# Rovinné grafy

## I. kapitola Grafy světem vládnou

In: Bohdan Zelinka (author): Rovinné grafy. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1977. pp. 7–17.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403905

## I. KAPITOLA

# GRAFY SVĚTEM VLÁDNOU

„Samozřejmě!“ řeknete si a hned se vám vybaví ony známé křivky v soustavě souřadnic, s nimiž se setkáváme nejen v matematice, ale skoro ve všech oborech lidské činnosti. A asi vás překvapí, že se zde bude mluvit o něčem zcela jiném.

V matematice totiž existuje pojem grafu, který nemá nic společného se známými grafy funkcí, až na název, odvozený rovněž z řeckého „grafein“, což znamená „psáti“. Ze stejného základu jsou odvozena i známá slova „telegrafie“ (psaní na dálku), „fotografie“ (psaní světlem), „geografie“ (zeměpis) a mnohá další. Vidíme tedy, že zde půjde o nějaké psaní či spíše kreslení. Než však uvedeme definici grafu, ukážeme si některé příklady praktického použití tohoto pojmu.

Otevřete-li železniční jízdní řád, padne vám do oka především jistá mapa. Je to mapa poněkud odlišná od těch, které se vyskytují v zeměpisných atlasech. Jsou na ní sice zakresleny státní hranice, avšak nenajdeme na ní hory ani řeky (s výjimkou hor, na kterých jsou stanice lanovek), pouze kroužky znázorňující železniční stanice a úsečky nebo oblouky, které tyto kroužky spojují a znázorňují tak spojení těchto stanic železniční tratí. Je to přirozené; tato mapa nás neučí zeměpisu, ale je pouze pomůckou k tomu, abychom mohli snadno vyhledat v jízdním řádu trať, kterou potřebujeme.

Je tu však ještě něco jiného, čím se tato mapa liší od jiných map. Na leckteré mapě jsou zakresleny železniční tratě. Srovnejte však nákres železniční tratě na běžné mapě s nákresem na mapě v jízdním řádu a vyberte si k tomu nějakou trať v horské oblasti. Co vidíte? Na běžné mapě se trať klikatí, protože je zakreslena tak, jak ve skutečnosti vypadá. Na železniční mapě však místo klikaté křivky vidíme úsečku nebo nanejvýš velmi málo zakřivený oblouk. To samozřejmě také odpovídá účelu této mapy. Jedeme-li někam vlakem, nestaráme se o žádné zatáčky na trati a spoléháme se plně na to, že nás vlak poveze tak, jak je uvedeno v jízdním řádu.

Představme si nyní, že bychom na této mapě vynechali státní hranice a že bychom ani přesně nedbali na to, aby poloha jednotlivých železničních stanic odpovídala jejich skutečné poloze v terénu, spojení jednotlivých stanic by však zůstalo beze změny. Samozřejmě by nám to ztížilo orientaci v mapě; vždyť při vyhledávání stanic se řídíme tím, co víme o jejich zeměpisné poloze. Nicméně při troše námahy bychom si i v tomto případě vyhledali ty stanice, které potřebujeme, a našli bychom železniční spojení mezi nimi. Tedy mapa by i po této deformaci plnila svůj účel. Ovšem nebylo by už tak docela na místě nazývat ji mapou; vždyť charakteristickým znakem mapy je právě to, že poloha zakreslených útvarů odpovídá jejich poloze v terénu. Co to tedy je? Je to graf.

Podobným obrázkem může být ovšem zakreslena i síť silniční, telefonní nebo telegrafní, rozvod elektřiny, vody nebo svítiplynu.

Podívejme se nyní na schéma nějakého elektrotechnického zařízení. Zde nejsou pouhé kroužky jako na železniční mapě, ale ustálené znaky, které značí kondenzátor, cívku, spínač, elektronku určitého typu a podobně. Na tomto schématu je však podstatné to, že tyto předměty se na nám nevyskytují izolovaně, ale je znázorněno jejich spojení vodičem. I zde je situace podobná jako u železniční mapy. Ze schématu nepoznáme, jak je určitý drát ve skutečnosti zprohýbán, a také to nepotřebujeme znát, protože to pro funkci příslušného zařízení není vůbec podstatné. Podstatné je pouze to, které prvky jsou vodičem spojeny a které nikoliv. A elektrotechnické schéma je rovněž graf.

