VÝSLEDKY A ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH ÚLOH

P.1.

Budiž $\alpha < 0$. Pak je $\beta = 1 - \alpha > 1$; píšeme-li v (P.1) β místo α a $\frac{1}{t}$ místo t ($t > 0$), máme *platnou* nerovnost

$$\left(\frac{1}{t}\right)^{1-\alpha} - (1-\alpha)\frac{1}{t} + (1-\alpha) - 1 \geqq 0 .$$

Po úpravě (vynásobení této nerovnosti číslem $t > 0$) dostáváme nerovnost (P.1) pro $\alpha < 0$.

Budiž $0 < \alpha < 1$. Pak je $\beta = \frac{1}{\alpha} > 1$; píšeme-li v (P.1) β místo α a $t^{1/\beta}$ místo t, máme *platnou* nerovnost

$$(t^{1/\beta})^\beta - \beta t^{1/\beta} + \beta - 1 \geqq 0 .$$

Po úpravě (vynásobení této nerovnosti číslem $-\alpha < 0$) dostáváme nerovnost (P.2).

I.1.

Nechť platí (I.12). Utvořme z vektoru $\mathbf{x}$ nový vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tak, že číslo x_1 nahradíme číslem $y_1 = g$ a číslo x_n nahradíme číslem $y_n = (x_1 x_n)/g$; ostatní složky ponecháme beze změny: $y_i = x_i$, $i = 2, 3, \ldots, n - 1$. Geometrický průměr se *nezmění*:

$$G_n(\mathbf{y}) = G_n(\mathbf{x}) = g ,$$

zatímco pro aritmetický průměr platí

$$(*) \qquad A_n(\mathbf{y}) \leqq A_n(\mathbf{x}) .$$

Je totiž (podle věty I.1) $x_1 \leqq g \leqq x_n$ čili $x_n - g \geqq 0$ a $g - x_1 \geqq 0$; a odtud máme

$$0 \leqq \frac{1}{g}(x_n - g)(g - x_1) = x_1 + x_n - g - \frac{x_1 x_n}{g} =$$
$$= x_1 + x_n - y_1 - y_n$$

čili $x_1 + x_n \geqq y_1 + y_n$. Odtud už plyne nerovnost (*). Opakujeme-li tento postup (tj. sestrojíme-li k vektoru $\mathbf{y}$ analogickým způsobem vektor $\mathbf{z}$ atd.), dojdeme — podobně jako u čtvrtého důkazu nerovnosti (AG) — k vektoru $\mathbf{w} = (g, g, \ldots, g)$; přitom bude

$$A_n(\mathbf{x}) \geqq A_n(\mathbf{y}) \geqq \ldots \geqq A_n(\mathbf{w}) = g = G_n(\mathbf{x}) ,$$

což je nerovnost (AG).

I.2.

Označme $2p$ daný obvod trojúhelníka, a, b, c délky jeho neznámých stran. Podle Heronova vzorce je obsah trojúhelníka dán výrazem

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} .$$

Užijeme-li nerovnosti (AG) pro $n = 3$, $x_1 = p - a$, $x_2 = p - b$ a $x_3 = p - c$, bude

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leqq \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} =$$
$$= \frac{3p - (a+b+c)}{3} = \frac{p}{3}$$

čili

$$(*) \qquad (p-a)(p-b)(p-c) \leqq \frac{p^3}{27} .$$

Číslo P bude největší tehdy, bude-li největší číslo $(p - a) . .(p - b)(p - c)$. To je odhadnuto shora v (*), současně však nastane podle věty I.1 v (*) rovnost právě pro $p - a = p - - b = p - c$ čili pro $a = b = c \left(= \frac{2p}{3}\right)$, takže maxima bude dosaženo v případě, že trojúhelník je rovnostranný

I.3.

