2. kapitola

VÝZNAM PRINCIPU MATEMATICKÉ INDUKCE PRO DEFINICE A KONSTRUKCE

V první kapitole jsme se zabývali výlučně použitím metody matematické indukce při dokazování matematických vět. Indukce je však důležitým nástrojem i při definicích a konstrukcích.

Vzpomeňte si na úlohu 1, v níž jsme dokazovali existenci jistého obarvení roviny, rozdělené přímkami na části. Důkaz jsme provedli tak, že jsme obarvení předepsaných vlastností sestrojili. Přitom jsme vyšli od obarvení v případě jedné přímky a popsali jsme, jak pro libovolné přirozené číslo p z obarvení pro p přímek dostaneme obarvení pro $p + 1$ přímek. Definovali jsme tedy posloupnost obarvení $\{o_n\}$ tak, že jsme přímo popsali její první člen, obarvení o_1, a dále jsme pro libovolné přirozené číslo p popsali, jak od obarvení o_p přejít k obarvení o_{p+1}.

Konstruktivní charakter měly také důkazy provedené v úlohách 3 a 6. I tam jsme definovali posloupnost objektů (dělení čtverců, resp. frankování poštovních zásilek) tak, že jsme popsali první člen a pak pomocí p-tého členu člen $(p + 1)$-tý (pro každé přirozené p).

Uvažujme ještě posloupnost reálných čísel $\{u_n\}$ zadanou předpisem

$$u_1 = 2\,,$$

$$u_{p+1} = u_p^2 - 3u_p + \frac{2}{p} \text{ pro všechna přirozená } p.$$

Počáteční členy této posloupnosti jsou

$$u_1 = 2,$$

$$u_2 = u_1^2 - 3u_1 + \frac{2}{1} = 2^2 - 3.2 + 2 = 0,$$

$$u_3 = u_2^2 - 3u_2 + \frac{2}{2} = 0^2 - 3.0 + 1 = 1,$$

$$u_4 = u_3^2 - 3u_3 + \frac{2}{3} = 1^2 - 3.1 + \frac{2}{3} = -\frac{4}{3},$$

$$u_5 = u_4^2 - 3u_4 + \frac{2}{4} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{113}{18},$$

atd.

Všechny posloupnosti, o nichž jsme se právě zmínili, byly definovány obdobným způsobem. Symbolicky můžeme takovouto definici posloupnosti $\{c_n\}$ zapsat takto:

(A) $c_1 = a,$

(B) $c_{p+1} = P(c_p)$ pro každé přirozené p.

Zde (A) je požadavek, aby první člen byl a; (B) pak symbolizuje přechod od p-tého k $(p + 1)$-tému členu, přičemž P označuje předpis, který pro každé přirozené p jednoznačně vyjadřuje člen c_{p+1} pomocí členu c_p.

Zdůrazněme, že předpis P musí mít opravdu pro každé c_p smysl. Tak například předpis

$$v_1 = -\frac{5}{3},$$

$$v_{p+1} = \frac{p}{v_p + 1} \quad \text{pro všechna přirozená } p$$

nevyjadřuje člen v_5 pomocí členu v_4, neboť postupně vychází $v_2 = -\frac{3}{2}$, $v_3 = -4$, $v_4 = -1$ a zlomek $\frac{4}{v_4 + 1}$ není tedy definován.

Význam principu matematické indukce spočívá v tom, že zaručuje „správnost" definic typu (A) — (B). S jeho pomocí totiž dokážeme následující větu:

Existuje jediná posloupnost $\{c_n\}$, *jejíž členy vyhovují podmínkám* (A) *a* (B).

Důkaz. Označme M množinu všech přirozených čísel n takových, že n-tý člen c_n je podmínkami (A), (B) jednoznačně určen. Podmínka (A) jednoznačně určuje c_1 a tedy $1 \in M$. Předpokládejme dále, že $p \in M$, tj. člen c_p je jednoznačně určen. Podmínka (B) pak jednoznačně vyjadřuje člen c_{p+1} pomocí c_p a tedy c_{p+1} je také jednoznačně určen, čili $p + 1 \in M$. Podle principu (I)—(II) je tedy M množina všech přirozených čísel, což jsme měli dokázat.

Dále uvažujme posloupnost reálných čísel $\{t_n\}$ určenou podmínkami

$$t_1 = 2,$$

$$t_{p+1} = \frac{t_1 + 2t_2 + \ldots + pt_p}{t_1 + t_2 + \ldots + t_p}$$

pro všechna přirozená p.

Její členy jsou

$$t_1 = 2,$$

$$t_2 = \frac{t_1}{t_1} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$t_3 = \frac{t_1 + 2t_2}{t_1 + t_2} = \frac{2 + 2}{2 + 1} = \frac{4}{3},$$

$$t_4 = \frac{t_1 + 2t_2 + 3t_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{2 + 2 + 4}{2 + 1 + \frac{4}{3}} = \frac{24}{13},$$

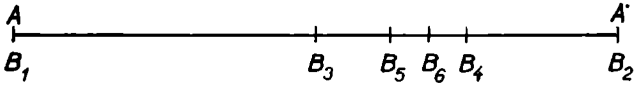
atd.

