4. kapitola

JEŠTĚ PĚTADVACET ÚLOH

Úloha 17. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n a pro každá dvě reálná čísla a, b platí

$$a^{2^n} + b^{2^n} + n \geqq (ab)^{2^n-1} + (ab)^{2^n-2} + \dots$$
$$\dots + ab + a + b\,.$$

Řešení. Pro $n = 1$ nabývá dokazovaná nerovnost tvaru

$$a^2 + b^2 + 1 \geqq ab + a + b\,,$$

což je ekvivalentní s nerovností

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geqq 0\,,$$

která zřejmě platí pro každá dvě reálná čísla a, b.

Buď nyní k přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = k$ nerovnost platí. Dokážeme, že potom platí i pro $n = k + 1$. Postupně dostáváme (nejprve využijeme toho, že nerovnost platí pro $n = 1$ a potom indukčního předpokladu)

$$a^{2^{k+1}} + b^{2^{k+1}} + k + 1 = (a^{2^k})^2 + (b^{2^k})^2 + 1 + k \geqq$$
$$\geqq (ab)^{2^k} + a^{2^k} + b^{2^k} + k \geqq (ab)^{2^k} + (ab)^{2^k-1} +$$
$$+ \dots + ab + a + b\,.$$

Úloha 18. Jsou dána reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 1)$, pro něž platí

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq 2a_1,$$
$$a_2 \leqq a_3 \leqq 2a_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{n-1} \leqq a_n \leqq 2a_{n-1}.$$

Dokažte, že existují přirozená čísla $p_1, p_2, \ldots, p_n$ taková, že

$$0 \leqq (-1)^{p_1}a_1 + (-1)^{p_2}a_2 + \ldots + (-1)^{p_n}a_n \leqq a_1.$$

Řešení. Jde o to opatřit čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ znaménky tak, aby jejich součet byl pak mezi čísly 0 a a_1. Budeme postupovat indukcí podle počtu čísel n.

Pro $n = 2$ věta platí, protože

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq 2a_1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqq -a_1 + a_2 \leqq a_1.$$

Buď nyní $k > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro ně věta platí, tj. že pro jakýchkoliv k čísel $b_1, b_2, \ldots, b_k$ splňujících předpoklady věty, existují přirozená čísla $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tak, že

$$0 \leqq (-1)^{r_1}b_1 + (-1)^{r_2}b_2 + \ldots + (-1)^{r_k}b_k \leqq b_1.$$

Dokážeme, že potom věta platí i pro $n = k + 1$. Uvažujme $k + 1$ čísel $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}$ splňujících předpoklady věty. Pro k čísel $c_2, c_3, \ldots, c_{k+1}$ jsou předpoklady také splněny a podle indukčního předpokladu tedy existují přirozená čísla $r_1, r_2, \ldots, r_k$ tak, že pro součet

$$S = (-1)^{r_1}c_2 + (-1)^{r_2}c_3 + \ldots + (-1)^{r_k}c_{k+1}$$

platí

$$0 \leqq S \leqq c_2.$$

Rozeznávejme dva případy:

1. Je-li $0 \leqq S \leqq c_1$, je $0 \leqq c_1 - S \leqq c_1$, neboli

$$0 \leqq (-1)^2 c_1 + (-1)^{r_1+1} c_2 + \ldots + (-1)^{r_k+1} c_{k+1} \leqq c_1 .$$

2. Je-li $c_1 \leqq S \leqq c_2 \leqq 2c_1$, je $0 \leqq S - c_1 \leqq c_1$, neboli

$$0 \leqq (-1)^1 c_1 + (-1)^{r_1} c_2 + \ldots + (-1)^{r_k} c_{k+1} \leqq c_1 .$$

Tím je důkaz proveden.

Úloha 19. Buď n přirozené číslo a t buď přirozené číslo, dávající při dělení čtyřmi zbytek 1. Dokažte že součet

$$s_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} t + \binom{n}{5} t^2 + \ldots$$

je dělitelný číslem 2^{n-1}. (Poslední nenulový člen součtu s_n je $\binom{n}{n} t^{\frac{n-1}{2}}$ pro liché n a $\binom{n}{n-1} t^{\frac{n}{2}-1}$ pro sudé n).

Řešení. Je $s_1 = 1$, což je dělitelno číslem 2^0 a $s_2 = 2$, což je dělitelno číslem 2^1. Pro $n = 1$ a $n = 2$ věta tedy platí. Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = k$ a $n = k + 1$ věta platí; dokažme její platnost pro $n = k + 2$. Podle binomické věty je

$$s_n = \frac{(1 + \sqrt{t})^n - (1 - \sqrt{t})^n}{2\sqrt{t}} .$$

Je tedy

$$s_{k+2} = \frac{(1 + \sqrt{t})^{k+2} - (1 - \sqrt{t})^{k+2}}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{[(1+\sqrt{t})^{k+1} - (1-\sqrt{t})^{k+1}]\,[(1+\sqrt{t}) + (1-\sqrt{t})]}{2\sqrt{t}} -$$

$$- \frac{[(1+\sqrt{t})^{k} - (1-\sqrt{t})^{k}]\,(1+\sqrt{t})\,(1-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} =$$

$$= 2s_{k+1} + (t-1)\,s_k\,.$$

Číslo $t - 1$ je dělitelno čtyřmi a použijeme-li indukční předpoklad, jsou oba sčítance dělitelny číslem 2^{k+1}. Tím je důkaz proveden.

Úloha 20. Dokažte, že každé přirozené číslo, které je nejvýše rovno $n!$, je součtem nejvýše n navzájem různých dělitelů čísla $n!$.

Řešení. Pro $n = 1$ je platnost dokazované věty zřejmá. Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že věta pro ně platí. Dokážeme, že potom věta platí i pro $k + 1$. Buď tedy $c \leqq (k + 1)!$ přirozené číslo. Při dělení číslem $k + 1$ dostaneme

$$c = (k + 1)\,d + r\,,$$

kde $0 \leqq r < k + 1$. Zřejmě je $d \leq k!$ a podle indukčního předpokladu je

$$d = d_1 + \ldots + d_k\,,$$

kde $d_1, \ldots, d_k$ jsou buď nuly, nebo navzájem různí dělitelé čísla $k!$. Je tedy

$$c = (k + 1)\,d_1 + \ldots + (k + 1)\,d_k + r\,,$$

kde čísla $(k + 1)\,d_1, \ldots, (k + 1)\,d_k$ jsou nuly nebo navzájem různí dělitelé čísla $(k + 1)!$ (to je zřejmé) a r je také nula nebo dělitel čísla $(k + 1)!$ (neboť $r < k + 1$)

různý ode všech čísel $(k + 1) d_1, \ldots, (k + 1) d_k$ (neboť $r < k + 1 \leqq (k + 1) d_j$ pro $d_j \neq 0$). Tím je úloha vyřešena.

Úloha 21. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: Přičteme-li k číslu, jež má $4n - 3$ číslic, číslo, které z něho vznikne obrácením pořadí číslic, bude mít výsledný součet alespoň jednu číslici sudou (vše je v desítkové soustavě).

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. Pro $n = 1$ je $4n - 3 = 1$ a pro jednociferná čísla věta zřejmě platí. Buď dále p přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = p$ věta platí. Dokážeme ji pro $n = p + 1$ sporem. Nechť pro $n = p + 1$ věta neplatí, tj. existuje číslo, které má $4p + 1$ číslic a sečteme-li je s týmž číslem napsaným obráceně, bude mít součet samé liché číslice. Vzhledem k tomu nenastal při sčítání přenos jedničky z $4p$-tého na $(4p + 1)$-té místo počítáno zprava. Proto nenastal ani přenos z druhého na třetí místo zprava a tedy vynecháním posledních dvou číslic vpravo ze součtu dostaneme číslo, jež má také všechny číslice liché. Z toho je vidět, že odstraníme-li z $(4p + 1)$-ciferného čísla, od něhož jsme vyšli, poslední dvě číslice a počáteční dvě číslice, bude jeho součet s obráceně napsaným číslem mít všechny číslice liché, což odporuje indukčnímu předpokladu. Tím je důkaz proveden.

Úloha 22. Jsou dána celá čísla j, n, pro něž platí $0 \leqq j < n$. Uvažujme všechna celá nezáporná čísla, která mají nejvýše n číslic. Dokažte, že součet j-tých mocnin všech těch uvažovaných čísel, která mají lichý ciferný součet, je stejný jako pro sudý ciferný součet. (Klademe $0^0 = 1$.)

Řešení. Budeme pracovat v desítkové soustavě, ale to není podstatné. Pro každé přirozené n označme L_n (resp. S_n) množinu všech uvažovaných čísel s lichým (resp. sudým) ciferným součtem. (Je zřejmé, že obě množiny mají stejně, a to 5.10^{n-1} prvků.) Budeme postupovat indukcí podle n.

Pro $n = 1$ věta tvrdí, že

$$1^0 + 3^0 + 5^0 + 7^0 + 9^0 = 0^0 + 2^0 + 4^0 + 6^0 + 8^0,$$

což je zřejmé.