Vidíme tedy, že graf nám znázorňuje určitou skupinu čili množinu předmětů a určitá spojení mezi jednotlivými předměty čili prvky této množiny. Mluvíme-li o spojení, nemusíme si ovšem vždy představovat nějaké koleje, dráty či roury. V molekule chemické sloučeniny jsou atomy jednotlivých prvků spojeny chemickými vazbami. Můžeme si tedy vyznačit symboly jednotlivých atomů (zpravidla jejich chemickými značkami) a úsečkami znázornit vazby mezi těmito atomy. Dostaneme to, co známe pod názvem strukturní vzorce sloučeniny. A tento strukturní vzorec je opět graf.

Jiným příkladem grafu je rodokmen. Znázorníme-li na obrázku členy určité rodiny nějakými symboly a vedeme-li úsečky od rodičů k dětem, dostáváme také graf. Zde však je situace přece jen poněkud jiná. Dosud jsme znázorňovali vztahy (matematicky řečeno relace) mezi předměty, které byly symetrické. O symetrickém vztahu čili symetrické relaci mluvíme tehdy, jestliže pokaždé, když předmět A je v tomto vztahu k předmětu B, je i předmět B v tomto vztahu k předmětu A. Existuje-li například přímé železniční spojení z Liberce do Turnova, je zřejmé, že existuje také přímé železniční spojení z Turnova do Liberce. Podobně tomu bývá i v elektrotechnických schématech a v chemických strukturních vzorcích. Je-li však pan A synem pana B, rozhodně to neznamená, že pan B je synem pana A. Jestliže v rodokmenu spojíme otce se synem pouhou úsečkou, pak nemůžeme nedbat na polohu symbolů jednotlivých osob, jako jsme nedbali na polohu stanic u železniční mapy; musíme vždy kreslit syna nad otce nebo otce nad syna, ale pokaždé stejným způsobem. Můžeme však udělat něco jiného — k úsečce spojující otce se synem přikreslit šipku směřující k synovi; pak bude rodokmen jasný i tehdy, nebudeme-li dbát na polohu jednotlivých symbolů. Dostáváme opět graf, a to tzv. orientovaný graf, na rozdíl od neorientovaných grafů (bez šipek), o nichž jsme hovořili výše.

V přírodovědných odděleních našich muzeí vídáme často tzv. „strom života". Je to schéma, které znázorňuje vývoj života na zeměkouli. Je to v podstatě také rodokmen, nevystupují v něm však jednotlivé osoby, ale celé živočišné a rostlinné rody. I toto je vlastně orientovaný graf.

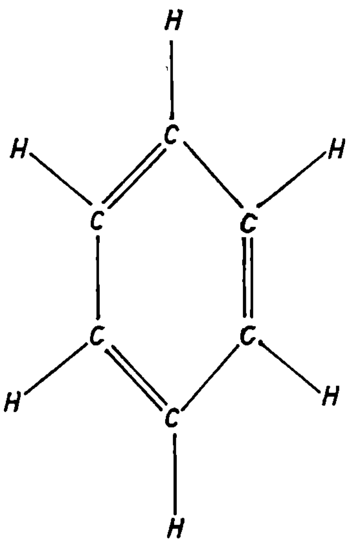
Při programování samočinných počítačů se setkáváme s takzvaným vývojovým diagramem (starší název blokové schéma). Je to nákres, v němž se vyskytují takzvané bloky, které představují jednotlivé početní nebo logické operace potřebné k provedení určitého výpočtu. Mezi těmito bloky jsou šipky, které znázorňují přechod od jedné operace k druhé. Je to zase příklad orientovaného grafu.