Ta je definována podle schématu

(C) $c_1 = a$,
(D) $c_{p+1} = P(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ pro každé přirozené p,

kde a je předepsaný první člen a P je předpis, který pro každé přirozené p vyjadřuje jednoznačně $(p + 1)$-tý člen c_{p+1} pomocí předcházejících členů $c_1, c_2, \ldots, c_p$. „Správnost“ definic typu (C) — (D) zaručuje princip matematické indukce ve tvaru (V) — (VI). Pomocí něho bychom analogicky jako předtím ukázali, že existuje právě jedna posloupnost $\{c_n\}$ splňující podmínky (C) — (D).

Zabývejme se nyní dalšími dvěma posloupnostmi. Jsou-li v prostoru dány dva body A, A', položme $B_1 = A$, $B_2 = A'$ a pro každé přirozené číslo p nechť B_{p+2} je střed úsečky B_pB_{p+1}. Tak je definována posloupnost bodů $\{B_n\}$ (viz obrázek).



Jak známo, ať jsou koeficienty a, b, c, d jakákoliv reálná čísla, má rovnice

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

vždy alespoň jedno reálné řešení. To nám umožňuje definovat posloupnost reálných čísel $\{w_n\}$ takto:

$w_1 = 0{,}77$, $w_2 = -3{,}15$, $w_3 = 1{,}02$, $w_4 = 15{,}60$ a w_{p+4} nechť je pro každé přirozené číslo p největší z reálných řešení rovnice

$$w_{p+3}x^3 + w_{p+2}x^2 + w_{p+1}x + w_p = 0\,.$$

Posloupnosti $\{B_n\}$ a $\{w_n\}$ jsou definovány podle schématu

(E) $c_1 = a_1, \quad c_2 = a_2\,, \quad \ldots, \quad c_r = a_r\,,$

(F) $c_{p+r} = P(c_p, c_{p+1}, \ldots, c_{p+r-1})$ pro všechna přirozená p.

(U posloupnosti $\{B_n\}$ bylo $r = 2$ a u $\{w_n\}$ $r = 4$.) „Správnost" zde zaručuje princip matematické indukce ve tvaru (VII) — (VIII).

Ukázali jsme si několik definic posloupností různých objektů, při nichž byl každý člen (až na členy počáteční) určen pomocí členů, které mu předcházejí. Takovýmto definicím říkáme *definice rekurentní* a v různých partiích matematiky se s nimi často setkáváme.

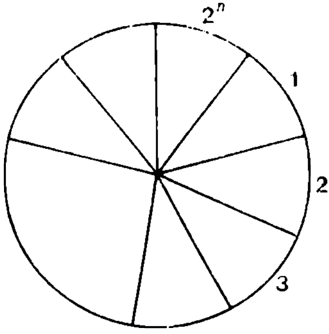
V dalším textu budeme pracovat také s posloupnostmi

$$c_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots$$

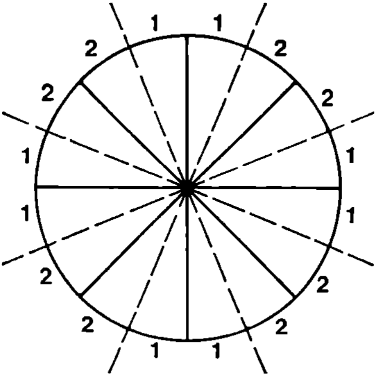
i pro $r > 1$. Není jistě nutno podrobně rozvádět, jak rekurentní definice těchto posloupností souvisejí s principem (III) — (IV) a jeho analogiemi.

Úloha 11. Kruh je rozdělen na 2^n výsečí (viz obrázek). Všech n-ciferných čísel, jež mají jen číslice 1 a 2, je také 2^n. Rozmístěte je po jednom do výsečí tak, aby se čísla v sousedních výsečích lišila jen v jedné číslici.

Řešení. V případě $n = 1$ je kruh rozdělen na dvě výseče, do jedné umístíme číslo 1 a do druhé číslo 2. Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že jsme požadovaným způsobem rozmístili do 2^p výsečí 2^p p-ciferných čísel složených z číslic 1 a 2. Každou z těchto výsečí rozdělíme na dvě výseče. Do každé z takto vzniklých 2^{p+1} výsečí dáme $(p + 1)$-ciferné číslo, jehož prvních p číslic



se shoduje s p-ciferným číslem, které bylo ve výseči před rozdělením, a $(p + 1)$-tá číslice bude buď 1 nebo 2 podle schématu na obrázku. Každé číslo se nyní liší od svého



souseda z jedné strany v poslední číslici a z druhé strany v jedné z prvních p číslic.