Buď k přirozené číslo a nechť věta pro ně platí, dokážeme ji pro $k + 1$. Buď $0 \leqq j < k + 1$ celé číslo. Použijeme-li binomickou větu, dostáváme postupnými úpravami součtů

$$\sum_{a \in S_{k+1}} a^j = \sum_{\substack{b \in S_k \\ c \in S_1}} (10b + c)^j + \sum_{\substack{b \in L_k \\ b \in L_1}} (10b + c)^j =$$

$$= \sum_{\substack{b \in S_k \\ c \in S_1}} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} 10^r b^r c^{j-r} + \sum_{\substack{b \in L_k \\ c \in L_1}} \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} 10^r b^r c^{j-r} =$$

$$= \sum_{r=0}^{j} \binom{j}{r} 10^r \left[\sum_{c \in S_1} c^{j-r} \sum_{b \in S_k} b^r + \sum_{c \in L_1} c^{j-r} \sum_{b \in L_k} b^r \right] =$$

$$= 10^j . 5 \sum_{b \in L_k \cup S_k} b^j +$$

$$+ \sum_{r=0}^{j-1} \binom{j}{r} 10^r \left[\sum_{c \in S_1} c^{j-r} \sum_{b \in S_k} b^r + \sum_{c \in L_1} c^{j-r} \sum_{b \in L_k} b^r \right].$$

Analogickým postupem dostaneme

$$\sum_{a \in L_{k+1}} a^j = \sum_{\substack{b \in S_k \\ c \in L_1}} (10b + c)^j + \sum_{\substack{b \in L_k \\ c \in S_1}} (10b + c)^j =$$

$$= 10^j . 5 \sum_{b \in L_k \cup S_k} b^j +$$

$$+ \sum_{r=0}^{j-1} \binom{j}{r} 10^r \left[\sum_{c \in S_1} c^{j-r} \sum_{b \in L_k} b^r + \sum_{c \in L_1} c^{j-r} \sum_{b \in S_k} b^r \right] .$$

Oba součty jsou stejné, neboť podle indukčního předpokladu pro každé $r = 0, 1, \ldots, j - 1$ platí

$$\sum_{b \in L_k} b^r = \sum_{b \in S_k} b^r .$$

Úloha 23. Dokažte, že

$$\mathbf{D}(\mathbf{n}(a_1, \ldots, a_m), b) = \mathbf{n}(\mathbf{D}(a_1, b), \ldots, \mathbf{D}(a_m, b)) ,$$

kde $m > 1$, $a_1, \ldots, a_m$, b jsou přirozená čísla a symboly $\mathbf{D}(\ldots)$ resp. $\mathbf{n}(\ldots)$ označují největšího společného dělitele resp. nejmenší společný násobek čísel, uvedených v závorce.

Řešení. Budeme postupovat indukcí podle m. Nejprve větu dokážeme pro $m = 2$. Označme $\mathbf{D}(a_1, a_2, b) =$

$$= p, \mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p}\right) = q, \ \mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{b}{p}\right) = r, \ \mathbf{D}\left(\frac{a_2}{p}, \frac{b}{p}\right) = s.$$

Platí

$$\mathbf{D}(q, r) = \mathbf{D}\left(\mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p}\right), \mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{b}{p}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{D}\left(\frac{a_1}{p}, \frac{a_2}{p}, \frac{b}{p}\right) = 1 .$$

Stejně dokážeme, že $\mathbf{D}(q, s) = \mathbf{D}(r, s) = 1$. Platí tedy

$$a_1 = pqru, \quad a_2 = pqsv, \quad b = prsw ,$$

kde každá dvě z čísel u, v, w jsou nesoudělná. Je proto

$$\mathbf{D}(\mathbf{n}(a_1, a_2), b) = \mathbf{D}(\mathbf{n}(pqru, pqsv), prsw) =$$
$$= \mathbf{D}(pqrsuv, prsw) = prs\,,$$
$$\mathbf{n}(\mathbf{D}(a_1, b), \mathbf{D}(a_2, b)) = \mathbf{n}(\mathbf{D}(pqru, prsw), \mathbf{D}(pqsv, prsw)) =$$
$$= \mathbf{n}(pr, ps) = prs\,.$$

Je tedy
$$\mathbf{D}(\mathbf{n}(a_1, a_2), b) = \mathbf{n}(\mathbf{D}(a_1, b), \mathbf{D}(a_2, b))$$
a pro $m = 2$ věta platí.

Buď nyní k přirozené číslo a nechť pro $m = k$ věta platí. Dokážeme, že pak platí i pro $m = k + 1$. Postupně dostáváme

$$\mathbf{D}(\mathbf{n}(a_1, \ldots, a_{k+1}), b) = \mathbf{D}(\mathbf{n}(\mathbf{n}(a_1, \ldots, a_k), a_{k+1}), b) =$$
$$= \mathbf{n}(\mathbf{D}(\mathbf{n}(a_1, \ldots, a_k), b), \mathbf{D}(a_{k+1}, b)) =$$
$$= \mathbf{n}(\mathbf{n}(\mathbf{D}(a_1, b), \ldots, \mathbf{D}(a_k, b)), \mathbf{D}(a_{k+1}, b)) =$$
$$= \mathbf{n}(\mathbf{D}(a_1, b), \ldots, \mathbf{D}(a_k, b), \mathbf{D}(a_{k+1}, b))\,.$$

Druhá rovnost je důsledkem toho, že věta platí pro $m = 2$ a třetí rovnost platí podle indukčního předpokladu. Tím je důkaz proveden.

Všimněte si, že důkaz pro $m = 2$ byl daleko obtížnější než indukční krok.

Úloha 24. Uspořádejte čísla $1, 2, \ldots, n$ tak, aby pro žádná dvě z nich nebyl jejich aritmetický průměr roven některému z čísel, která jsou v uspořádání mezi nimi.

Řešení. Pro $n = 1$ je problém triviální. Předpokládejme, že k je přirozené číslo a že pro všechna menší přirozená čísla problém umíme vyřešit. Má-li být číslo $\frac{a+b}{2}$ celé, musejí mít celá čísla a, b stejnou paritu (tj.

být obě lichá nebo obě sudá). Můžeme tedy uspořádat lichá čísla samostatně a sudá také samostatně a pak ve výsledném uspořádání dát např. nejprve takto uspořádaná lichá a pak sudá čísla. Nechť příslušná lichá čísla jsou $1, 3, \ldots, 2t - 1$. Zřejmě je $t < k$ a podle indukčního předpokladu čísla $1, 2, \ldots, t$ uspořádat umíme. Čísla $1, 3, \ldots, 2t - 1$ můžeme uspořádat analogicky, neboť

$$\frac{a + b}{2} = c \Leftrightarrow \frac{(2a - 1) + (2b - 1)}{2} = 2c - 1\,.$$

Stejně je tomu i se sudými čísly. Tím je problém vyřešen.

Ukážeme si ještě, jak budeme postupovat v konkrétním případě, např. pro $n = 13$. Symboliku snad není třeba vysvětlovat.

$$\begin{aligned}
&(1, 2, \ldots, 13) = \\
&= (1, 3, \ldots, 13)\,(2, 4, \ldots, 12) \sim (1, 2, \ldots, 7)\,(1, 2, \ldots, 6),\\
&(1, 2, \ldots, 7) = (1, 3, 5, 7)\,(2, 4, 6) \sim (1, 2, 3, 4)\,(1, 2, 3),\\
&(1, 2, \ldots, 6) = (1, 3, 5)\,(2, 4, 6) \sim (1, 2, 3)\,(1, 2, 3),\\
&(1, 2, 3, 4) = (1, 3)\,(2, 4) \sim (1, 2)\,(1, 2),\\
&(1, 2, 3) = (1, 3)\,(2) \sim (1, 2)\,(1),\\
&(1, 2) = (1)\,(2) \sim (1)\,(1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1) \to [1],\\
&(1, 2) \to [1, 2],\\
&(1, 2, 3) \to [1, 3, 2],\\
&(1, 2, 3, 4) \to [1, 3, 2, 4],\\
&(1, 2, \ldots, 6) \to [1, 5, 3, 2, 6, 4],\\
&(1, 2, \ldots, 7) \to [1, 5, 3, 7, 2, 6, 4],\\
&(1, 2, \ldots, 13) \to [1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 2, 10, 6, 4, 12, 8].
\end{aligned}$$

Uspořádáme-li tedy čísla $1, 2, \ldots, 13$ tak, jak je popsáno v poslední řádce schematu, nebude aritmetický průměr žádných dvou z nich roven číslu, které je v uspořádání mezi nimi.

Postup si podstatně ulehčíme a urychlíme zejména pro velká n, když si uvědomíme, že jsou-li $p < q$ přirozená čísla a známe-li řešení problému pro q, dostaneme z něho řešení pro p vynecháním čísel $p + 1$, $p + 2$, ..., q. Můžeme tedy postupně konstruovat řešení pro mocniny čísla 2 a z vhodného z nich vynechat případná nadbytečná čísla. V našem případě bude

$$
\begin{aligned}
&(1) \rightarrow [1],\\
&(1, 2) \rightarrow [1, 2],\\
&(1, 2, 3, 4) \rightarrow [1, 3, 2, 4],\\
&(1, 2, \dots, 8) \rightarrow [1, 5, 3, 7, 2, 6, 4, 8],\\
&(1, 2, \dots, 13, \mathbf{14}, \mathbf{15}, \mathbf{16}) \rightarrow [1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, \mathbf{15}, 2, 10,\\
&\qquad\qquad 6, \mathbf{14}, 4, 12, 8, \mathbf{16}].
\end{aligned}
$$

Došli jsme ke stejnému řešení.