Teď, když jsme poznali několik příkladů, provedeme jistý myšlenkový proces, který je nejen v matematice, ale v lidském myšlení vůbec velmi důležitý, a to proces abstrakce. Soustředíme se na to, co je všem uvedeným příkladům společné, a oprostíme se od toho, v čem se odlišují.

V každém příkladě jsme měli určitou množinu prvků. Charakter těchto prvků byl rozličný; jednou to byly železniční stanice, podruhé součástky elektrotechnických zařízení, potom atomy, lidé, živočišné a rostlinné rody, a nakonec početní a logické operace. To však nebylo nikdy podstatné; záleželo pouze na tom, že šlo o množinu nějakých prvků. Těmto prvkům budeme říkat uzly. (Souvisí to například s pojmem železničního uzlu.) Dále jsme měli nějaké úsečky či oblouky spojující jednotlivé dvojice uzlů; znázorňovaly nejrůznější druhy spojení či vazeb. Ani na charakteru těchto spojení nezáleží; záleží pouze na tom, které dvojice uzlů jsou spojeny a které nikoliv. Zmíněným úsečkám nebo obloukům budeme říkat hrany.

Tím však abstrakce nekončí. Vidíme, že nezáleží na poloze jednotlivých uzlů v našem nákresu. Nezáleží ani na tom, zda hranu zakreslíme jako úsečku nebo jako oblouk křivky. Konečně nezáleží ani na délkách těchto úseček nebo oblouků. Víme už, že například v geometrii si nemůžeme přímku nebo křivku představovat pouze jako jakousi vrstvu tuhy na papíře nebo křídy na tabuli, ale jako abstraktní geometrický útvar — zemská osa je přímkou, i když ji nikdo nenakreslil. U grafu můžeme jít v abstrakci ještě dále. Můžeme vlastně vyloučit i veškerou geometrii. Nemusíme si představovat hranu jako úsečku nebo jako oblouk křivky; je to prostě prvek určité množiny. Záleží ovšem na vztahu (relaci) incidence mezi uzly a hranami. Pojem incidence známe už z geometrie. Leží-li bod $M$ na přímce $p$, řekneme, že bod $M$ je incidentní s přímkou $p$ nebo že přímka $p$ je incidentní s bodem $M$. Můžeme také říci, že bod $M$ a přímka $p$ jsou spolu incidentní. Každá přímka je ovšem incidentní s nekonečně mnoha body a každý bod je incidentní s nekonečně mnoha přímkami. U grafů (vezměme zatím grafy neorientované) to s incidencí bude vypadat poněkud jinak; každá hrana je incidentní právě s dvěma uzly — s těmi uzly, které spojuje. Uzel může být incidentní s libovolným počtem hran.

Všimněme si ještě jedné věci. Zatím jsme nevylučovali možnost, že některá dvojice uzlů může být spojena více než jednou hranou. A skutečně například u chemických




Obr. I.1

strukturních vzorců tomu tak bývá. Na obr. I.1 vidíme strukturní vzorec benzenu. Některé dvojice atomů uhlíku jsou v něm spojeny dvěma hranami, protože je mezi nimi takzvaná dvojná vazba. Definice grafu tedy může být taková, že připouští tuto možnost. Zpravidla však se studují pouze takové grafy, v nichž libovolná dvojice uzlů může být spojena nejvýše jednou hranou, a jen ty se nazývají grafy, zatím co v opačném případě používáme názvu multigraf. Latinská předpona „multi-“ znamená „mnoho-“. Známe například slovo „multimilionář“; označuje toho, kdo nemá pouze jeden milión, ale má jich mnoho. Tedy v multigrafu může existovat více hran spojujících tutéž dvojici uzlů, v grafu nikoliv. Toto omezení značně zjednodušuje vyjadřování v teorii grafů. Jsou-li $u$ a $v$ uzly grafu spojené hranou, pak tuto hranu můžeme bez obav z nedorozumění označovat $uv$; kdyby těchto hran bylo více, museli bychom je mezi sebou rozlišovat. Přitom velmi mnoho tvrzení o grafech je takové povahy, že dokážeme-li je pro grafy, je již velmi jednoduché dokázat je i pro multigrafy, jak ještě uvidíme.