Především lze snadno zobecnit (I.40): jsou-li $\boldsymbol{x}_{(1)}, \boldsymbol{x}_{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{(m)}$ vektory o n složkách, $\boldsymbol{x}_{(i)} \geqq 0$, pak platí

$$(*) \qquad G_n(\boldsymbol{x}_{(1)} + \boldsymbol{x}_{(2)} + \ldots + \boldsymbol{x}_{(m)}) \geqq \geqq G_n(\boldsymbol{x}_{(1)}) + G_n(\boldsymbol{x}_{(2)}) + \ldots + G_n(\boldsymbol{x}_{(m)})$$

(dokažte to indukcí podle m!). Nerovnost (I.51) je pak už jen speciálním případem nerovnosti (*): stačí volit $n = 2$ a $\boldsymbol{x}_{(i)} = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Nerovnost (I.52) je vhodné zapsat ve tvaru

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)}{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)};$$

tuto nerovnost pak můžeme dokázat indukcí podle m. Případ $m = 2$ lze dokázat přímo ověřením (je to poněkud pracnější), dále postupujeme takto: Především je

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} + \frac{x_{m+1} y_{m+1}}{x_{m+1} + y_{m+1}}.$$

Použijeme indukčního předpokladu a první sčítaneo vpravo odhadneme podle (**) (pro m); bude pak

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \leqq \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)}{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right)} + \frac{x_{m+1} y_{m+1}}{x_{m+1} + y_{m+1}} .$$

A nyní použijeme nerovnosti (**) pro $m = 2$, kde ovšem volíme za x_1 výraz $\sum_{k=1}^{m} x_k$, za x_2 číslo x_{m+1}, za y_1 výraz $\sum_{k=1}^{m} y_k$ a za y_2 číslo y_{m+1}, a dostaneme (**) pro $m + 1$.

I.4.

Tato úloha byla zařazena do III. kola MO v roce 1973 a účastníci tohoto kola ji řešili různým způsobem. Jednou z možností (nikoliv nejelegantnější) je použití indukce.

I.5.

Také tuto úlohu je možno řešit přímo např. pomocí indukce. Lze však také použít vztahu (I.8) a výsledku úlohy I.4: Z nerovnosti (I.55) plyne, že

$$\log (x_{k-1} x_{k+1}) = \log x_{k-1} + \log x_{k+1} \geqq 2 \log x_k .$$

Označíme-li $\log x_k$ jako y_k, je to nerovnost (I.53) pro posloupnost $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, a je tedy podle (I.54)

$$\frac{\log x_1 + \ldots + \log x_{n-1}}{n - 1} + \frac{\log x_1 + \ldots + \log x_{n+1}}{n + 1} \geqq$$

$$\geqq 2 \frac{\log x_1 + \ldots + \log x_n}{n}$$

čili podle (I.8)

$$\log G_{n-1} + \log G_{n+1} \geqq 2 \log G_n$$

neboli

$$\log G_{n-1} G_{n+1} \geqq \log G_n^2 ;$$

odtud už plyne (I.56).

I.6, I.7, I.8

Použijeme nerovnosti (AG) pro $n = 2$ [neboli nerovnosti (I.18)]: v první úloze pro $x_1 = \operatorname{tg} \alpha$, $x_2 = \operatorname{cotg} \alpha$, ve druhé třikrát pro dvojice (a, b), (b, c) a (c, a), ve třetí pro dvojici $\left(\frac{a}{t^2}, bt^2\right)$. V I.7 nastane rovnost pro $a = b = c$, v I.8 pro $t = \pm \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

I.9

Nerovnost můžeme po úpravě zapsat ve tvaru

$$\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{a_2}{a_2 + b_2} \cdot \frac{a_3}{a_3 + b_3}} + \\ + \sqrt[3]{\frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot \frac{b_2}{a_2 + b_2} \cdot \frac{b_3}{a_3 + b_3}} \leqq 1 \,;$$

poslední nerovnost dokážeme tím, že na oba sčítance na levé straně použijeme nerovnosti (AG) pro $n = 3$.

I.10

Použijeme nerovnosti (AG) pro vektor $\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{x_n}{x_1}\right)$.

I.11

Použijeme nerovnosti (AG) pro vektor $(1, 2, 3, \ldots, n)$ a vzorce

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}\, n(n + 1)\,.$$

I.12

Je to v obou případech čtverec. Použijeme nerovnosti (AG) pro $n = 2$.