Úloha 25. Dokažte, že každý zlomek $0 < \frac{r}{s} < 1$ lze vyjádřit jako součet

$$\frac{r}{s} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_k},$$

kde $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ jsou přirozená čísla a q_j je dělitelno q_{j-1} pro všechna $j = 2, 3, \dots, k$.

Řešení. Stačí se zabývat pouze zlomky v základním tvaru, tj. takovými, kde $r < s$ jsou nesoudělná přirozená čísla. Budeme postupovat matematickou indukcí podle čitatele r.

Pro $r = 1$ má zlomek $\frac{1}{s}$ požadovaný tvar. Buď p přirozené číslo a nechť pro všechna $r \leqq p$ věta platí.

Zabývejme se zlomkem $\frac{p+1}{s}$. Dělíme-li*) jmenovatele čitatelem $p + 1$, dostaneme $s = (p + 1)y - z$, kde y, z jsou nezáporná celá čísla a $z \leqq p$. Vzhledem k tomu, že $p + 1 < s$, bude $y > 1$, a protože $p + 1$, s jsou nesoudělná čísla, bude $z > 0$. Je tedy

$$\frac{p+1}{s} = \frac{(p+1)y}{sy} = \frac{s+z}{sy} = \frac{1}{y}\left(1 + \frac{z}{s}\right) =$$
$$= \frac{1}{y}\left(1 + \frac{z'}{s'}\right),$$

kde $\frac{z'}{s'}$ je zlomek $\frac{z}{s}$ uvedený na základní tvar. Protože $z' \leqq z \leqq p$, je podle indukčního předpokladu

$$\frac{z'}{s'} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n},$$

kde $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, přičemž t_j je dělitelno t_{j-1} pro $j = 2, 3, \ldots, n$. Odtud dostáváme hledané vyjádření

$$\frac{p+1}{s} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t_1 y} + \frac{1}{t_2 y} + \ldots + \frac{1}{t_n y}.$$

Úloha 26. Uvažujme všechna racionální čísla z uzavřeného intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, která zapsána v základním tvaru, mají jmenovatele nejvýše n a jsou seřazena podle velikosti. Dokažte, že pro každá dvě sousední uvažovaná čísla $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ platí $bc - ad = 1$. (Říkáme, že racionální

*) Jde vlastně o trochu jiné dělení, než je obvyklé, o „dělení se záporným zbytkem".

číslo je v základním tvaru, je-li zapsáno jako zlomek, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná celá čísla, přičemž jmenovatel je kladný. Základní tvar čísla 0 je $\frac{0}{1}$.)

Řešení. Označme M_n uvažovanou množinu. Pak $M_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$ a pro $n = 1$ věta zřejmě platí. Předpokládejme, že k je přirozené číslo a že věta platí pro $n = k$. Uvažujme množinu M_{k+1}. Zřejmě $M_k \subseteqq M_{k+1}$. Patří-li některá dvě sousední čísla množiny M_{k+1} obě do množiny M_k, pak pro ně podle indukčního předpokladu platí dokazovaný vztah. Je-li $a < k$ přirozené číslo, pak zřejmě platí nerovnost

$$\frac{a}{k+1} < \frac{a}{k} < \frac{a+1}{k+1}$$

a odtud je zřejmé, že každé číslo z množiny $M_{k+1} - M_k$ má za sousedy z obou stran čísla z množiny M_k. Uvažujme tedy tři sousední čísla (píšeme je v základním tvaru)

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{k+1} < \frac{s}{t},$$

kde prostřední je z množiny $M_{k+1} - M_k$ a obě krajní jsou z množiny M_k. Předpokládejme, že alespoň jedno z čísel $D_1 = qr - p(k+1)$, $D_2 = s(k+1) - rt$ je různé od 1 (a tedy větší než 1). Potom je

$$q + t < qD_2 + tD_1 = (k+1)(qs - pt) = k + 1$$

(poslední rovnost nastává podle indukčního předpokladu). Pak ale platí

$$\frac{p+s}{q+t} \neq \frac{r}{k+1}, \qquad \frac{p}{q} < \frac{p+s}{q+t} < \frac{s}{t},$$

což není možné.

Věta tedy platí i pro $n = k + 1$ a důkaz je proveden.

Úloha 27. Buď $n \geqq 2$ přirozené číslo. Dokažte, že součet všech čísel tvaru $\frac{1}{pq}$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla taková, že $p < q \leqq n$ a $p + q > n$, je $\frac{1}{2}$.

Řešení. Pro každé n označme M_n množinu všech uspořádaných dvojic nesoudělných přirozených čísel p, q, pro něž platí $p < q \leqq n$ a $p + q > n$. Máme dokázat, že pro každé přirozené $n \geqq 2$ je

$$\sum_{(p,\,q) \in M_n} \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}.$$

Tak např.

$$M_6 = \{(1, 6), (5, 6), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (3, 4)\}$$

a skutečně

$$\frac{1}{1.6} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{3.4} = \frac{1}{2}.$$

Buď $k \geqq 2$ přirozené číslo a uvědomme si, jak se liší množiny M_k a M_{k+1}. Množina $M_{k+1} - M_k$ obsahuje zřejmě právě všechny uspořádané dvojice nesoudělných přirozených čísel tvaru $(p, k + 1)$, kde $p < k + 1$. Množina $M_k - M_{k+1}$ obsahuje právě všechny uspořádané dvojice nesoudělných přirozených čísel tvaru

$(p, k + 1 - p)$, kde $p < \frac{k+1}{2}$. Pro příslušné součty zřejmě platí

$$\sum_{(p,q)\in M_{k+1}} \frac{1}{pq} - \sum_{(p,q)\in M_k} \frac{1}{pq} =$$

$$= \sum_{(p,q)\in M_{k+1}-M_k} \frac{1}{pq} - \sum_{(p,q)\in M_k-M_{k+1}} \frac{1}{pq}.$$

Dokážeme, že rozdíl vpravo je roven nule. Postupně dostáváme

$$\sum_{(p,q)\in M_k-M_{k+1}} \frac{1}{pq} = \sum_{\substack{p<\frac{k+1}{2} \\ p,\,k+1-p \text{ nesoud.}}} \frac{1}{p(k+1-p)} =$$

$$= \sum_{\substack{p<\frac{k+1}{2} \\ p,\,k+1-p \text{ nesoud.}}} \frac{1}{p(k+1)} + \sum_{\substack{p<\frac{k+1}{2} \\ p,\,k+1-p \text{ nesoud.}}} \frac{1}{(k+1-p)(k+1)} =$$

$$= \sum_{\substack{p<k+1 \\ p,\,k+1 \text{ nesoud.}}} \frac{1}{p(k+1)} = \sum_{(p,q)\in M_{k+1}-M_k} \frac{1}{pq}.$$

Využili jsme přitom toho, co již víme o množinách $M_k - M_{k+1}$ a $M_{k+1} - M_k$ a dále zřejmých faktů, že čísla p, $k + 1 - p$ jsou nesoudělná právě když čísla p, $k + 1$ jsou nesoudělná a že čísla $\frac{k+1}{2}$, $k + 1$ nejsou nesoudělná. Pro každé $k \geqq 2$ je tedy

$$\sum_{(p,q)\in M_k} \frac{1}{pq} = \sum_{(p,q)\in M_{k+1}} \frac{1}{pq}.$$

Zřejmě je $M_2 = \{(1, 2)\}$ a tedy

$$\sum_{(p,q)\in M_2} \frac{1}{pq} = \frac{1}{1.2}.$$

Předpokládáme-li, že pro $k \geqq 2$ je

$$\sum_{(p,q)\in M_k} \frac{1}{pq} = \frac{1}{2},$$

je též

$$\sum_{(p,q)\in M_{k+1}} \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}$$

a důkaz je proveden.

Úloha 28. Je dán polynom $f(x)$, jehož koeficienty jsou celá čísla. Označme D největší celé číslo, pro něž $D \mid f(i)$ pro každé celé číslo i. Dokažte, že D je rovno největšímu společnému děliteli čísel $f(c), f(c + 1), \ldots, f(c + n)$, kde c je libovolné celé číslo a n je stupeň polynomu $f(x)$. (Symbolem $a \mid b$ označujeme, že číslo b je dělitelno číslem a.)

Řešení. Nejprve dokážeme dvě pomocné věty:

1. Je dán polynom $f(x)$, jehož koeficienty jsou celá čísla, má stupeň n a u x^n má koeficient a_0. Buď c celé číslo a d buď společný dělitel čísel $f(c), f(c + 1), \ldots, f(c + n)$. Potom $d \mid n!\, a_0$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle stupně n polynomu f.

Buď $f(x) = a_0x + a_1$ polynom 1. stupně a c celé číslo. Nechť $d \mid f(c) = d \mid (a_0c + a_1)$ a $d \mid f(c + 1) = d \mid (a_0c + a_1 + a_0)$. Pak též $d \mid (f(c + 1) - f(c)) = a_0 = 1!\, a_0$. Pro polynomy 1. stupně tedy 1. pomocná věta platí.

Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že pro polynomy k-tého stupně věta platí. Uvažujme polynom $f(x)$

stupně $k+1$, který má celé koeficienty a koeficient u x^{k+1} označme a_0. Buď c celé číslo a pro číslo d nechť platí $d \mid f(i)$ pro $i = c, c+1, \ldots, c+k+1$. Polynom $g(x) = f(x+1) - f(x)$ má zřejmě (binomická věta) stupeň k, u x^k má koeficient $b_0 = (k+1)\,a_0$ a všechny jeho koeficienty jsou čísla celá. Pro $i = c, c+1, \ldots, c+k$ je $d \mid g(i)$ a proto podle indukčního předpokladu

$$d \mid k!b_0 = k!\,(k+1)\,a_0 = (k+1)!\,a_0\,,$$

což jsme potřebovali dokázat.