Vyloučíme rovněž tu možnost, že by byl některý uzel spojen hranou se sebou samým. Někdy se i tato možnost připouští a takovéto hraně se říká smyčka. My však se takovýmito grafy (říká se jim někdy pseudografy) nebudeme zabývat.

Můžeme tedy přejít k definici neorientovaného grafu.

**Definice I.1.** *Neorientovaný graf* je uspořádaná dvojice $\langle U, H\rangle$ takových množin, že prvky množiny $H$ jsou neuspořádané dvojice prvků množiny $U$. Prvky množiny $U$ se nazývají *uzly grafu*, prvky množiny $H$ se nazývají *hranami grafu*. Je-li $u \in U$, $v \in U$, $h \in H$, $h = \{u, v\}$, říkáme, že hrana $h$ spojuje uzly $u$ a $v$ a že uzly $u$ a $v$ jsou její *koncové uzly*. Říkáme také, že hrana $h$ je *incidentní* (inciduje) s uzlem $u$ a s uzlem $v$ a rovněž uzel $u$ i uzel $v$ jsou incidentní s hranou $h$.

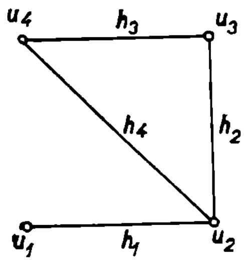
Graf se obvykle označuje písmenem $G$, případně s indexy, čárkami, hvězdičkami a podobně, tedy například

$G_1$, $G_2$, $G'$, $G''$, $G^*$. Může se ovšem používat i jiných velkých písmen latinské abecedy. Uzly a hrany značíme malými písmeny latinské abecedy, případně opět s indexy a jinými znaménky, tedy $u$, $v$, $w$, $u_1$, $u_2$, $v'$, $v''$ a podobně. Hranu spojující uzly $u$ a $v$ můžeme zapsat také jako $uv$.

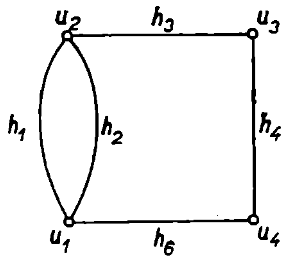
Víme, že množina může být také prázdná, to jest neobsahující žádné prvky. Pokud by množiny $U$ i $H$ byly prázdné, dostali bychom tzv. prázdný graf (někdy se také říká nulový graf.) Na něm není ovšem nic zajímavého, proto se omezíme na grafy, jejichž množina uzlů $U$ je neprázdná. Může být ovšem $U$ neprázdná a $H$ prázdná. Opačný případ — $H$ neprázdná a $U$ prázdná — nastat nemůže, protože každá hrana musí být incidentní se dvěma uzly; tedy existuje-li alespoň jedna hrana, musejí existovat alespoň dva uzly.

Množiny $U$ a $H$ mohou být také nekonečné; pak mluvíme o nekonečném grafu. V této knížce se však omezíme jen na grafy konečné. Pod slovem graf budeme vždy rozumět neprázdný konečný neorientovaný graf.

Při kreslení grafu budeme uzly označovat kroužky, hrany úsečkami nebo oblouky. Na obrázku I.2 vidíme



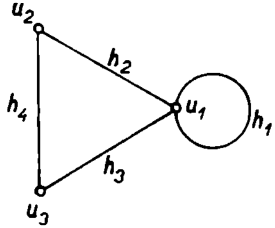

Obr. I.2




Obr. I.3

graf, u něhož $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, hrana $h_1$ je incidentní s uzly $u_1$ a $u_2$, hrana $h_2$ s uzly $u_2$ a $u_3$, hrana $h_3$ s uzly $u_3$ a $u_4$, hrana $h_4$ s uzly $u_2$ a $u_4$.