I.13

Je to čtverec. Použijeme nerovnosti (AG) pro $n = 2$, nejlépe ve tvaru (I.17).

I.14

Je to rovnostranný trojúhelník; viz úlohu I.2.

I.15

Nerovnost (I.57) obsahuje jako speciální případ nerovnost (I.42): tu dostaneme, volíme-li $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$. Pokuste se proto nerovnost (I.57) dokázat pomocí věty I.3 úpravou postupu, jímž jsme z této věty odvodili nerovnost (I.42).

II.1

Za $\boldsymbol{y}$ zvolte $\boldsymbol{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

II.2

Užijte (II.8) pro $n = 3$ a $\boldsymbol{x} = (1, a, a^2)$. Rovnost nastane jen pro $a = 1$.

II.3

Užijte (II.1) pro $n = 3$ a vektory $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{y} = (y, z, x)$. Při důkazu nerovnosti (I.48) použijte toho, že — opět podle (II.1) nebo (II.2) pro $n = 3$ a pro vektory $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{y} = \left(\sqrt{yz}, \sqrt{xz}, \sqrt{xy}\right)$ — je

$$x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy} \leq \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(yz + xz + xy)}\,.$$

II.4

Využijte toho, že $x_k y_k = (x_k \sqrt{a_k}) \left(y_k \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)$, a použijte Cauchyovy nerovnosti pro vektory $\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{a}}$ a $\mathbf{y}\frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}}}$ (viz označení na str. 14).

II.5

Využijte toho, že $x_k = \left(\frac{x_k}{\sqrt{y_k}} \right) \sqrt{y_k}$, a použijte Cauchyovy nerovnosti pro vektory $\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{y}}}, \sqrt{\mathbf{y}}$.

II.6

Užijeme Cauchyovy nerovnosti: nejprve pro dvojici vektorů $\mathbf{x}.\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$ a pak pro dvojici vektorů $\mathbf{x}^2$ a $\mathbf{y}^2$.

II.7

Užijeme Cauchyovy nerovnosti (II.1): nejprve pro dvojici vektorů $\mathbf{w}.\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}.\mathbf{z}$ a pak ještě dvakrát pro dvojice $\mathbf{w}^2$, $\mathbf{x}^2$ a $\mathbf{y}^2$, $\mathbf{z}^2$.

II.8

Použijeme věty I.3, kde položíme $a_k = x_k$, $b_k = y_k$, $m = \frac{m(\mathbf{y})}{M(\mathbf{x})}$, $M = \frac{M(\mathbf{y})}{m(\mathbf{x})}$. Nerovnost, která tak vznikne z nerovnosti (I.43), sečteme se zřejmou nerovností

$$0 \leq \left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2} - \sqrt{\frac{m(\mathbf{y})}{M(\mathbf{x})} \cdot \frac{M(\mathbf{y})}{m(\mathbf{x})} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)} \right]^2$$

a po úpravě dostaneme (II.17).

II.9

V tomto případě je pravá strana v (II.26) rovna nule, kdežto na levé straně je nezáporné číslo.

II.10

Pro $n = 1$ je (II.30) ekvivalentní s nerovností $(x_0y_1 - x_1y_0)^2 < < 0$, která neplatí. — Uvažujme $n = 2$. Pro dvojici $\bar{x} = (0,1,0)$, $\bar{y} = (0,0,1)$ platí (II.29) i (II.30); pro dvojici $\bar{x} = (1,1,\varepsilon)$, $\bar{y} = (1,\varepsilon,1)$, kde je $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{3}$, platí jen (II.29). Pro $n > 2$ viz poznámku II.7.

II.11

První nerovnost v (II.33) plyne z nerovnosti (II.13) v úloze II.5: stačí tam zvolit x_ky_k místo x_k a $x_k^2 + y_k^2$ místo y_k. Druhou nerovnost dostaneme z nerovnosti (I.52): stačí se uvědomit, že $\dfrac{x_k^2y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} = \dfrac{1}{2} H_2(x_k^2, y_k^2)$, kde H_2 je harmonický průměr.

