislý graf. Nechť S je strom, který je podgrafem grafu G a obsahuje všechny uzly grafu G. Pak S se nazývá ***kostra grafu*** G.

Věta II.8. *Nechť G je souvislý graf. Pak existuje alespoň jedna kostra grafu G.*

Důkaz. Je-li G stromem, pak je kostrou sama sebe. Není-li G stromem, pak obsahuje alespoň jednu hranu h, která není acyklická. Odstraníme-li tuto hranu, dostáváme opět souvislý graf; hrana h náleží některé kružnici K v grafu G a i po odstranění hrany h existuje cesta spojující její koncové uzly — tato cesta je tvořena uzly a hranami hada získaného z K odstraněním h. Je-li získaný graf stromem, pak je kostrou grafu G a tvrzení platí. Není-li stromem, obsahuje hranu, která není acyklická, a postup můžeme opakovat. Postupujeme tedy dále tímto způsobem. Nemůžeme takto pokračovat do nekonečna, protože graf G má konečný počet hran. Musíme tedy po konečném počtu kroků získat strom, a tento strom je hledanou kostrou grafu G.

Věta II.9. *Počet hran souvislého grafu je větší nebo roven n — 1, kde n je počet jeho uzlů.*

Důkaz. Podle věty II.8 souvislý graf G obsahuje kostru. Tato kostra má tutéž množinu uzlů jako graf G; je-li n počet uzlů grafu G, pak tato kostra má podle věty II.7 počet hran rovný $n = 1$. Počet hran grafu G tedy musí být větší nebo roven tomuto číslu.

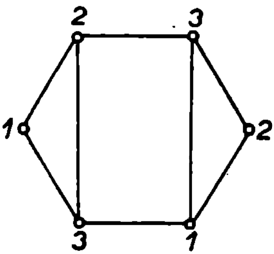
Nakonec si řekneme něco o chromatickém čísle grafu.

Definice II.21. Nechť G je graf, nechť B je neprázdná množina, jejíž prvky se nazývají barvy. Přiřaďme každému uzlu grafu G některou barvu z množiny B. Pak říkáme, že jsme tento uzel touto barvou *obarvili* a celé přiřazení se nazývá *obarvení uzlů grafu* G barvami z množiny B.

Samozřejmě mohou existovat různá obarvení grafu G, například i obarvení takové, které všem uzlům přiřazuje tutéž barvu. V dalším se omezíme na tzv. přípustná obarvení.

Definice II.22. Nechť G je graf, B množina barev. Obarvení uzlů grafu G barvami z množiny B se nazývá *přípustné*, jestliže v grafu G neexistuje hrana spojující uzly téže barvy.

Na obrázku II.15 je příklad přípustného obarvení grafu třemi barvami.



Obr. II.15

Samozřejmě i přípustných obarvení téhož grafu můžeme mít mnoho; například takové, při němž žádné dva uzly nemají tutéž barvu. Nás však budou zajímat taková přípustná obarvení, při nichž je počet barev minimální.

Definice II.23. Nechť G je graf. Nejmenší počet barev potřebný k přípustnému obarvení uzlů grafu G se nazývá *chromatické číslo grafu* G a značí se $\chi(G)$.

Zřejmě pokud G obsahuje alespoň jednu hranu, je $\chi(G) \geqq 2$, protože koncovým uzlům této hrany musí být přiřazeny různé barvy. Dále $\chi(K_n) = n$, protože každé dva uzly grafu K_n jsou spojeny hranou, a tudíž žádné dva z nich nemohou mít tutéž barvu. Vidíme tedy, že ať zvolíme n jakkoliv velké, vždy existuje graf, jehož chromatické číslo je rovno n. Je-li dále G graf o n uzlech, který není úplný, je $\chi(G) \leqq n - 1$. Uzly takového grafu lze obarvit $n - 1$ barvami tak, že zvolíme dvojici uzlů, které nejsou spojeny hranou, oba uzly této dvojice obarvíme toutéž barvou a zbývajících $n - 2$ uzlů obarvíme dalšími $n - 2$ barvami.

Řekneme si ještě něco o grafech, jejichž chromatické číslo je 2.

Definice II.24. Nechť G je graf takový, že $\chi(G) = 2$. Pak se graf G nazývá *sudý*.

Proč se užívá názvu „sudý", objasní další věta.

Věta II.10. *Graf G je sudý právě tehdy, neexistuje-li v něm kružnice liché délky.*

Důkaz. Předpokládejme, že v G existuje kružnice K délky k, kde k je liché číslo. Uzly a hrany kružnice K tvoří posloupnost

$$u_1,\ h_1,\ u_2,\ h_2, \ldots,\ u_k,\ h_k,\ u_1$$

v níž $u_1, \ldots, u_k$ jsou uzly, $h_1, \ldots, h_k$ jsou hrany a sousední členy posloupnosti jsou spolu incidentní. Nechť $B = \{1, 2\}$ a předpokládejme, že existuje přípustné obarvení uzlů grafu G barvami z množiny B. Je-li uzel u_1