2. Je dán polynom $f(x)$, jehož koeficienty jsou celá čísla a má stupeň n. Buď c celé číslo a d buď společný dělitel čísel $f(c), f(c+1), \ldots, f(c+n)$. Potom $d \mid f(i)$ pro každé celé číslo i.

Důkaz. Opět použijeme metodu matematické indukce podle stupně n polynomu f.

Buď $f(x) = a_0x + a_1$ polynom 1. stupně. Jestliže $d \mid f(c) = d \mid (a_0c + a_1)$ a $d \mid f(c+1) = d \mid (a_0c + a_1 + a_0$, pak zřejmě $d \mid a_0$ a $d \mid a_1$ a tedy $d \mid a_0i + a_1$ pro každé celé číslo i. Pro polynomy 1. stupně tedy 2. pomocná věta platí.

Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že věta platí pro všechny polynomy stupně nejvýše k. Uvažujme polynom $f(x)$ stupně $k+1$ s celými koeficienty, jenž má u x^{k+1} koeficient a_0. Buď c celé číslo a nechť $d \mid f(i)$ pro $i = c, c+1, \ldots, c+k+1$. Polynom

$$g(x) = f(x) - a_0(x-c)\,(x-c-1)\,\ldots\,(x-c-k)$$

je nejvýše k-tého stupně, má celé koeficienty a zřejmě $d \mid g(i)$ pro $i = c, c+1, \ldots, c+k$. Podle indukčního předpokladu $d \mid g(i)$ pro všechna celá čísla i. Aplikujeme-li na polynom $f(x)$ 1. pomocnou větu, dostáváme

$$d \mid (k+1)!\,a_0\,.$$

Vzhledem k tomu, že číslo

$$\frac{(i - c)(i - c - 1) \dots (i - c - k)}{(k + 1)!}$$

je pro každé celé číslo i celé*), platí též

$$d \mid (k + 1)!\, a_0 \frac{(i - c) \dots (i - c - k)}{(k + 1)!} =$$
$$= d \mid a_0 (i - c) \dots (i - c - k)$$

pro každé celé číslo i. Je tedy $d \mid f(i)$ pro všechna celá čísla i a 2. pomocná věta je dokázána.

Teď už snadno vyřešíme naši úlohu. Buď tedy $f(x)$ polynom n-tého stupně s celými koeficienty a D největší celé číslo takové, že $D \mid f(i)$ pro všechna celá čísla i. Dále buď c celé číslo a d největší společný dělitel čísel $f(c), f(c + 1), \dots, f(c + n)$. Protože $D \mid f(c), D \mid f(c + 1), \dots, D \mid f(c + n)$, je $D \leqq d$. A protože podle 2. pomocné věty $d \mid f(i)$ pro každé celé číslo i, je $d \leqq D$. Je tedy $d = D$, což jsme měli dokázat.

Úloha 29. Je dána soustava r lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1s}x_s &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2s}x_s &= 0, \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rs}x_s &= 0 \end{aligned}$$

o s neznámých $x_1, x_2, \dots, x_s$. Koeficienty $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{rs}$ jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je různé od

*) Pro $i > c + k$ je rovno $\binom{i - c}{k + 1}$, pro $i < c$ je rovno $(-1)^{k+1}\binom{c + k - i}{k + 1}$ a pro ostatní i je rovno nule.

nuly. Dokažte, že pokud je $r < s$, existují taková reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_s$ vyhovující soustavě, že každé lze vyjádřit pomocí koeficientů $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{rs}$ a operací sčítání, odečítání a násobení a přitom alespoň jedno z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_s$ je různé od nuly.

Řešení. Jsou-li všechny koeficienty v prvním sloupci rovny nule, tj. $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{r1} = 0$, vyhovují čísla $x_1 = a_{uv}$, kde a_{uv} je některý nenulový koeficient, $x_2 = x_3 = \ldots = x_s = 0$.

Zabývejme se dále případem, kdy alespoň jeden koeficient v prvním sloupci je nenulový. Vzhledem k tomu, že na pořadí rovnic jejich řešení nezávisí, můžeme předpokládat $a_{11} \neq 0$, aniž bychom ztratili na obecnosti. Budeme postupovat indukcí podle počtu rovnic r. Pokud $r = 1$, vyhovují čísla $x_1 = a_{12}, x_2 = -a_{11}, x_3 = \ldots = x_s = 0$. Buď nyní $r > 1$ a předpokládejme, že pro $r - 1$ rovnic věta platí. Všechny rovnice až na první vynásobíme číslem a_{11}. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s &= 0,\\
a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 + \ldots + a_{11}a_{2s}x_s &= 0,\\
\ldots\\
a_{11}a_{r1}x_1 + a_{11}a_{r2}x_2 + \ldots + a_{11}a_{rs}x_s &= 0.
\end{aligned}$$

Odečteme-li od j-té rovnice a_{j1}-násobek první rovnice (pro všechna $j = 2, 3, \ldots, r$), dospějeme k soustavě

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s &= 0,\\
b_{22}x_2 + \ldots + b_{2s}x_s &= 0,\\
\ldots\\
b_{r2}x_2 + \ldots + b_{rs}x_s &= 0,
\end{aligned}$$

kde $b_{jk} = a_{11}a_{jk} - a_{j1}a_{1k}$ pro všechna $2 \leqq j \leqq r$, $2 \leqq k \leqq s$. Snadno nahlédneme, že vynásobením některé z rovnic nenulovým číslem či přičtením některé rovnice k jiné rovnici dostaneme ekvivalentní soustavu. Poslední soustava je tedy ekvivalentní soustavě, od níž jsme vyšli. Je-li alespoň jeden z koeficientů b_{ik} nenulový, vyhovují soustavě

$$\begin{aligned} b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2s}y_s &= 0, \\ b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + \ldots + b_{3s}y_s &= 0, \\ \ldots & \\ b_{r2}y_2 + b_{r3}y_3 + \ldots + b_{rs}y_s &= 0 \end{aligned}$$

podle indukčního předpokladu čísla $y_2, y_3, \ldots, y_s$ taková, že nejsou vesměs rovna nule a každé z nich lze vyjádřit pomocí sčítání, odčítání, násobení a čísel $b_{22}, b_{23}, \ldots, b_{rs}$ (a tedy též čísel $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{rs}$). To platí i v případě, kdy všechny koeficienty b_{ik} jsou nuly, pak vyhovují čísla $y_2 = y_3 = \ldots = y_s = a_{uv}$ (nenulový koeficient). Třetí soustavě — a tedy i soustavě původní — vyhovují čísla

$$x_1 = a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \ldots + a_{1s}y_s ,$$

$$x_2 = -a_{11}y_2, \ldots, x_s = -a_{11}y_s .$$

Tím je důkaz proveden.

Úloha 30. Reálná funkce $f(x)$ je v intervalu $\langle a, b\rangle$ kladná a omezená. Dokažte, že existují čísla $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_2 \in \langle a, b\rangle$ taková, že

$$\frac{(x_2 - x_1)\, f^2(x_1)}{f(x_2)} > \frac{1}{4}\,(b - a)\, f(a) .$$

(Symbolem $f^2(x)$ značíme $(f(x))^2$).

Řešení. Předpokládejme, že tomu tak není, tj. že pro každou dvojici čísel $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $x_2 \in \langle a, b\rangle$ je

$$\frac{(x_2 - x_1)\, f^2(x_1)}{f(x_2)} \leqq \frac{1}{4}\,(b - a)\, f(a)$$

neboli

$$f(x_2) \geqq \frac{4(x_2 - x_1) f^2(x_1)}{(b - a) f(a)},$$

a odvodíme spor.

Definujme posloupnost $\{c_n\}$ takto:

$$c_1 = \frac{a + b}{2}, \quad c_n = c_{n-1} + \frac{b - a}{2^n} \text{ pro } n > 1 .$$

pro $n > 1$ je zřejmě

$$\frac{a + b}{2} \leqq c_n = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2^2} + \frac{b - a}{2^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{b - a}{2^n} \leqq \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} = b$$

(součet geometrické řady). Pro každé přirozené n je tedy $c_n \in \langle a, b \rangle$.

Dokážeme indukcí, že pro každé přirozené n je

$$f(c_n) \geqq 2^n f(a) .$$

Podaří-li se nám to, dospějeme ke sporu s omezeností funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$.

Pro $x_1 = a$, $x_2 = c_1$ podle předpokladu platí

$$f(c_1) \geqq \frac{4(c_1 - a) f^2(a)}{(b - a) f(a)} = 2f(a) .$$

Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že

$$f(c_k) \geqq 2^k f(a) .$$

Potom je (položíme-li $x_1 = c_k$, $x_2 = c_{k+1}$)

$$f(c_{k+1}) \geqq \frac{4(c_{k+1} - c_k) f^2(c_k)}{(b - a) f(a)} = \frac{(b - a)\, 2^{1-k} f^2(c_k)}{(b - a) f(a)} \geqq$$

$$\geqq \frac{(b-a)\,2^{1-k}2^{2k}f^2(a)}{(b-a)\,f(a)} = 2^{k+1}f(a)\,.$$

Tím jsme s důkazem hotovi.