III.1

Je $\left|\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_ky_k|$; pravou stranu odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti (III.6), kterou ovšem použijeme pro vektory $(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$, $(|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|)$. Znaménko nerovnosti v (III.11) nelze pro $p < 1$ obrátit, neboť např. pro $n = 2$, $\mathbf{x} = (1, \mathrm{i})$, $\mathbf{y} = (1, \mathrm{i})$ je $\left|\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right| = 0$, kdežto $\sum_{k=1}^{2} |x_k|^p = \sum_{k=1}^{2} |y_k|^q = 2$. Z nerovnosti (III.9) lze ovšem za jistých předpokladů odvodit nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} |x_ky_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} . \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} .$$

III.2

Případ $p = 1$ je zřejmý; pro $p > 1$ použijeme (III.11), kde položíme $n = 2$, $\mathbf{x} = (u, v)$ a $\mathbf{y} = (1, 1)$.

III.6

Případ $p = 1$ je zřejmý. Pro $p > 1$ využijeme toho, že

$$x_k = \frac{x_k}{y_k^{(p-1)/p}} \cdot y_k^{(p-1)/p},$$

a použijeme nerovnosti (III.12), kde ovšem zvolíme $x_k y_k^{(1-p)/p}$ místo x_k a $y_k^{(p-1)/p}$ místo y_k.

III.7

Zaměníme-li v (III.14) role vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ a píšeme-li tam r místo p ($r > 1$!), dostaneme platnou nerovnost

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^r}{x_k^{r-1}} \geqq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^r}{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{r-1}}.$$

Budiž nyní $p < 0$ a označme $r = 1 - p$. Pak je $r > 1$ a $r - 1 = -p$ a nerovnost (III.14) (pro $p < 0$!) plyne ihned z (*). Nerovnost (III.14) lze ovšem také pro $p < 0$ dokázat stejně jako v úloze III.6, neboť jsme použili nerovnosti (III.12), a ta platí i pro $p < 0$ (viz str. 76). Je-li $0 < p < 1$, postupujeme opět zcela stejně jako v úloze III.6; použijeme jen nerovnosti (III.12a).

III.8

Platí-li (III.25) pro $n = 2$, je

$$(*) \qquad a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta \leqq (a_1 + a_2)^\alpha (b_1 + b_2)^\beta .$$

Pak je

$$a_1^\alpha b_1^\beta + a_2^\alpha b_2^\beta + a_3^\alpha b_3^\beta \leqq$$
$$\leqq (a_1 + a_2)^\alpha (b_1 + b_2)^\beta + a_3^\alpha b_3^\beta \leqq$$
$$\leqq [(a_1 + a_2) + a_3]^\alpha [(b_1 + b_2) + b_3]^\beta ,$$

což je (III.25) pro $n = 3$; přitom jsme použili dvakrát nerovnosti (*) — nejprve přímo, a pak tak, že jsme kladi $a_1 + a_2$ místo a_1 a a_3 místo a_2 a analogicky pro b_i. Indukční krok od n k $n + 1$ se provede podobně. Zbývá tedy dokázat, že (*) skutečně platí. Tuto nerovnost zapíšeme takto:

$$\left(\frac{a_1}{a_1 + a_2}\right)^\alpha \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right)^\beta + \left(\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right)^\alpha \left(\frac{b_2}{b_1 + b_2}\right)^\beta \leqq 1 ;$$

platnost posledního vztahu dokážeme dvojím použitím věty III.1. Stačí totiž v (III.2) položit $\frac{1}{p} = \alpha, \frac{1}{q} = \beta$ a $x_1 = \frac{a_i}{a_1 + a_2}$, $x_2 = \frac{b_i}{b_1 + b_2}$ $(i = 1, 2)$.

III.9

Po úpravě můžeme (III.31) zapsat takto:

$$G_n(\mathbf{1} + \mathbf{x}) \geqq 1 + G_n(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{1}) + G_n(\mathbf{x}) ;$$

tato nerovnost plyne z (I.40), volíme-li tam $\mathbf{y} = (1, 1, \ldots, 1)$.