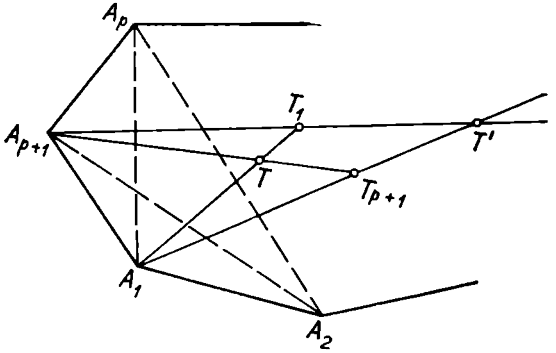
Tak jsme definovali (indukcí typu (A) — (B)) pro každé přirozené číslo n rozdělení, které vyhovuje dané podmínce.

Všimněte si, že šlo o úlohu stejného typu jako byla např. úloha 1, rozdíl je jen ve formulaci.

Úloha 12. Těžnice a těžiště n-úhelníka se definují takto: Pro $n = 3$ (trojúhelník) je těžnice úsečka spojující vrchol se středem protilehlé strany. Těžiště trojúhelníka je průsečík těžnic. Je-li $p \geqq 3$ přirozené číslo, pak těžnice $(p + 1)$-úhelníka je úsečka spojující vrchol s těžištěm p-úhelníka určeného ostatními p vrcholy. Těžiště $(p + 1)$-úhelníka je společný bod všech jeho $p + 1$ těžnic. Ukažte, že tato definice má smysl.

Řešení. Smysl definice zaručuje princip matematické indukce ve tvaru (III)—(IV), pokud má ovšem předpis, určující těžiště $(p + 1)$-úhelníka pomocí těžišť p-úhelníků, smysl. Je nutno dokázat, že těžnice se skutečně protínají v jediném společném bodě.

Provedeme to matematickou indukcí. Pro trojúhelník je známo, že tomu tak je, a že těžiště dělí každou těžnici v poměru 1 : 2 (delší část je při vrcholu). Předpokládejme, že $p \geqq 3$ je přirozené číslo a že pro všechna přirozená čísla k, pro něž $3 \leqq k \leqq p$, je definováno těžiště k-úhelníka, a to dělí každou jeho těžnici v poměru $1 : (k — 1)$, přičemž delší část je při vrcholu. Nyní dokážeme, že všechny těžnice $(p + 1)$-úhelníka se protínají v jediném bodě. K tomu zřejmě stačí dokázat, že každé dvě sousední těžnice (tj. těžnice příslušné sousedním vrcholům) $(p + 1)$-úhelníka se protínají v bodě, který je obě dělí v poměru $1 : p$, přičemž delší část je při vrcholu. Uvažujme tedy $(p + 1)$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_pA_{p+1}$ (sledujte obrázek) a dva jeho sousední vrcholy A_1, A_{p+1} (tímto označením zřejmě neztratíme na obecnosti).



Označme T_1 těžiště p-úhelníka $A_2A_3 \ldots A_{p+1}$, T_{p+1} těžiště p-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_p$ a T' těžiště $(p - 1)$-úhelníka*) $A_2A_3 \ldots A_p$.

Bod T_1 (resp. T_{p+1}) leží na úsečce $A_{p+1}T'$ — těžnici p-úhelníka $A_2 \ldots A_{p+1}$ (resp. na úsečce A_1T' — těžnici p-úhelníka $A_1 \ldots A_p$) a podle indukčního předpokladu platí

$$T'T_1 : T_1A_{p+1} = T'T_{p+1} : T_{p+1}A_1 = 1 : p - 1.$$

Z toho je vidět, že T_1, T_{p+1} a T' jsou tři různé body a že trojúhelníky $T_1T'T_{p+1}$, $A_{p+1}T'A_1$ jsou podobné s poměrem p. Úsečky A_1T_1, $A_{p+1}T_{p+1}$ mají společný

*) V případě $p = 3$ bude T' střed strany A_2A_3.

bod, označme ho T. Trojúhelníky A_1TA_{p+1} a T_1TT_{p+1} jsou podobné s poměrem p a proto

$$A_{p+1}T : T_{p+1}T = A_1T : T_1T = p : 1\,,$$

což jsme měli dokázat.

Vlastnosti rekurentně definovaných posloupností se často dokazují metodou matematické indukce. Není to nic překvapivého — vždyť, jak víme, princip matematické indukce stojí v pozadí rekurentních definic.

Úloha 13. Posloupnost $\{f_n\}$ je dána předpisem

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1,$$

$$f_{p+2} = f_p + f_{p+1} \quad \text{pro všechna přirozená } p.$$

Dokažte, že pro každá dvě přirozená čísla s, t platí: Je-li s dělitelno t, potom je též f_s dělitelno f_t.