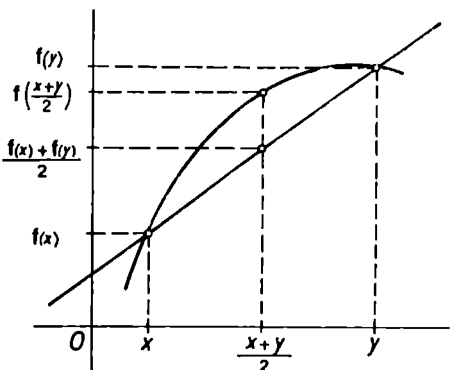
Úloha 31. Funkce f jedné reálné proměnné je definována v nějakém intervalu a pro každá dvě čísla x, y z jejího definičního oboru platí

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Dokažte, že pro libovolných n čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z jejího definičního oboru platí

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \leqq f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right).$$

(Jde o tzv. *Jensenovu nerovnost*. Funkce f, které splňují uvedenou podmínku, se nazývají *konkávní funkce*. Podmínka se názorně projevuje na jejich grafu (viz obrázek).



Pokud funkce f není příliš „divoká" (např. pokud je na nějakém intervalu ležícím v definičním oboru shora nebo zdola omezená), dá se ukázat, že pro každá dvě čísla x, y z definičního oboru dokonce platí, že všechny body o souřadnicích $[t, f(t)]$, kde $x \leqq t \leqq y$, leží „nad" úsečkou o krajních bodech $[x, f(x)]$ a $[y, f(y)]$ nebo na ní.)

Řešení. Pro $n = 1$ je platnost nerovnosti triviální a pro $n = 2$ splývá s předpokladem.

Nejprve dokážeme pomocnou větu (1): Pokud nerovnost platí pro $n = k$, pak platí též pro $n = 2k$ (k je libovolné přirozené číslo).

Postupně dostáváme

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{2k}}{2k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k} + \dfrac{x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{k}}{2}\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{f\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right) + f\left(\dfrac{x_{k+1} + \ldots + x_{2k}}{k}\right)}{2} \geqq$$

$$\geqq \frac{\dfrac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k} + \dfrac{f(x_{k+1}) + \ldots + f(x_{2k})}{k}}{2} =$$

$$= \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{2k})}{2k}.$$

Dále dokážeme pomocnou větu (2): Pokud nerovnost platí pro $n = k + 1$, potom platí též pro $n = k$.

Nejprve dostaneme

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right) =$$

$$= f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k + \dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}}{k+1}\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k) + f\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right)}{k+1}$$

a odtud odečtením $\dfrac{1}{k+1} f\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right)$ od obou stran

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k+1} \leqq \frac{k}{k+1} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right)$$

čili

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k} \leqq f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}\right).$$

Z pomocné věty (1) vyplývá podle principu matematické indukce, že věta platí pro všechna přirozená čísla n, která jsou mocninou (s přirozeným exponentem) čísla 2. Z pomocné věty (2) plyne podle principu matematické indukce (viz cvič. 1.22), že pokud věta platí pro $n = p$, pak platí pro všechna $1 \leqq n \leqq p$. Odtud je zřejmé, že věta platí pro každé přirozené číslo n. Stačí totiž vzít nějakou mocninu čísla 2 větší než n (například 2^n). Pro ni věta platí a pro všechna menší přirozená čísla (tedy i pro n) také.

(Myšlence, na níž byl založen tento důkaz, se říkává *obrácená* nebo také *zpětná indukce*. Pomocná věta (2) (přechod od $k + 1$ ke k) je totiž jakýmsi obrácením obvyklého indukčního kroku (přechodu od k ke $k + 1$).)

Jiné řešení. Pro $n = 1$ a $n = 2$ věta platí. Buď $k > 1$, předpokládejme, že pro $n = k$ věta platí a dokážeme ji pro $n = k + 1$. Postupně dostáváme

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right) =$$

$$= f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{2k} + \frac{x_{k+1}}{k} +\right.$$

$$\left. + \frac{(k-1)(x_1 + \ldots + x_{k+1})}{2k(k+1)}\right) \geqq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_k}{2k}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} f\left(\frac{x_{k+1}}{k} + \frac{(k-1)(x_1 + \ldots x_{k+1})}{k(k+1)}\right) \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2} \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_k)}{k} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{f(x_{k+1}) + (k-1) f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right)}{k} =$$

$$= \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{k+1})}{2k} + \frac{k-1}{2k} f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right).$$

Odtud ihned plyne

$$\frac{f(x_1) + \ldots + f(x_{k+1})}{k+1} \leqq f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{k+1}}{k+1}\right).$$

Úloha 32. Pokud pro každé i $(1 \leqq i \leqq n)$ je $0 \leqq \alpha_i \leqq \leqq \pi$, potom

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{n} \leqq$$

$$\leqq \sin \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \right).$$

Dokažte.

Řešení. Pro $n = 1$ je věta triviální. Pro $n = 2$ je

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2}{2} = \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \leqq$$

$$\leqq \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

a nerovnost platí. Z toho vidíme, že funkce $\sin x$ je na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ konkávní. Věta platí v důsledku Jensenovy nerovnosti (viz úloha 31).

Úloha 33. Dokažte, že pro každé přirozené $n > 1$ platí: Jestliže $0 < x_i < \pi$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, potom

$$|\sin (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)| < \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n.$$

Řešení. Pro $n = 2$ je

$$|\sin (x_1 + x_2)| = |\sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2| \leqq$$

$$\leqq |\sin x_1| |\cos x_2| + |\cos x_1| |\sin x_2| < |\sin x_1| + |\sin x_2| =$$

$$= \sin x_1 + \sin x_2 .$$

Buď $k > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro

$n = k$ věta platí. Dokážeme ji pro $n = k + 1$. Postupně dostáváme

$$|\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1})| \leqq$$
$$\leqq |\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)|\,|\cos x_{k+1}| +$$
$$+ |\cos(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)|\,|\sin x_{k+1}| <$$
$$< |\sin(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)| + |\sin x_{k+1}| <$$
$$< \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_{k+1}\,.$$

Úloha 34. Dokažte, že pro nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\,.$$

Řešení. Pro $n = 1$ se nerovnost redukuje na $a_1 \leqq a_1$, což je pravda.

Buď k přirozené číslo, předpokládejme, že pro $n = k$ věta platí a dokažme ji pro $n = k + 1$. Podle indukčního předpokladu je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1} \geqq k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + a_{k+1}\,.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$k\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} + a_{k+1} \geqq (k + 1)\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}\,.$$

Je-li $a_{k+1} = 0$, tato nerovnost zřejmě platí. V případě $a_{k+1} > 0$ je ekvivalentní nerovnosti

$$k\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{a_{k+1}^{k+1}}} + 1 \geqq (k + 1)\sqrt[k+1]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{a_{k+1}^{k+1}}}\,.$$

Označíme-li

$$x = \sqrt[k(k+1)]{\frac{a_1 a_2 \dots a_{k+1}}{a_{k+1}^{k+1}}},$$

nabude poslední nerovnost tvaru

$$kx^{k+1} + 1 \geqq (k + 1)\, x^k,$$

což je ekvivalentní s

$$(k + 1)\, x^k(x - 1) \geqq x^{k+1} - 1 .$$

Ukážeme, že tato nerovnost platí pro každé reálné $x \geqq 0$. Pro $x = 1$ je její platnost zřejmá (nastává rovnost). Pro $x > 1$ dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$(k + 1)\, x^k \geqq \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1 .$$

Poněvadž v tomto případě je

$$x^k > x^{k-1} > \dots > x > 1 ,$$

nerovnost platí. Zbývá vyšetřit případ $x < 1$. Zde dostaneme

$$(k + 1)\, x^k \leqq x^k + x^{k-1} + \dots + x + 1$$

a poněvadž

$$x^k < x^{k-1} < \dots < x < 1 ,$$

nerovnost také platí. Tím je důkaz proveden.

2. řešení. Pro $n = 1$ je platnost nerovnosti zřejmá. Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že pro $n = k$ nerovnost platí. Dokážeme ji pro $n = k + 1$.

Označme

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}}{k + 1} .$$

Aniž bychom ztratili na obecnosti, můžeme předpokládat, že čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ jsou vzestupně uspořádána, takže

$$a_1 - A \leqq 0, \quad a_{k+1} - A \geqq 0.$$

Je tedy

$$a_1 a_{k+1} = (a_1 - A)(a_{k+1} - A) +$$
$$+ A(a_1 + a_{k+1} - A) \leqq A(a_1 + a_{k+1} - A).$$

Podle indukčního předpokladu platí

$$\sqrt[k]{(a_1 + a_{k+1} - A)\, a_2 \ldots a_k} \leqq$$
$$\leqq \frac{(a_1 + a_{k+1} - A) + a_2 + \ldots + a_k}{k} = A$$

a tedy

$$(a_1 + a_{k+1} - A)\, a_2 \ldots a_k \leqq A^k.$$

Odtud již plyne, použijeme-li předtím odvozenou nerovnost pro $a_1 a_{k+1}$, že

$$a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \leqq A^{k+1},$$

neboli

$$\sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}{k+1},$$

což jsme měli dokázat.

3. *řešení* je podobné předešlému, jen se pracuje s druhou stranou nerovnosti.

Pro $n = 1$ nerovnost platí. Předpokládejme, že platí pro $n = k$ a dokažme ji pro $n = k + 1$. Můžeme se omezit na případ

$$0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_k \leqq a_{k+1},$$

takže

$$a_1 - G \leqq 0, \quad a_{k+1} - G \geqq 0\,,$$

kde $G = \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}$.