III.10

Nerovnost (III.9) lze zobecnit jen tehdy, učiníme-li některé speciální předpoklady. Tak např. platí

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k z_k \geqq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} z_k^r\right)^{1/r} ,$$

je-li $\mathbf{x} > 0$, $\mathbf{y} > 0$, $\mathbf{z} > 0$, $0 < p < 1$, $q < 0$, $r < 0$ a $\frac{1}{p} +$

$+ \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = 1$. Nerovnost (*) lze dokázat takto: Označme $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{s}$, $s < 0$, a použijme nerovnosti (III.9) pro dvojici vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}.\boldsymbol{z}$ a pro dvojici parametrů p a s; bude pak

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k y_k z_k \geqq (\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} (\sum_{k=1}^{n} (y_k z_k)^s)^{1/s}.$$

Dále označme $p^* = \dfrac{q}{s}$, $q^* = \dfrac{r}{s}$; je $p^* > 1$, $q^* > 1$ a $\dfrac{1}{p^*} + \dfrac{1}{q^*} = 1$ a můžeme použít Hölderovy nerovnosti (III.6) pro dvojici vektorů $\boldsymbol{y}^s$, $\boldsymbol{z}^s$ a pro dvojici parametrů p^* a q^*:

$$(***) \qquad \sum_{k=1}^{n} y_k^s z_k^s \leqq (\sum_{k=1}^{n} y_k^{sp*})^{1/p*} (\sum_{k=1}^{n} z_k^{sq*})^{1/q*} =$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} y_k^q)^{s/q} (\sum_{k=1}^{n} z_k^r)^{s/r}.$$

Protože je $s < 0$ a tedy i $\dfrac{1}{s} < 0$, plyne odtud

$$(\sum_{k=1}^{n} y_k^s z_k^s)^{1/s} \geqq (\sum_{k=1}^{n} y_k^q)^{1/q} (\sum_{k=1}^{n} z_k^r)^{1/r};$$

z této nerovnosti a z nerovnosti (**) už plyne (*). — Je-li opět $0 < p < 1$, ale $q > 0$ a $r < 0$, nemůžeme tohoto postupu použít, protože místo (III.6) musíme použít (III.9) (je totiž $p^* < 0$, $q^* > 0$) a místo (***) dostáváme obrácenou nerovnost. Lze však ukázat, že v tomto druhém případě nerovnost (*) ani nemůže obecně platit a že neplatí ani nerovnost obrácená: stačí zvolit $n = 2$, $p = \dfrac{1}{2}$, $q = 1$, $r = -\dfrac{1}{2}$, $\boldsymbol{y} = (1, 4)$, $\boldsymbol{z} = (1, 1)$. Volíme-li nyní $\boldsymbol{x} = (1, 4)$, dostáváme nerovnost (*), volíme-li $x = \left(1, \frac{1}{4}\right)$, dostáváme obrácenou nerovnost.

III.11

Pro $n = 2$ má nerovnost (III.32) tvar

$$(*) \quad [(x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p]^{1/p} \leqq (x_1^p + x_2^p)^{1/p} + (y_1^p + y_2^p)^{1/p} .$$

K případu $n = 3$ přejdeme takto:

$$L_3 = \{(x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p + (x_3 + y_3)^p\}^{1/p} =$$
$$= \{([(x_1 + y_1)^p + (x_2 + y_2)^p]^{1/p})^p + (x_3 + y_3)^p\}^{1/p} .$$

Výraz v hranaté závorce odhadneme podle (*); bude pak

$$L_3 \leqq \{((x_1^p + x_2^p)^{1/p} + (y_1^p + y_2^p)^{1/p})^p + (x_3 + y_3)^p\}^{1/p} .$$

Zde odhadneme pravou stranu opět podle (*), kde však položíme $(x_1^p + x_2^p)^{1/p}$ místo x_1, $(y_1^p + y_2^p)^{1/p}$ místo y_1 a x_3, y_3 místo x_2, y_2. Dostaneme pak

$$L_3 \leqq [((x_1^p + x_2^p)^{1/p})^p + x_3^p]^{1/p} + [((y_1^p + y_2^p)^{1/p})^p + y_3^p]^{1/p} =$$
$$= (x_1^p + x_2^p + x_3^p)^{1/p} + (y_1^p + y_2^p + y_3^p)^{1/p} ,$$

což je (III.32) pro $n = 3$.