Na obrázku I.3 je multigraf. Uzly $u_1$ a $u_2$ jsou spojeny dvěma hranami $h_1$ a $h_2$. Na obrázku I.4 je pseudograf; hrana $h_1$ je smyčkou. Z obrázku je patrno, proč se užívá názvu smyčka.



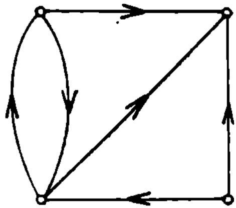

Obr. I.4

Pro doplnění uvedeme ještě definici orientovaného grafu. Ten se od neorientovaného liší tím, že nestačí u každé hrany určit dva uzly, které jsou s ní incidentní, ale je třeba jeden z nich označit jako počáteční uzel této hrany, druhý jako koncový. I zde rozlišujeme graf a multigraf. U grafu připouštíme dvě různé hrany spojující tutéž dvojici uzlů $u$, $v$, ovšem pouze tehdy, jsou-li opačně orientované, to jest je-li pro jednu z nich $u$ počátečním uzlem a $v$ koncovým a pro druhou $v$ počátečním uzlem a $u$ koncovým. Orientovaný graf kreslíme podobně jako neorientovaný, ale u každé hrany kreslíme šipku směřující od jejího počátečního uzlu ke koncovému.

**Definice I.2.** *Orientovaný graf* je uspořádaná dvojice $\langle U, H \rangle$ takových množin, že prvky množiny $H$ jsou uspořádané dvojice prvků množiny $U$. Prvky množiny

$U$ se nazývají *uzly*, prvky množiny $H$ se nazývají *hranami* grafu. Je-li $u \in U$, $v \in U$, $h \in H$, $h = \langle u, v \rangle$, říkáme, že hrana $h$ jde z uzlu $u$ do uzlu $v$, uzel $u$ je jejím *počátečním uzlem* a uzel $v$ je jejím *koncovým uzlem*.

Příklad orientovaného grafu vidíme na obrázku I.5. Jak jsme viděli, grafy vyjadřují určité vztahy, které se mohou vyskytovat mezi dvěma předměty, matematicky řečeno binární relace.



Obr. I.5

S takovýmito vztahy se setkáváme v mnoha oborech lidské činnosti a také skoro všude se setkáváme s nákresy, které můžeme považovat za grafy, i když je třeba nazýváme jinak (síť, pavouk a podobně). Nadpis této kapitoly tedy není nadsázkou.

## Cvičení

**1.** Neorientovaný graf $G$ má množinu uzlů $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, množinu hran $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$. Hrana $h_1$ je incidentní s uzly $u_1$ a $u_2$, hrana $h_2$ s uzly $u_2$ a $u_3$, hrana $h_3$ s uzly $u_3$ a $u_4$, hrana $h_4$ s uzly $u_1$ a $u_4$. Nakreslete tento graf.

**2.** Orientovaný graf $G$ má množinu uzlů $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, množinu hran $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$. Uzel $u_1$ je počátečním uzlem hran $h_2$, $h_3$ a $h_5$ a koncovým uzlem hrany $h_1$. Uzel $u_2$ je počátečním uzlem hran $h_1$ a $h_4$ a koncovým uzlem hrany $h_2$. Uzel $u_3$ je koncovým uzlem hran $h_3$ a $h_4$. Uzel $u_4$ je koncovým uzlem hrany $h_5$. Nakreslete tento graf.

**3.** Sestrojte všechny možné neorientované grafy o čtyřech uzlech.

**4.** Sestrojte všechny možné neorientované grafy o pěti uzlech a pěti hranách.

**5.** Nechť $M$ je množina složená z prvků $a$, $b$, $c$. Sestrojte graf $G$, jehož uzly vzájemně jednoznačně odpovídají všem neprázdným podmnožinám množiny $M$ a v němž dva uzly jsou spojeny hranou právě tehdy, mají-li odpovídající podmnožiny množiny $M$ neprázdný průnik. (Je to tzv. průnikový graf systému neprázdných podmnožin množiny $M$.)