Řešení. Nejprve dokážeme pomocnou větu: Pro každá dvě přirozená čísla m, k platí

$$f_{m+k+1} = f_m f_k + f_{m+1} f_{k+1}\,.$$

Budeme postupovat indukcí podle m. Pro $m = 1$ se pomocná věta redukuje na

$$f_{k+2} = f_1 f_k + f_2 f_{k+1} = 1 . f_k + 1 . f_{k+1} = f_k + f_{k+1},$$

což je podle definice posloupnosti $\{f_n\}$ splněno pro každé přirozené k. Pro $m = 2$ nabude pomocná věta tvaru

$$f_{k+3} = f_2 f_k + f_3 f_{k+1} = 1 . f_k + 2 . f_{k+1} =$$
$$= f_k + f_{k+1} + f_{k+1} = f_{k+2} + f_{k+1}\,,$$

což také platí.

Buď r přirozené číslo a předpokládejme, že pomocná věta platí pro $m = r$ a pro $m = r + 1$, tj. že platí

$$f_{r+k+1} = f_r f_k + f_{r+1} f_{k+1}$$

a

$$f_{r+k+2} = f_{r+1} f_k + f_{r+2} f_{k+1} .$$

Dokážeme, že pak platí i pro $m = r + 2$. Sečtením obou posledních rovností dostaneme

$$f_{r+k+1} + f_{r+k+2} = f_k(f_r + f_{r+1}) + f_{k+1}(f_{r+1} + f_{r+2}).$$

Upravíme-li obě strany podle definice, vyjde

$$f_{r+k+3} = f_{r+2} f_k + f_{r+3} f_{k+1} ,$$

což jsme měli dokázat.

Přistupme k důkazu věty z úlohy 13. Předpokládáme, že s je dělitelno t, tj. existuje přirozené číslo q takové, že $s = tq$. Budeme postupovat indukcí podle q. Je-li $q = 1$, věta triviálně platí, neboť pak $s = t$ a f_s ovšem dělí $f_t = f_s$. Buď nyní w přirozené číslo a nechť pro $q = w$ věta platí, tj. f_{tw} je dělitelno f_t. Dokážeme, že také $f_{t(w+1)}$ je dělitelno f_t. Podle pomocné věty dostáváme

$$f_{t(w+1)} = f_{tw+t} = f_{tw-1} f_t + f_{tw} f_{t+1} .$$

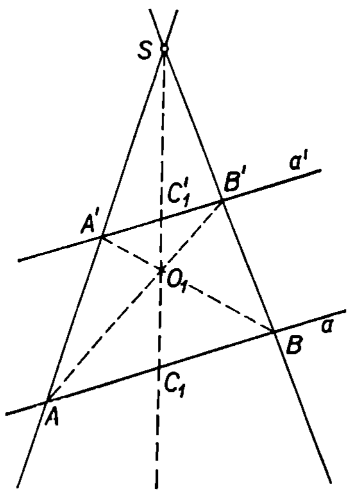
Vidíme, že první sčítanec je dělitelný f_t a druhý podle indukčního předpokladu také. Právě provedená úvaha však neplatí pro $t = w = 1$, neboť f_{tw-1} nemá smysl (člen f_0 nebyl definován). V tomto případě je však $f_2 = f_1 = 1$ a f_2 je dělitelno f_1. Tím je důkaz proveden.

Posloupnost $\{f_n\}$, se kterou jsme pracovali v úloze 13, je tzv. Fibonacciova posloupnost. Ta má řadu pozoruhodných vlastností a hraje důležitou úlohu v různých matematických disciplinách. Studium Fibonacciovy posloupnosti a určitých jiných s ní úzce souvisejících posloupností není dosud uzavřeno. Vychází dokonce speciální časopis, objemný čtvrtletník *Fibonacci Quarterly*, v němž jsou publikovány výlučně nové výsledky z této oblasti.

V další úloze si ukážeme význam rekurentních definic pro konstruktivní geometrii.

Úloha 14. Jsou dány dvě různé rovnoběžky a, a', přirozené číslo n a na přímce a dva body A, B. Sestrojte pouze pomocí pravítka uvnitř úsečky AB bod C_n tak, aby $AC_n : BC_n = 1 : n$.

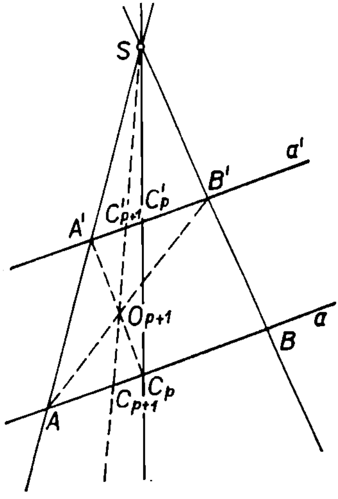
Řešení. Buď $n = 1$. Zvolme bod S tak, aby neležel v pásu určeném danými rovnoběžkami (sledujte obrázek).