III.12

Je $\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^p$; pravou stranu odhadneme pomocí Minkowského nerovnosti (III.32), kterou ovšem použijeme pro vektory $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$, $(|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|)$.

III.13

Můžeme postupovat indukcí podle počtu vektorů. Pro tři vektory rozšíříme Minkowského nerovnost pomocí téže nerovnosti pro dva vektory — ve tvaru (III.35) — takto: Je $(\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z})^p = [(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}]^p$ a tedy pro $p > 1$

$$[A_n([\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}]^p)]^{1/p} = [A_n([(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}]^p)]^{1/p} \leqq$$
$$\leqq [A_n([\mathbf{x} + \mathbf{y}]^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{z}^p)]^{1/p} \leqq$$
$$\leqq [A_n(\mathbf{x}^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{y}^p)]^{1/p} + [A_n(\mathbf{z}^p)]^{1/p} .$$

III.14

Protože $S_n(\mathbf{x}^p) = n . A_n(\mathbf{x}^p)$, stačí použít výsledků poznámky III.8.

III.15

Využijeme toho, že $S_n(\mathbf{y}) = nA_n(\mathbf{y})$, a postupujeme stejně jako při důkazu věty III.6.

III.16

Nerovnost (III.46) dokážeme takto: Sčítance (zlomky) na pravé straně označíme a^p a b^p a vyjádříme $S_n(\mathbf{xz})$ resp. $S_n(\mathbf{yz})$ pomocí a resp. b. Pak bude

$$[S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z})]^p = [a(S_n(\mathbf{x}^{p-1}))^{1/p} + b(S_n(\mathbf{y}^{p-1}))^{1/p}]^p ;$$

pravou stranu odhadneme pomocí Hölderovy nerovnosti (pro $n = 2$!) a dostaneme

$$[S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z})]^p \leqq (a^p + b^p)[(S_n(\mathbf{x}^{p-1}))^{1/(p-1)} +$$
$$+ (S_n(\mathbf{y}^{p-1}))^{1/(p-1)}]^{p-1} .$$

Výraz v hranaté závorce vpravo odhadneme pomocí Minkowského nerovnosti *shora* (užijeme totiž Minkowského nerovnosti pro $p - 1$!) výrazem $S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})^{p-1})$ a dostaneme (III.46). Zde bylo podstatné, že je $0 < p - 1 \leqq 1$ čili $1 < p \leq 2$!

Nyní už stačí zvolit v (III.46) za $\mathbf{z}$ ten vektor s vlastností $S_n(\mathbf{z}^q) = 1$, který je podle úlohy III.15 přiřazen vektoru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, a užít nerovnosti (III.45); levá strana se díky volbě vektoru $\mathbf{z}$ nezmění, neboť $[S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z})]^p = S_n((\mathbf{x} + \mathbf{y})^p)$, pravá strana se nezmenší, neboť $[S_n(\mathbf{x}.\mathbf{z})]^p \leqq S_n(\mathbf{x}^p)$, $[S_n(\mathbf{y}.\mathbf{z})]^p \leqq S_n(\mathbf{y}^p)$ a dostáváme tak ihned (III.47).

III.17

Užijeme jednak nerovnosti (III.43) pro p, jednak nerovnosti (III.44) pro $p - 1$ (je $p \leqq 2$ a tedy $p - 1 \leqq 1$!). Nerovnosti (III.47) a (III.48) dávají pro $1 \leqq p \leqq 2$ horní a dolní odhad výrazu $\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p / \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{p-1}$.