Je tedy

$$a_1 a_{k+1} = (a_1 - G)\,(a_{k+1} - G) +$$
$$+ G\,(a_1 + a_{k+1} - G) \leqq G\,(a_1 + a_{k+1} - G).$$

Podle indukčního předpokladu

$$G = \sqrt[k]{a_2 a_3 \ldots a_k \frac{a_1 a_{k+1}}{G}} \leqq$$

$$\leqq \frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \dfrac{a_1 a_{k+1}}{G}}{k}$$

a tedy

$$G \leqq a_2 + a_3 + \ldots + a_k + \frac{a_1 a_{k+1}}{G}\,.$$

Přihlédneme-li k nerovnosti pro $a_1 a_{k+1}$, kterou jsme předtím odvodili, dostaneme dokazovanou nerovnost.

4. řešení. Pro $n = 1$ věta platí. Buď k přirozené číslo, předpokládejme, že pro $n = k$ věta platí a dokažme ji pro $n = k + 1$.

Nejprve provedeme pomocné úvahy. Jsou-li p, q nezáporná reálná čísla, platí

$$(p^k - q^k)\,(p - q) \geqq 0$$

a tedy

$$p^{k+1} + q^{k+1} \geqq pq^k + p^k q\,.$$

Z této nerovnosti plyne pro nezáporná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$

$$k(x_1^{k+1} + x_2^{k+1} + \ldots + x_{k+1}^{k+1}) = (x_1^{k+1} + x_2^{k+1}) +$$
$$+ (x_1^{k+1} + x_3^{k+1}) + \ldots + (x_1^{k+1} + x_{k+1}^{k+1}) +$$
$$+ (x_2^{k+1} + x_3^{k+1}) + \ldots + (x_2^{k+1} + x_{k+1}^{k+1}) + \ldots +$$
$$+ (x_k^{k+1} + x_{k+1}^{k+1}) \geqq (x_1x_2^k + x_1^kx_2) + (x_1x_3^k + x_1^kx_3) +$$
$$+ \ldots + (x_1x_{k+1}^k + x_1^kx_{k+1}) + (x_2x_3^k + x_2^kx_3) + \ldots$$
$$\ldots + (x_2x_{k+1}^k + x_2^kx_{k+1}) + \ldots + (x_kx_{k+1}^k + x_k^kx_{k+1}) =$$
$$= x_1(x_2^k + x_3^k + \ldots + x_{k+1}^k) +$$
$$+ x_2(x_1^k + x_3^k + \ldots + x_{k+1}^k) + \ldots$$
$$\ldots + x_{k+1}(x_1^k + x_2^k + \ldots + x_k^k)\,.$$

Buďte nyní dána nezáporná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Položíme-li v nerovnosti, kterou jsme právě odvodili,

$$x_1 = \sqrt[k+1]{a_1}\,,\quad x_2 = \sqrt[k+1]{a_2}, \ldots, x_{k+1} = \sqrt[k+1]{a_{k+1}}$$

a pak užijeme indukčního předpokladu, vyjde

$$k(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}) \geqq$$
$$\geqq a_1^{\frac{1}{k+1}}\left(a_2^{\frac{k}{k+1}} + a_3^{\frac{k}{k+1}} + \ldots + a_{k+1}^{\frac{k}{k+1}}\right) +$$
$$+ a_2^{\frac{1}{k+1}}\left(a_1^{\frac{k}{k+1}} + a_3^{\frac{k}{k+1}} + \ldots + a_{k+1}^{\frac{k}{k+1}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + a_{k+1}^{\frac{1}{k+1}}\left(a_1^{\frac{k}{k+1}} + a_2^{\frac{k}{k+1}} + \ldots + a_k^{\frac{k}{k+1}}\right) \geqq$$

$$\geqq k(k+1) \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}\,,$$

což dává dokazovanou nerovnost.

5. řešení. Pro $n = 1$ věta platí. Buď k přirozené číslo, předpokládejme, že věta platí pro $n = k$ a dokažme ji pro $n = k + 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že a_{k+1} je největší z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Označíme-li

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}\,,$$

$$A_{k+1} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}}{k+1}$$

a položíme-li

$$b = a_{k+1} - A_k\,,$$

bude $b \geqq 0$ a

$$A_{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{kA_k + A_k + b}{k+1} =$$

$$= A_k + \frac{b}{k+1}\,.$$

Podle binomické věty je

$$A_{k+1}^{k+1} = \left(A_k + \frac{b}{k+1}\right)^{k+1} =$$

$$= A_k^{k+1} + (k+1)\,A_k^k \frac{b}{k+1} + \ldots \geqq$$

$$\geqq A_k^{k+1} + A_k^k b = A_k^k\,(A_k + b) = A_k^k a_{k+1} \geqq$$

$$\geqq a_1 a_2 \ldots a_{k+1}$$

(poslední nerovnost je důsledkem indukčního předpokladu).

6. řešení. Je-li některé z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rovno nule, je platnost dokazované nerovnosti zřejmá. Jsou-li všechna různá od nuly, položme pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} .$$

Čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kladná a platí pro ně $x_1 x_2 \ldots \ldots x_n = 1$. Podle věty, kterou jsme dokázali v úloze 4, je pak

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n ,$$

což okamžitě dává nerovnost, kterou dokazujeme.

7. řešení. Pro $n = 1$ věta platí. Pro $n = 2$ nabývá nerovnost tvaru

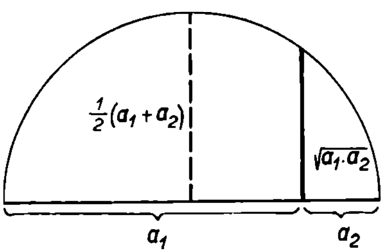
$$\sqrt{a_1 a_2} \leqq \frac{a_1 + a_2}{2} ,$$

a je ekvivalentní s nerovností

$$(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqq 0 ,$$

jejíž platnost je zřejmá.*)

*) Uvědomte si, že pro $n = 2$ plyne nerovnost také z Euklidovy věty o výšce (viz obrázek).



Funkce $\log x$ (na základu nezáleží, je-li větší než 1) je definována pro všechna $x > 0$ a je v tomto intervalu rostoucí, tj. pokud $0 < x \leqq y$, je $\log x \leqq \log y$. Protože pro $x > 0$, $y > 0$ je

$$\sqrt{xy} \leqq \frac{x+y}{2},$$

platí

$$\frac{\log x + \log y}{2} = \log \sqrt{xy} \leqq \log \frac{x+y}{2}$$

a funkce $\log x$ je tedy konkávní. Podle Jensenovy nerovnosti (úloha 31) je pro kladná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\log \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n}{n} \leqq$$

$$\leqq \log \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

a tedy též

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Ještě jinak je tato důležitá nerovnost mezi tzv. *aritmetickým* (vpravo) a *geometrickým průměrem* (vlevo) odvozena např. v 39. svazku této edice, v brožuře A. Kufnera *Nerovnosti a odhady* z r. 1975.

Úloha 35. Abeceda se skládá z n druhů písmen. Určete maximální délku slova, které z ní jde sestavit tak, aby byly současně splněny podmínky:

(A) písmena téhož druhu nejsou vedle sebe,

(B) vynecháním písmen nelze dospět ke slovu $p_1 p_2 p_1 p_2$, kde p_1, p_2 jsou písmena různého druhu.

Řešení. Slovům, která vyhovují oběma podmínkám, budeme říkat přípustná slova. Je zřejmé, že ze slova splňujícího podmínku (B), dostaneme vynecháním písmen slovo, které opět splňuje podmínku (B). Dále si uvědomme, že každé přípustné slovo obsahuje takové písmeno (označme je p), že v něm už další písmena toho druhu nejsou. Kdyby totiž každý druh vyskytující se ve slově, byl zastoupen alespoň dvěma písmeny, vezměme dvě písmena stejného druhu, která jsou sobě nejblíže (označme je r). Ta nemohou být vedle sebe, to by odporovalo podmínce (A). Vezměme nějaké písmeno, které je mezi nimi (označme je s). Další exempláře písmene s už nemohou být mezi nimi, neboť by si pak obě písmena s byla blíže než uvažovaná písmena r. Vynecháním všech ostatních písmen bychom došli tedy ke slovu $r\ s\ r\ s$ nebo $s\ r\ s\ r$, což odporuje podmínce (B).

Slovo $p_1p_2 \dots p_{n-1}p_np_{n-1} \dots p_2p_1$ je zřejmé přípustné a má délku $2n - 1$. Dokážeme, že žádné delší přípustné slovo neexistuje. Budeme postupovat indukcí podle počtu druhů písmen n. Je-li $n = 1$, je p_1 jediné přípustné slovo. Buď k přirozené číslo a předpokládejme, že nejdelší přípustné slovo obsahující k druhů písmen má délku $2k - 1$. Buď nyní dáno nějaké přípustné slovo složené z $k + 1$ druhů písmen, které má délku alespoň 3. Označme p písmeno, které se v něm vyskytuje jen jednou. Rozeznávejme tři případy:

1. Je-li p na kraji slova, pak jeho vynecháním dostaneme přípustné slovo.
2. Není-li p na kraji slova a sousední písmena jsou různého druhu, pak jeho vynecháním dostaneme přípustné slovo.
3. Není-li p na kraji slova a sousední písmena jsou stejného druhu, pak vynecháním písmene p a jednoho sousedního písmene dostaneme přípustné slovo.

