Kapitola I.

ARITMETICKÝ, GEOMETRICKÝ A HARMONICKÝ PRŮMĚR

Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Označme

$$(\text{I.1}) \qquad A_n(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

tzv. *aritmetický průměr* čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$; dále označme pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$

$$(\text{I.2}) \qquad G_n(\mathbf{x}) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

tzv. *geometrický průměr* čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a konečně označme pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$(\text{I.3}) \qquad H_n(\mathbf{x}) = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$$

tzv. *harmonický průměr* čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je ihned vidět, že pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ je $A_n(\mathbf{x}) > 0$ a

$$(\text{I.4}) \qquad H_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{A_n(\mathbf{x})}$$

čili

$$(\text{I.5}) \qquad H_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right).A_n(\mathbf{x}) = H_n(\mathbf{x}).A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) = 1$$

pro každé $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Dále je zřejmé, že pro

$$(\mathrm{I}.6) \qquad x_1 = x_2 = \ldots = x_n = a > 0$$

je

$$(\mathrm{I}.7) \qquad A_n(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{x}) = H_n(\mathbf{x}) = a\,.$$

Označíme-li dále pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ $\log \mathbf{x} = (\log x_1, \log x_2, \ldots, \log x_n)$, je z definice aritmetického a geometrického průměru vidět, že

$$(\mathrm{I}.8) \qquad \log G_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\,(\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n) = = A_n(\log \mathbf{x})\,.$$

Pomocí tohoto vzorce lze řadu vlastností geometrického průměru odvodit z vlastností aritmetického průměru. Označíme-li $\mathrm{e}^{\mathbf{x}} = (\mathrm{e}^{x_1}, \mathrm{e}^{x_2}, \ldots, \mathrm{e}^{x_n})$, platí tento vzorec, který je „inverzní" ke vzorci (I.8):

$$(\mathrm{I}.9) \qquad G_n(\mathrm{e}^{\mathbf{x}}) = \mathrm{e}^{A_n(\mathbf{x})}.$$

Dokážeme toto důležité tvrzení:

Věta I.1. *Nechť je* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$. *Pak je*

$$(\mathrm{I}.10) \qquad m_n(\mathbf{x}) \leqq H_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{x}) \leqq A_n(\mathbf{x}) \leqq M_n(\mathbf{x}).$$

Jsou-li alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *různá, jsou všechny nerovnosti v* (I.10) *ostré.*

Tato věta v sobě zahrnuje řadu nerovností; dokážeme je postupně. Důkaz případu

$$(\mathrm{I}.11) \qquad m_n(\mathbf{x}) \leqq H_n(\mathbf{x})$$

je snadný: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$(\mathrm{I}.12) \qquad x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n-1} \leqq x_n ,$$

přičemž je $x_1 > 0$. Pak je $m_n(\boldsymbol{x}) = x_1$ a $\frac{x_1}{x_k} \leqq 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. To znamená, že

$$x_1\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{x_1}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + \ldots + \frac{x_1}{x_n} \leqq$$

$$\leqq 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

a po vydělení této nerovnosti kladným číslem $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$ dostáváme (I.11). — Bude-li alespoň jedna z nerovností v (I.12) ostrá, bude ostrá alespoň jedna z nerovností $\frac{x_1}{x_k} \leqq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a dostaneme ostrou nerovnost $m_n(\boldsymbol{x}) < H_n(\boldsymbol{x})$. — Bude-li platit (I.6), bude $m_n(\boldsymbol{x}) = a$ a to spolu se vztahy (I.7) dává rovnost

$$m_n(\boldsymbol{x}) = H_n(\boldsymbol{x}) .$$

Stejně snadno se dokáže nerovnost

$$(\mathrm{I}.13) \qquad A_n(\boldsymbol{x}) \leqq M_n(\boldsymbol{x}) .$$

Opět totiž můžeme předpokládat, že platí (I.12); pak je $M_n(\boldsymbol{x}) = x_n$ a $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq x_n + x_n + \ldots + x_n = nM_n(\boldsymbol{x})$, odkud už (I.13) plyne. — Bude-li alespoň jedna z nerovností v (I.12) ostrá, dostaneme ostrou nerovnost $A_n(\boldsymbol{x}) < M_n(\boldsymbol{x})$, kdežto v případě (I.6) bude $M_n(\boldsymbol{x}) = A_n(\boldsymbol{x}) = a$.