III.18

Postupujeme stejně jako v úloze III.16. Nejprve ukážeme, že také v nerovnosti (III.46) se změní znaménko; přitom použijeme Hölderovy nerovnosti pro $n = 2$ a pro $p \leqq 1$, tj. musíme užít tvaru (III.12a). Pak dokážeme — opět použitím obrácené Hölderovy nerovnosti — stejně jako v úloze III.15, že také v nerovnosti (III.45) se pro $0 < p \leqq 1$ změní znaménko nerovnosti, a důkaz dokončíme jako v úloze III.16 speciální volbou vektoru $\mathbf{z}$.

III.19

Především je třeba si uvědomit, že pro $p = 2$ má nerovnost (III.50) tvar

$$(*) \qquad x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \geqq \sqrt{x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2},$$

kdežto ve větě II.2 jsme dokázali nerovnost

$$(**) \qquad (x_0 y_0 - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \geqq (x_0^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2)(y_0^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2) .$$

Je ihned vidět, že když bude splněna jen jedna z podmínek (III.49) (pro $p = 2$), nemusí mít nerovnost (*) vůbec smysl, neboť na pravé straně může být komplexní číslo. Požadavek (III.55) je tedy pro platnost nerovnosti (*) — a tím i nerovnosti (III.50) — podstatný; nerovnost (**) je naproti tomu splněna automaticky, je-li jedna z nerovností v (III.49) obrácená.

III.20

Můžeme postupovat analogicky jako při důkazu nerovnosti (III.50), tj. dokázat (III.57) pro $n = 1$ pomocí Minkowského nerovnosti (III.32) a odtud pak dokázat (III.57) pro libovolné přirozené $n > 1$. Zde však uvedeme důkaz, který využívá nerovnosti (III.50) a je obdobou důkazu Minkowského nerovnosti (III.32) (viz str. 88): Užijeme toho, že pro $p > 1$ je

$$(x_0 + y_0)^p - \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p =$$

$$= [x_0(x_0 + y_0)^{p-1} - \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k + y_k)^{p-1}] +$$

$$+ [y_0(x_0 + y_0)^{p-1} - \sum_{k=1}^{n} y_k(x_k + y_k)^{p-1}] .$$

Oba výrazy v hranatých závorkách odhadneme pomocí (III.50), kde ovšem pro první výraz volíme místo vektoru $\bar{y}$ vektor $\bar{z} = (\bar{x} + \bar{y})^{p-1}$ a pro druhý výraz pak volíme místo vektoru $\bar{x}$ vektor $\bar{y}$ a místo vektoru $\bar{y}$ vektor $\bar{z}$; dostaneme tak nerovnost

$$(*) \qquad (x_0 + y_0)^p - \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \geqq$$

$$\geqq [(x_0^p - \sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} + (y_0^p - \sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p}] \, .$$

$$. [(x_0 + y_0)^p - \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p]^{(p-1)/p} \, .$$

Musíme ovšem ukázat, že jsou splněny předpoklady (III.55) pro odpovídající vektory. Pro vektory $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ to plyne z podmínek (III.56), pro vektor $\tilde{z}$ to ukážeme pomocí Minkowského nerovnosti (III.32) a pomocí podmínek (III.56):

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p \leqq [(\sum_{k=1}^{n} x_k^p)^{1/p} + (\sum_{k=1}^{n} y_k^p)^{1/p}]^p \leqq (x_0 + y_0)^p.$$

Druhý součinitel v (*) je tedy *nezáporný*. Je-li *kladný*, plyne (III.57) z (*) ekvivalentní úpravou; je-li *nulový*, musí být $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ (věta III.5) a v (III.56) musí platit rovnosti a tudíž (III.57) zřejmě platí. — Rovnost v (III.57) nastane tehdy a jen tehdy, je-li $\tilde{x} \sim \tilde{y}$. — Je-li $p = 1$, platí (III.57) pro libovolné nezáporné vektory $\tilde{x}$, $\tilde{y}$.

III.21

Nerovnost (III.57) v tomto případě nemá smysl, neboť na pravé straně stojí komplexní číslo.