Tím jsou všechny možnosti vyčerpány. V každém případě vznikne popsaným vynecháním slovo složené z k druhů písmen, a to má podle indukčního předpokladu délku nejvýše $2k - 1$. Slovo, od kterého jsme vyšli, nebylo tedy delší než $2k + 1$. Tím je důkaz proveden.

Úloha 36. Každý ze svatebních hostů se zná alespoň s polovinou ostatních hostů. Dokažte, že se hosté mohou posadit kolem kulatého stolu tak, aby se každí dva sousedé znali.

Řešení. Počet hostů označme n. Každý host se tedy zná alespoň s $n/2$ ostatními hosty (pokud je n liché míníme tím, že se zná alespoň s $(n + 1)/2$ hosty). Nejprve dokážeme pomocnou větu:

Lze-li r osob posadit na přímou lavici tak, aby se každí dva sousedé znali a aby každý krajník se znal alespoň s $r/2$ ostatními osobami, potom je lze posadit kolem kulatého stolu tak, aby se každí dva sousedé znali.

Důkaz. Očíslujme osoby tak, jak sedí na lavici zleva doprava $L_1, L_2, \ldots, L_r$. Pokud se krajníci L_1 a L_r znají, můžeme osoby rozesadit kolem stolu v tom pořadí, jak sedí na lavici. Nechť se L_1 a L_r neznají. Označme M množinu všech známých krajníka L_r sedících na lavici a N množinu všech, kdo zprava sousedí s nějakým známým krajníka L_1. Množina M má podle předpokladu alespoň $r/2$ prvků. Množina N má také alespoň $r/2$ prvků, neboť na lavici sedí alespoň $r/2$ známých krajníka L_1 a množina N se skládá z jejich sousedů zleva. Množina $M \cup N$ má nejvýše $r - 1$ prvků, neboť $L_r \notin M$, $L_r \notin N$.

Množiny M, N mají tedy neprázdný průnik; nechť $L_j \in M \cap N$. Posadíme-li osoby kolem stolu v pořadí

$$L_1, L_2, \ldots, L_{j-1}, L_j, L_r, L_{r-1}, \ldots, L_{j+1},$$

každí dva sousedé se znají. Pomocná věta je dokázána.

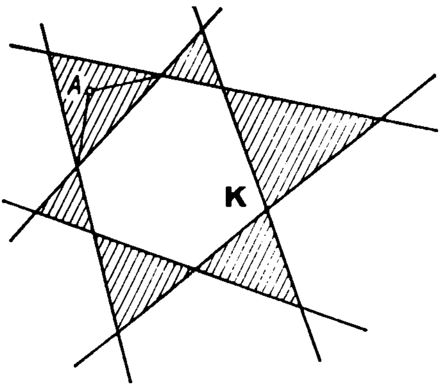
Nyní stačí dokázat, že n hostů lze posadit na lavici tak, aby se každí dva sousedé znali. Budeme postupovat indukcí. Vyberme libovolně jednoho hosta a vedle něho posaďme některého z jeho známých. Buď $2 \leqq r < n$ a předpokládejme, že na lavici již sedí r hostů tak, že každí dva sousedé se znají. Ukážeme, jak k nim posadit $(r + 1)$-tého hosta tak, aby se každí dva sousedé znali. Pokud se některý z dosud neusazených hostů zná s některým z hostů, kteří sedí na kraji, posadíme ho na kraj vedle něho. Dejme tomu, že tomu tak není. Pak jsou všichni známí každého z krajníků již na lavici a tedy $r > n/2$. Hosté na lavici dále splňují předpoklady pomocné věty a proto je lze posadit popsaným způsobem za kulatý stůl; nechť tam sedí v pořadí $H_1, H_2, \ldots, H_r$. Vezměme libovolného hosta H z dosud neusazených hostů. Těch je $n - r < n/2$, a proto se H zná alespoň s jedním hostem za stolem, např. s H_j (je $1 < j < r$). Posadíme-li hosty $H_1, H_2, \ldots, H_r, H$ na lavici v pořadí

$$H, H_j, H_{j+1}, \ldots, H_r, H_1, H_2, \ldots, H_{j-1},$$

budou se každí dva sousedé znát. Tím je důkaz proveden.

Úloha 37. Je dáno $n \geqq 4$ bodů v rovině takových, že každé čtyři z nich jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka. Dokažte, že jsou to vrcholy konvexního n-úhelníka.

Řešení. Pro $n = 4$ věta zřejmě platí. Buď $k \geqq 4$ přirozené číslo. Předpokládejme, že pro $n = k$ věta platí a dokažme ji pro $n = k + 1$. Zvolme libovolný bod z $k + 1$ daných bodů a označme ho A. Ostatních k bodů jsou podle indukčního předpokladu vrcholy konvexního k-úhelníka. Označme ho **K** a prodlužme jeho strany (sledujte obrázek). Bod A leží uvnitř některého



z vyšrafovaných trojúhelníků. (Jinak by totiž existovaly tři vrcholy k-úhelníka **K**, které by nebyly spolu s bodem A vrcholy konvexního čtyřúhelníka.) Odtud je zřejmé, že uvažovaných $k + 1$ bodů jsou vrcholy konvexního $(k + 1)$-úhelníka.

Úloha 38. V rovině je dán konečný počet přímek. Označme a počet průsečíků těchto přímek, b počet částí, na něž jsou přímky průsečíky rozděleny, a c počet částí, na něž přímky rozdělují rovinu. Dokažte, že $a - b + c = 1$.

Řešení. Je-li přímka pouze jedna, je $a = 0$, $b = 1$ a $c = 2$, takže věta platí. Buď p přirozené číslo a v rovině buď dáno p přímek. Předpokládejme, že pro ně věta platí. Sestrojme $(p + 1)$-tou přímku (nakreslete si obrázek). Počet jejích průsečíků s původními p přímkami označme k. Pro každý z nich označme r_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ počet původních p přímek, které jím procházejí. (Je-li q z původních p přímek rovnoběžných s $(p + 1)$-tou přímkou, bude

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k + q = p,$$

ale to nebudeme potřebovat.) Označme ještě j počet těch r_i, která jsou rovna 1 (jinými slovy počet těch původních p přímek, které se s $(p + 1)$-tou přímkou protínají v bodě, jímž už žádná jiná přímka neprochází). Je zřejmé, že po sestrojení $(p + 1)$-té přímky se počet průsečíků zvětšil o j a počet částí roviny o $k + 1$. Počet částí přímek se zvětšil o $k + 1$ (části $(p + 1)$-té přímky) a ještě o j (původních p přímek), celkem o $k + j + 1$. Vidíme, že číslo $a - b + c$ se nezměnilo a věta platí i pro $p + 1$ přímek.

Úloha 39. V prostoru je dáno $n \geqq 3$ bodů, pro něž platí, že každé tři z nich určují trojúhelník, v němž je jeden úhel větší než 120°. Dokažte, že tyto body lze označit písmeny $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tak, aby pro každé $1 \leqq i < j < k \leqq n$ byl úhel $A_iA_jA_k$ větší než 120°.

Řešení. Pokud budeme mluvit o bodech, budeme mínit body zadané v textu úlohy, pokud budeme mluvit o trojúhelnících, budou to trojúhelníky, jejichž všechny vrcholy jsou tyto body, a pokud budeme mluvit o úhlech, půjde o vnitřní úhly těchto trojúhelníků. Je zřejmé, že každý úhel je buď menší než 60°' nebo větší než 120°.

Jestliže všechny úhly s vrcholem A jsou menší než 60°, řekneme, že bod A je ostrý. Zřejmě existují nejvýše dva ostré body; kdyby existovaly tři, pak by určovaly trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly by byly menší než 60°. Vezměme nějaké dva body (označme je B, C), které mají maximální vzájemnou vzdálenost ze všech dvojic bodů. Buďte D, E dva body různé od bodu B. Zřejmě je $\sphericalangle BDC > 120°$ a tedy $\sphericalangle DBC < 60°$. Podobně $\sphericalangle BEC > 120°$ a tedy $\sphericalangle CBE < 60°$. Je tedy

$$\sphericalangle DBE \leqq \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBE < 60° + 60° = 120°,$$

čili dokonce $\sphericalangle DBE < 60°$. Analogicky dokážeme, že pro každé dva body F, G různé od bodu C platí $\sphericalangle FCG < 60°$. Došli jsme k tomuto závěru: Existují právě dva ostré body. Jsou to body, které mají největší vzájemnou vzdálenost.

Po předběžných úvahách přikročíme k řešení úlohy. Dokážeme o něco více: body lze označit tak, jak je uvedeno v textu úlohy a přitom ještě A_1, A_n budou ostré body. Budeme postupovat indukcí podle počtu bodů. Pro $n = 3$ dokazovaná věta zřejmě platí.