Označme A' (resp. B') průsečík přímky SA (resp. SB) s přímkou a'. Průsečík přímek AB', $A'B$ označme O_1 a průsečík přímky SO_1 s přímkou a (resp. a') označme C_1 (resp. C_1'). Z podobných trojúhelníků dostáváme

$$\frac{C_1B}{C_1'A'} = \frac{O_1B}{O_1A'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{C_1A}{C_1'A'}$$

a je tedy $C_1B = C_1A$, čili C_1 je hledaný bod.



Buď p přirozené číslo a předpokládejme, že bod C_p dělí úsečku AB v poměru $AC_p : BC_p = 1 : p$. Zvolme bod S tak, aby neležel v pásu určeném danými rovnoběžkami. Průsečík přímky SA (resp. SB, SC_p) s přímkou a' označme A' (resp. B', C_p'). Průsečík přímek $A'C_p$ a AB' označme O_{p+1} a průsečík přímky SO_{p+1} s přímkou a

(resp. a') označme C_{p+1} (resp. C'_{p+1}). Z podobných trojúhelníků dostáváme vztahy

$$\frac{C_{p+1}C_p}{A'C'_{p+1}} = \frac{C_pO_{p+1}}{A'O_{p+1}} = \frac{AC_p}{A'B'},$$

$$\frac{AC_{p+1}}{A'C'_{p+1}} = \frac{SA}{SA'} = \frac{AB}{A'B'},$$

$$\frac{C_{p+1}C_p}{AC_{p+1}} = \frac{A'C'_{p+1}}{B'C'_{p+1}} = \frac{AC_{p+1}}{BC_{p+1}}.$$

Z nich plyne

$$\frac{AC_{p+1}}{BC_{p+1}} = \frac{AC_p}{AB} = \frac{AC_p}{AC_p + BC_p} = \frac{1}{1+p}.$$

Popsali jsme rekurentně konstrukci takové posloupnosti bodů $\{C_n\}$ na úsečce AB, že pro každé přirozené číslo n je $AC_n : BC_n = 1 : n$. Jiných nástrojů než pravítka není při konstrukcích zapotřebí.

Úloha 15. Jsou dána reálná čísla $a > 0$, $A > 0$. Posloupnost $\{x_n\}$ je definována předpisem

$$x_1 = A,$$

$$x_{p+1} = \frac{1}{2}\left(x_p + \frac{a}{x_p}\right) \text{ pro každé přirozené } p.$$

Dokažte, že tato posloupnost je konvergentní a její limita je $\sqrt{a}$.

Řešení. Je vidět, že $x_n \neq 0$ pro všechna přirozená n a definice má tedy smysl. Pro každé přirozené n dále platí

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \geqq 0$$

a

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n}.$$

Z první nerovnosti plyne, že pro všechna $n \geqq 2$ je $x_n \geqq \sqrt{a}$; posloupnost $\{x_n\}$ je tedy zdola omezená a pro všechna $n \geqq 2$ je (z druhého vztahu) $x_n \geqq x_{n+1}$, čili posloupnost $\{x_n\}$ je (až případně na první člen) nerostoucí. Podle známé věty je tedy posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní. Její limitu označme L; podle toho, co jsme už zjistili, je $L \geqq \sqrt{a}$. Posloupnost $\{x_{n+1}\}$ *) konverguje ovšem také k limitě L. Posloupnost $\left\{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\right\}$ konverguje k limitě $\frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$ a přitom je vzhledem k rekurentní definici totožná s posloupností $\{x_{n+1}\}$**). Platí tedy

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$$

čili

$$L^2 = a .$$

Vzhledem k tomu, co už víme, je $L = \sqrt{a}$. Tím je důkaz proveden.

Právě dokázané vlastnosti posloupnosti $\{x_n\}$ lze využít k praktickému výpočtu $\sqrt{a}$. Dejme tomu, že je dáno kladné číslo a a malé kladné číslo ε; máme vypočíst číslo $\sqrt{a}$ tak přesně, aby chyba nepřesáhla ε. Zvolíme číslo $A > 0$, položíme $x_1 = A$ a postupně počítáme další členy posloupnosti $\{x_n\}$. Podle definice limity posloup-

---

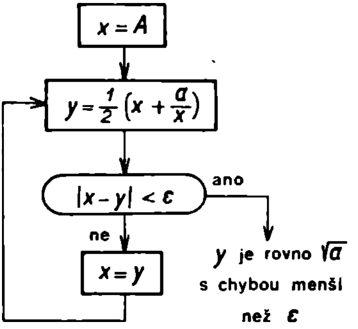
*) Posloupnost $\{x_{n+1}\}$ je posloupnost $\{y_n\}$, kde $y_p = x_{p+1}$ pro všechna přirozená p.