obarven barvou 1, pak u_2 musí být obarven barvou 2, protože je spojen hranou s u_1. Pak ovšem je uzel u_3 obarven barvou 1, uzel u_4 barvou 2 a tak dále; obecně uzel u_i je obarven barvou 1 pro i liché a barvou 2 pro i sudé. Potom však u_k je obarven barvou 1, protože k je liché, a je spojen hranou s uzlem u_1 obarveným toutéž barvou, což je spor. Je-li u_1 obarven barvou 2, dojdeme ovšem analogickým způsobem rovněž ke sporu. Nechť nyní G neobsahuje kružnici liché délky. Zvolme uzel u v G. Všechny uzly grafu G, jejichž vzdálenost od u je konečná a sudá, obarvíme barvou 2 a všechny uzly v G, jejichž vzdálenost od u je konečná a lichá, obarvíme barvou 1. Tím obarvíme všechny uzly komponenty C grafu G, která obsahuje u. Dokážeme, že toto obarvení je přípustným obarvením komponenty C. Předpokládejme, že tomu tak není a že existují dva uzly v a w obarvené touž barvou a spojené hranou. Nechť $d(u, v) = a$, $d(u, w) = b$. Potom čísla a a b jsou buď obě sudá, nebo obě lichá. Budiž C_1 cesta délky a z v do u, budiž C_2 cesta délky b z w do u. Cesty C_1 a C_2 mají alespoň jeden společný uzel u. Nechť cesta C_1 má tvar

$$v = u_0, h_1, u_1, \ldots, h_a, u_a = u$$

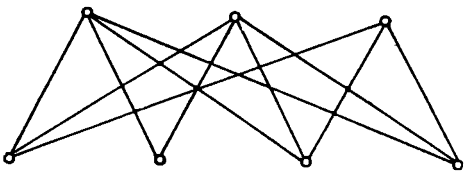
a nechť j je nejmenší takové číslo, že u_j patří cestě C_2. Zřejmě $d(u_j, u) = a - j$; kdyby tato vzdálenost byla menší, mohli bychom úsek cesty C_1 z u_j do u nahradit cestou délky menší než $a - j$ a tím bychom dostali cestu z v do u délky menší než a, což by byl spor s tím, že $d(u, v) = a$. Rovněž úsek cesty C_2 z u_j do u musí mít délku $a - j$; kdyby byla menší, mohli bychom nahradit úsek cesty C_1 z u_j do u tímto úsekem cesty C_2 a dostali bychom cestu z v do u délky menší než a. Kdyby byla větší, mohli bychom opět nahradit úsek cesty C_2 z u_j do u úsekem cesty C_1 a dostali bychom cestu z w do u

délky menší než b. Tedy úsek C_1' cesty C_1 z v do u_j má délku j, úsek C_2' cesty C_2 z w do u_j má délku $b - a + j$. Cesty C_1' a C_2' nemají společný uzel kromě u_j, což plyne z toho, jak bylo určeno j. Budiž nyní K kružnice sestávající z cest C_1' a C_2' a z hrany spojující v a w. Její délka je $b - a + 2j + 1$. Protože a a b jsou buď obě sudá, nebo obě lichá, je $b - a$ sudé; $2j$ je rovněž sudé, tedy $b - a + 2j + 1$ je liché a existuje kružnice liché délky v grafu G, což je spor. Popsané obarvení je tedy přípustným obarvením komponenty C. Má-li graf G více komponent, pak ostatní komponenty obarvíme stejným způsobem.

Množina U uzlů sudého grafu G je tedy sjednocením takových dvou disjunktních množin U_1 a U_2, že každá hrana grafu G je incidentní právě s jedním uzlem množiny U_1 a právě s jedním uzlem množiny U_2.

Definice II.25. Nechť G je sudý graf, jehož množinou uzlů je $U = U_1 \cup U_2$, kde $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ a každý uzel z U_1 je spojen hranou s každým uzlem z U_2. Pak se graf G nazývá *úplný sudý graf*. Je-li m počet uzlů množiny U_1 a n počet uzlů množiny U_2, značíme tento graf $K_{m,n}$.

Na obrázku II.16 vidíme úplný sudý graf $K_{3,4}$. Zdůrazněme, že úplný sudý graf (kromě triviálního případu $K_{1,1}$) není úplným grafem.



Obr. II.16

Možná, že vám připadá zvláštní, že se v matematice užívá takového termínu jako barva nebo obarvení. Proč tomu tak je, uvidíme v kapitole VI.

Popsali jsme si některé základní pojmy teorie grafů. Omezili jsme se ovšem jen na takové pojmy, které budeme potřebovat při studiu dalších kapitol. Další základní pojmy a poznatky z teorie grafů může čtenář najít v [9].

Cvičení

1. Dokažte, že neexistuje pravidelný graf stupně 5 o 35 uzlech.

2. Je-li $d(u, v) = k$ pro dva uzly u a v grafu G a je-li C cesta délky k z u do v, pak žádné dva uzly cesty C nejsou v G spojeny hranou nepatřící do C. Dokažte.

3. Jsou-li u, v, w tři uzly grafu G, pak pro jejich vzdálenosti v grafu G platí takzvaná trojúhelníková nerovnost:

$$d(u, v) + d(v, w) \geqq d(u, w).$$

Dokažte. Co vám to připomíná z geometrie?

4. Dokažte, že odstraněním jedné hrany (při ponechání jejích koncových uzlů) se sníží uzlový stupeň souvislosti nejvýše o jednu.

5. Dokažte, že každý strom obsahující alespoň jednu hranu má alespoň dva uzly stupně 1.

6. Dokažte, že každý koncový uzel mostu je artikulací.

7. Dokažte, že chromatické číslo grafu je rovno maximu chromatických čísel jeho komponent.

8. Dokažte, že odstraněním jedné hrany grafu se jeho chromatické číslo sníží nejvýše o jednu.

9. Dokažte, že každý souvislý graf, jehož počet hran je o jednu menší než počet uzlů, je stromem (obrácené tvrzení k větě II.7).