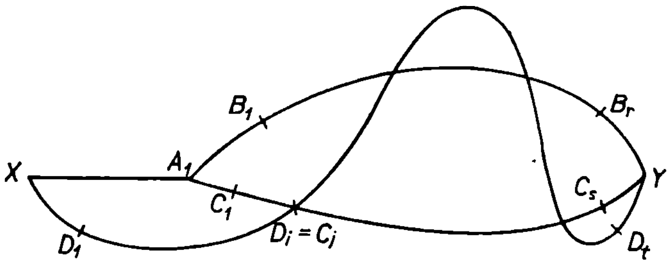
Buď t přirozené číslo a předpokládejme, že věta pro ně platí. Mějme nyní $t + 1$ bodů. Mezi nimi jsou dva ostré, označme je A_1 a A_{t+1}. Podle indukčního předpokladu lze ostatní body označit písmeny $A_2, \ldots, A_t$ tak, aby pro $1 \leqq i < j < k \leqq t$ bylo $\sphericalangle A_iA_jA_k > 120°$. Zbývá dokázat, že pro $1 \leqq i < j \leqq t$ je $\sphericalangle A_iA_jA_{t+1} > > 120°$. Protože body A_1, A_{t+1} jsou ostré, je $\sphericalangle A_1A_jA_{t+1} > 120°$ pro každé $1 < j \leqq t$. Buď nyní $1 < i < j \leqq t$ a uvažujme trojúhelník $A_iA_jA_{t+1}$. Ten má při vrcholu A_{t+1} úhel menší než 60° (neboť A_{t+1} je ostrý bod). Kdyby byl úhel při vrcholu A_i větší než 120°, pak by v čtyřstěnu (případně degenerovaném) $A_1A_iA_jA_{l+1}$ byly všechny tři úhly při vrcholu A_i větší než 120°, což není možné. Je tedy $\sphericalangle A_iA_jA_{l+1} > 120°$ a důkaz je proveden.

Úloha 40. Ve městě jsou alespoň tři křižovatky. Pro libovolné tři různé křižovatky A, B, C platí, že z A do B se lze dostat jinudy než přes C. Dokažte, že pro libovolné dvě různé křižovatky X, Y platí, že z X do Y se lze dostat dvěma cestami, které nemají kromě X, Y žádnou společnou křižovatku.

Řešení. Takové cesty, na nichž se některou křižovatkou prochází vícekrát, uvažovat nebudeme. Každá cesta z jedné křižovatky na druhou je charakterizována posloupností všech křižovatek, kterými prochází, a budeme ji tak také zapisovat. Tak např. cestu z R do S přes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ (v tomto pořadí) označíme $(R\,Z_1Z_2\ldots Z_pS)$. Budeme postupovat indukcí podle počtu křižovatek na cestách mezi dvěma křižovatkami.

Nechť X, Y jsou dvě křižovatky takové, že existuje cesta (X, Y), tj. cesta neprocházející žádnou další křižovatkou. Uvažujme ještě třetí křižovatku Z. Podle předpokladu věty existuje cesta $(X \ldots Z)$ neprocházející křižovatkou Y a dále cesta $(Z \ldots Y)$ neprocházející křižovatkou X. Jejich složením dostaneme cestu $(X \ldots Z \ldots Y)$. Pro dvojice bezprostředně spojených křižovatek tedy věta platí.

Buď $k > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že věta platí pro všechny dvojice křižovatek takové, že nějaká cesta mezi nimi obsahuje právě k křižovatek. Dokážeme ji pro dvojice křižovatek takové, že nějaká cesta mezi nimi obsahuje $k + 1$ křižovatek. Uvažujme dvojici X, Y a cestu $(XA_1 \ldots A_{k-1}Y)$. Podle indukčního předpokladu existují cesty $(A_1B_1 \dots B_rY)$ a $(A_1C_1 \dots C_sY)$, které nemají žádnou křižovatku společnou.*) Dále podle předpokladu věty existuje cesta $(XD_1 \dots D_tY)$, která nevede přes křižovatku A_1. Pokud tato cesta nemá žádnou křižovatku společnou s cestou $(A_1B_1 \dots B_rY)$ nebo s cestou $(A_1C_1 \dots C_sY)$, pak cesty $(XD_1 \dots D_tY)$ a $(XA_1B_1 \dots \dots B_rY)$ nebo $(XA_1C_1 \dots C_sY)$ nemají žádnou křižovatku společnou a jsme hotovi. V opačném případě (viz obrázek) uvažujme první společnou křižovatku cesty



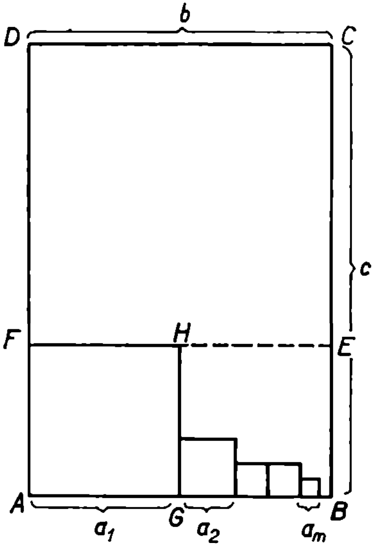
$(XD_1 \dots D_tY)$ s cestou $(A_1B_1 \dots B_rY)$ nebo $(A_1C_1 \dots \dots C_sY)$, např. $D_i = C_j$. Pak cesty $(XD_1 \dots D_iC_j \dots C_sY)$, $(XA_1B_1 \dots B_rY)$ nemají žádnou křižovatku společnou. Důkaz je proveden. (Tím, že jsme první společnou křižovatku uvažovali na cestě $(A_1C_1 \dots C_sY)$, jsme neztratili na obecnosti.)

Úloha 41. Je dán konečný počet čtverců, součet jejich obsahů je 1. Dokažte, že se všechny dají umístit do čtverce, jehož obsah je 2, tak, aby se nepřekrývaly.

---

*) Samozřejmě různou od A_1, Y. To nebudeme zdůrazňovat.

Řešení. Dokážeme větu o něco obecnější: Buď n přirozené číslo a $c \geqq b \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0$ reálná čísla taková, že $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leqq \frac{bc}{2}$. Potom lze n čtverců se stranami $a_1, a_2, \ldots, a_n$ umístit do obdélníka o stranách b, c tak, aby se nepřekrývaly.



Budeme postupovat indukcí podle počtu čtverců. Pro $n = 1$ věta zřejmě platí. Buď $k > 1$ přirozené číslo a předpokládejme, že pro všechna $n < k$ věta platí. Dokážeme, že pak platí i pro $n = k$.

Ukážeme, jak se do obdélníka $ABCD$ o stranách $AB = b$, $BC = c$ vejde k čtverců (sledujte obrázek).

Ke straně AB budeme od vrcholu A postupně umisťovat po řadě těsně vedle sebe podle velikosti uvažované čtverce, dokud to půjde. Počet čtverců, které se podařilo umístit, označme m. Je tedy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m \leqq b$$

a (v případě $m < k$)

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} > b\,.$$

Je-li $m = k$, jsme s důkazem hotovi. Buď tedy nadále $m < k$.

Je-li

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 \geqq \frac{a_1 b}{2}\,,$$

potom

$$a_{m+1}^2 + \ldots + a_k^2 \leqq \frac{b(c - a_1)}{2}$$

a podle indukčního předpokladu lze čtverce o stranách $a_{m+1}, \ldots, a_k$ umístit do obdélníka $FECD$ a jsme hotovi. Soustředíme se tedy na případ

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 < \frac{a_1 b}{2}\,.$$

Všimněme si, že v tomto případě je $m > 1$: Kdyby totiž bylo $a_1 + a_2 > b$, bylo by $a_1 > \frac{b}{2}$ a tedy $a_1^2 > \frac{a_1 b}{2}$ a to odporuje předpokladu dokazované věty. Dále si všimněme, že $a_m < \frac{a_1}{2}$: Kdyby totiž bylo $a_m \geqq \frac{a_1}{2}$, bylo by

$$a_2^2 + \ldots + a_m^2 \geqq \frac{a_1}{2}(a_2 + \ldots + a_m)$$

a protože

$$a_1^2 \geqq a_1 a_{m+1} > a_1(b - a_1 - a_2 - \ldots - a_m),$$

čili

$$a_1^2 > \frac{a_1}{2}(b - a_2 - \ldots - a_m),$$

platilo by

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2 > \frac{a_1 b}{2}$$

a to odporuje předpokladu.

Označme j největší index takový, že

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_j^2 \leqq \frac{a_1(b + a_1)}{2}.$$

V našem případě je zřejmě $j \geqq m$. Všimněme si, že

$$a_2^2 + \ldots + a_j^2 \leqq \frac{a_1(b + a_1)}{2} - a_1^2 = \frac{a_1(b - a_1)}{2}$$

a tedy podle indukčního předpokladu se čtverce o stranách $a_2, \ldots, a_j$ vejdou do obdélníka $GBEH$. Pokud je $j = k$, jsme s důkazem hotovi. Zbývá vyřešit případ $j < k$. Poněvadž

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_j^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_j^2 + a_{j+1}^2 - a_{j+1}^2 >$$

$$> \frac{a_1(b + a_1)}{2} - a_{j+1}^2 = \frac{a_1 b}{2} + \frac{a_1^2}{2} - a_{j+1}^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{a_1 b}{2} + \frac{a_1^2}{2} - a_m^2 > \frac{a_1 b}{2}$$

(poslední nerovnost je důsledkem nerovnosti $\frac{a_1}{2} \leqq a_m$, kterou jsme odvodili dříve), platí

$$a_{j+1}^2 + \ldots + a_k^2 < \frac{bc}{2} - \frac{a_1 b}{2} = \frac{b(c - a_1)}{2}$$

a podle indukčního předpokladu se čtverce o stranách $a_{j+1}, \ldots, a_k$ vejdou do obdélníka $FECD$. Tím je důkaz proveden.