**) Až na první člen.

nosti existuje index n_0 takový, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $|x_n - \sqrt{a}| < \varepsilon$. Člen x_{n_0} a všechny následující členy jsou tedy rovny $\sqrt{a}$ s chybou menší než ε; můžeme tedy ukončit výpočet; jakmile dojdeme k dostatečně velkému indexu, a příslušný člen je hledaný výsledek. Naskýtá se však otázka, jak v praxi poznáme, že jsme už dospěli k dostatečně přesné hodnotě. Podle vyjádření odvozeného na začátku řešení úlohy je však pro všechna n

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \leqq \frac{(x_n - \sqrt{a})(x_n + \sqrt{a})}{2x_n} =$$
$$= x_n - x_{n+1}\,.$$

Budeme-li počítat členy tak dlouho, než se dva po sobě následující členy budou lišit méně než o ε, bude poslední vypočtený člen dostatečně blízko k $\sqrt{a}$. Výpočet bude probíhat podle schématu



Podotkněme ještě, že v praxi nebudeme členy posloupnosti $\{x_n\}$ počítat přesně, ale jen na určitý počet míst (samozřejmě alespoň na tolik, na kolik míst chceme dostat odmocninu). Dá se ukázat, že chyby způsobené zaokrouhlováním nebudou mít na výsledek podstatný vliv.

Zbývá ještě vyjasnit, jaký vliv na průběh výpočtu bude mít volba čísla A. Je vidět, že bude-li se A velmi lišit od $\sqrt{a}$, bude nutno k tomu, aby se došlo k náležitě přesnému výsledku, počítat více členů posloupnosti $\{x_n\}$, než v případě, kdy se A a $\sqrt{a}$ příliš lišit nebudou. Abychom si ušetřili práci nebo náklady na provoz počítače, budeme proto volit A tak, aby se od $\sqrt{a}$ příliš nelišilo. V případě, kdy např. připravujeme program složitějšího výpočtu, během něhož se nejprve vypočte jakési číslo, které nedovedeme předem odhadnout, a to se teprve pak bude odmocňovat, bude vhodné položit třeba $A = a$.

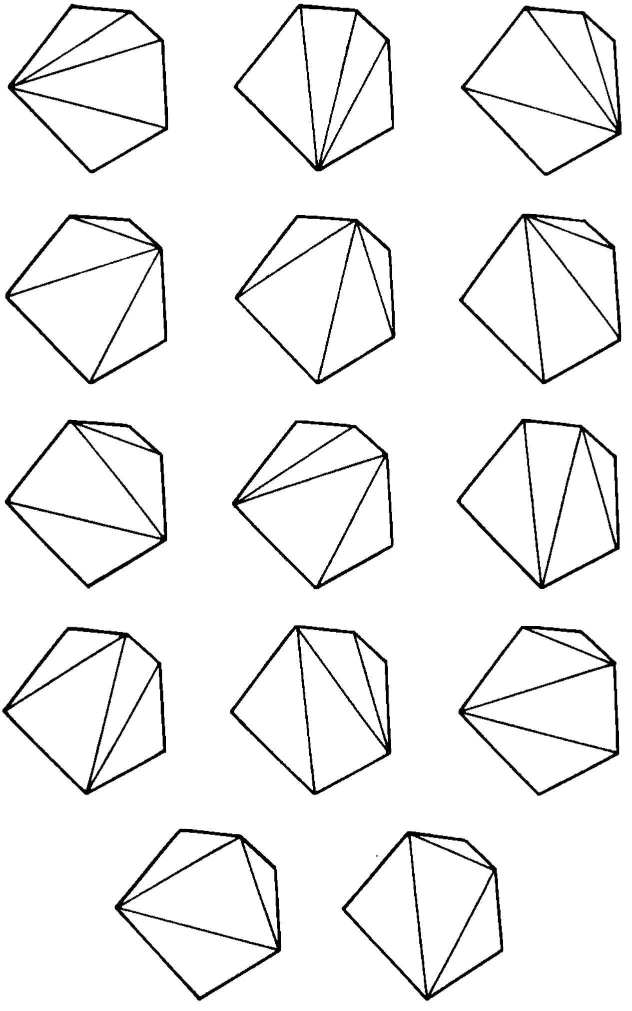
Podobné procesy, založené na postupném výpočtu konečného počtu členů rekurentně definované posloupnosti, se v numerické matematice hojně používají a říká se jim *iterační procesy*.

Úloha 16. Určete, kolika způsoby lze rozdělit konvexní n-úhelník na trojúhelníky jeho úhlopříčkami, které se uvnitř něho neprotínají.

Řešení. Připomeňme si, co jsme dokázali ve cvič. 13h): Maximální počet úhlopříček konvexního n-úhelníka, které se uvnitř něho neprotínají, je n-3. Takové úhlopříčky ho dělí na n-2 trojúhelníky.

Na obrázku je čtrnácti různými způsoby rozdělen popsaným způsobem šestiúhelník.

Naším úkolem je najít počet (označme ho t_n) všech takových dělení n-úhelníka. Zřejmě $t_3 = 1$. Buď $p \geqq 3$ přirozené číslo a buď dán konvexní $(p + 1)$-úhelník



$A_1A_2 \ldots A_{p+1}$. Buď dále $3 \leqq k \leqq p + 1$ a uvažujme, v kolika děleních je obsažen trojúhelník $A_1A_2A_k$. Pro $k = 3$ (resp. $k = p + 1$) je jich zřejmě právě tolik, kolika způsoby lze rozdělit p-úhelník $A_1A_3 \ldots A_{p+1}$ (resp. $A_2A_3 \ldots A_{p+1}$), totiž t_p. Pro $3 < k < p + 1$ je jich tolik, kolika způsoby lze zkombinovat dělení $(k - 1)$-úhelníka $A_2A_3 \ldots A_k$ s děleními $(p - k + 3)$-úhelníku $A_1A_k \ldots A_{p+1}$, totiž $t_{k-1}t_{p-k+3}$. Každé dělení $(p + 1)$-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_{p+1}$ obsahuje právě jeden trojúhelník, jehož jedna strana je A_1A_2, je proto

$$t_{p+1} = t_p + t_3t_{p-1} + t_4t_{p-2} + \ldots + t_{p-2}t_4 + t_{p-1}t_3 + t_p$$

pro všechna přirozená čísla $p \geqq 3$. Tento vztah spolu s podmínkou $t_3 = 1$ definuje rekurentně posloupnost $\{t_n\} = \{t_3, t_4, \ldots\}$ a umožňuje postupně počítat jednotlivé členy této posloupnosti:

$$\begin{aligned}
t_3 &= 1,\\
t_4 &= t_3 + t_3 = 2,\\
t_5 &= t_4 + t_3t_3 + t_4 = 5,\\
t_6 &= t_5 + t_3t_4 + t_4t_3 + t_5 = 14,\\
t_7 &= t_6 + t_3t_5 + t_4t_4 + t_5t_3 + t_6 = 42,\\
t_8 &= t_7 + t_3t_6 + t_4t_5 + t_5t_4 + t_6t_3 + t_7 = 132,
\end{aligned}$$

atd. (Všimněte si, že na obrázku byla všechna dělení šestiúhelníka.)

Mohli jsme postupovat ještě jiným způsobem: Označme v_{ik} počet všech dělení, která obsahují úhlopříčku A_iA_k*). Sečteme-li všechna čísla v_{ik} (pro všechny úhlopříčky), dostaneme vzhledem k tomu, že v každém dělení je obsaženo právě $(p + 1) - 3 = p - 2$ úhlopří-

---

*) Tj. A_iA_k je stranou některého z trojúhelníků vzniklých dělením.

ček, $(p - 2)$-násobek počtu všech dělení, tedy číslo $(p - 2)\, t_{p+1}$. Pro každé $3 \leqq k \leqq p$ je $v_{1k} = t_k t_{p-k+3}$, neboť úhlopříčka A_1A_k rozděluje $(p + 1)$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{p+1}$ na k-úhelník $A_1A_2 \ldots A_k$ a na $(p - k + 3)$-úhelník $A_kA_{k+1} \ldots A_{p+1}\, A_1$. Součet všech čísel v_{1k} (pro všechny úhlopříčky vycházející z vrcholu A_1) je tedy

$$v_{13} + v_{14} + \ldots + v_{1,p-1} + v_{1p} =$$
$$= t_3t_p + t_4t_{p-1} + \ldots + t_{p-1}t_4 + t_pt_3\,.$$

Stejně vyjde součet i pro úhlopříčky vycházející z ostatních vrcholů. Součet všech čísel v_{ik} (pro všechny úhlopříčky) bude tedy (s přihlédnutím k tomu, že každá úhlopříčka spojuje dva vrcholy) roven

$$\frac{p+1}{2}\,(t_3t_p + t_4t_{p-1} + \ldots + t_{p-1}t_4 + t_pt_3)\,.$$

Posloupnost $\{t_n\}$ je tedy definována také předpisem

$$t_3 = 1,$$

$$t_{p+1} = \frac{p+1}{2(p-2)}\,(t_3t_p + t_4t_{p-1} + \ldots + t_pt_3) \quad \text{pro} \quad p \geqq 3.$$

Porovnáme-li obě rekurentní definice téže posloupnosti $\{t_n\}$, zjistíme, že pro každé přirozené $n > 3$ je

$$t_n = \frac{n}{2(n-3)}\,(t_3t_{n-1} + t_4t_{n-2} + \ldots + t_{n-1}t_3) =$$
$$= \frac{n}{2(n-3)}\,(t_{n+1} - 2t_n)$$

a odtud

$$t_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n}\,t_n\,.$$

Poslední vztah platí i pro $n = 3$ (neboť $t_4 = 2$) a spolu s podmínkou $t_3 = 1$ je další rekurentní definicí posloupnosti $\{t_n\}$. Ta je podstatně jednodušší než obě definice předcházející a nadto umožňuje snadno odvodit vyjádření n-tého členu t_n pomocí jeho indexu n, totiž

$$t_n = 2^{n-2} \frac{1 . 3 . 5 \ldots (2n - 5)}{(n - 1)!}.$$

To lze dokázat metodou matematické indukce a dále pak upravit na elegantnější tvar, např.

$$t_n = \frac{1}{2n - 3} \binom{2n - 3}{n - 2}.$$

Cvičení

1. Udejte řešení úlohy 11 pro $n = 4$.
2. Sestrojte těžiště daného šestiúhelníka.
3. Těžištěm úsečky je její střed. Uvědomte si, jak to zapadá do rekurentní definice těžiště n-úhelníka.
4. Je dán $(n + 1)$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$. Označme O_1 těžiště n-úhelníka $A_2A_3 \ldots A_{n+1}$, O_2 těžiště n-úhelníka $A_1A_3 \ldots \ldots A_{n+1}$, $\ldots$, O_{n+1} těžiště n-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_n$. Dokažte, že $(n + 1)$-úhelníky $A_1A_2 \ldots A_{n+1}$, $O_1O_2 \ldots O_{n+1}$ jsou podobné.
5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí pro členy Fibonacciovy posloupnosti $\{f_n\}$ definované v úloze 13
   a) $f_nf_{n+1} = f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2$,
   b) $f_{n+1}^2 - f_nf_{n+2} = (-1)^n$.
6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí pro n-tý člen Fibonacciovy posloupnosti

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

7. Vyřešte cvičení 5b) pomocí výsledku cvičení 6.
8. Určete, kolik existuje různých vlajek složených z n vodorovných stejně širokých červených a bílých pruhů tak, že žádné dva bílé pruhy nejsou vedle sebe.
9. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí pro členy Fibonacciovy posloupnosti $\{f_n\}$ vyjádření

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots + \binom{n-m-1}{m},$$

kde $m = \dfrac{n-1}{2}$ pro lichá n a $m = \dfrac{n}{2} - 1$ pro sudá n.

Jak to souvisí se cvičením 8?
10. Je dána úsečka AB a přímka $a \parallel AB$. Sestrojte jen pomocí pravítka na úsečce AB bod C tak, aby $AC : BC = 1 : 4$.
11. V úloze 14 jsme sestrojili bod C_n, který dělil úsečku AB v poměru $AC_n : BC_n = 1 : n$. Sestrojte ještě $n - 1$ dalších bodů této úsečky tak, aby ji spolu s bodem C_n rozdělovaly na $n + 1$ stejných částí. Použijte přitom jen pravítka a dané rovnoběžky s úsečkou AB.
12. Rozdělte danou úsečku AB na čtyři stejné díly pomocí pravítka a dané rovnoběžky s úsečkou AB.
13. Spočtěte $\sqrt{2}$ na čtyři desetinná místa pomocí posloupnosti $\{x_n\}$ definované v úloze 15.
14. Všimněte si, že pokud A, a jsou kladná racionální čísla, jsou všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ z úlohy 15 racionální čísla, zatímco její limita může být číslo iracionální.
15. Buď $a > 0$. Uvažujme funkci $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ v intervalu $(0, +\infty)$. Dokažte, že pro členy posloupnosti $\{x_n\}$ z úlohy 15 platí

$$x_{n+1} = f(f(\ldots(f(A))\ldots))$$

(vpravo je n-krát složená funkce f).

16. Dokažte, že pro členy posloupnosti $\{x_n\}$ z úlohy 15 platí

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{A - \sqrt{a}}{A + \sqrt{a}}\right)^{2^n}.$$

Odvoďte odtud, že $\{x_{n+1}\}$ je omezená a nerostoucí posloupnost konvergující k limitě $\sqrt{a}$.

17. Jsou dána kladná čísla a, A. Posloupnost $\{y_n\}$ je rekurentně definována předpisem

$$y_1 = A\,,$$
$$y_{p+1} = \frac{1}{3}\left(2y_p + \frac{a}{y_p^2}\right) \text{ pro všechna přirozená } p.$$

Dokažte, že posloupnost $\{y_n\}$ konverguje k limitě $\sqrt[3]{a}$.

18. Spočtěte $\sqrt[3]{2}$ na čtyři desetinná místa podle předcházejícího cvičení.

19. Určete, kde se při řešení úlohy 16 využilo předpokladu o konvexnosti n-úhelníka.

20. Spočtěte číslo t_{10} z úlohy 16 pomocí všech čtyř definic a porovnejte jejich výhodnost pro praktický výpočet.

21. Na kružnici je dáno $2n$ navzájem různých bodů. Určete, kolika způsoby je lze po dvou pospojovat n tětivami tak, aby se uvnitř kružnice neprotínaly.