Nejdůležitější z nerovností (I.10) je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem — označme ji (AG):

$$(\mathrm{AG}) \qquad G_n(\boldsymbol{x}) \leqq A_n(\boldsymbol{x}) .$$

Důkazu této nerovnosti věnujeme zvláštní odstavec; zatím však předpokládejme, že (AG) platí, a dokažme za tohoto předpokladu poslední z nerovností v (I.10), nerovnost

$$H_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{x}) . \tag{I.14}$$

Z definice geometrického průměru především plyne, že

$$G_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) = \frac{1}{G_n(\mathbf{x})} \quad \text{pro } \mathbf{x} > \mathbf{0} . \tag{I.15}$$

Nerovnost (AG) platí podle předpokladu pro každé $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, a platí tedy i pro $\frac{1}{\mathbf{x}}$, tj.

$$G_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \leqq A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) . \tag{I.16}$$

Tuto nerovnost můžeme pomocí vzorců (I.5) a (I.15) zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{G_n(\mathbf{x})} \leqq \frac{1}{H_n(\mathbf{x})}$$

a odtud už plyne (I.14). — Je-li alespoň jedna z nerovností v (I.12) ostrá, je (podle předpokladu!) ostrá i nerovnost (I.16), a tedy je pak $H_n(\mathbf{x}) < G_n(\mathbf{x})$.

Poznámka I.0. Vzorec (I.10) shrnuje celkem 10 nerovností. My jsme zde dokázali dvě přímo a jednu za předpokladu, že platí nerovnost (AG); zbývající už z těchto čtyř nerovností plynou. Řadu z těchto zbylých nerovností lze ovšem dokázat *přímo:* např. $m_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{x})$, $m_n(\mathbf{x}) \leqq A_n(\mathbf{x})$ a další. Také to, že v jistém smyslu preferujeme nerovnost (AG), není podstatné: Čtenář snadno dokáže, že nerovnost (AG) plyne z nerovnosti (I.14), a tak lze tedy dokázat (I.14) a všechno ostatní odvodit z této nerovnosti. Doporučujeme proto čtenáři, aby si rozmyslel, které z deseti nerovností obsažených v (I.10) lze dokázat přímo, bez „okliky" přes nerovnost (AG).

Důkaz nerovnosti (AG)

Existuje celá řada důkazů této nerovnosti, lišících se metodou, náročností a použitými pomocnými prostředky. Jen v knize [1] je uvedeno těchto důkazů dvanáct. Zde uvedeme zatím čtyři důkazy; jejich myšlenky lze využít i v řadě jiných úvah.

První důkaz je (pravděpodobně) i historicky nejstarší: vznikl kolem roku 1820 a jeho autorem je A. L. Cauchy (1789—1857). Tento důkaz je zajímavý mj. také tím, že využívá tzv. *regresivní* (zpětné) indukce.

Už v úvodu jsme ukázali, že platí nerovnost

$$ab \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \text{ pro všechna } a \geqq 0,\ b \geqq 0; \tag{I.17}$$

z odvození této nerovnosti je vidět, že bude ostrá, bude-li $a \neq b$. Zvolme $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ a položme v (I.17) $a = \sqrt{x_1}$, $b = \sqrt{x_2}$; pak bude

$$\sqrt{x_1 x_2} \leqq \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \tag{I.18}$$

čili

$$G_2(\boldsymbol{x}) \leqq A_2(\boldsymbol{x}),$$

přičemž nerovnost je ostrá, je-li $x_1 \neq x_2$. Budiž nyní $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) > 0$. Podle (I.18) pak je

$$\sqrt{y_1 y_2} \leqq \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \quad \text{a} \quad \sqrt{y_3 y_4} \leqq \frac{1}{2}(y_3 + y_4),$$

a tedy

$$(\mathrm{I}.19)\qquad \sqrt[4]{y_1y_2y_3y_4} = \sqrt{\sqrt{y_1y_2}\cdot\sqrt{y_3y_4}} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1}{2}(y_1+y_2)\cdot\frac{1}{2}(y_3+y_4)}\,;$$

tato nerovnost bude ostrá, bude-li $y_1 \neq y_2$ nebo $y_3 \neq y_4$. Položme dále v (I.18)

$$x_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2),\quad x_2 = \frac{1}{2}(y_3+y_4).$$

Dostaneme

$$\sqrt{\frac{1}{2}(y_1+y_2)\cdot\frac{1}{2}(y_3+y_4)} \leqq$$

$$\leqq \frac{\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{1}{2}(y_3+y_4)}{2} = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\,;$$

přitom tato nerovnost bude ostrá, bude-li $y_1 + y_2 \neq$ $\neq y_3 + y_4$, a tedy speciálně v případě, kdy je $y_1 = y_2$ a $y_3 = y_4$ (a kdy tedy v (I.19) nastává rovnost), ale kdy $y_2 \neq y_3$. Spolu s (I.19) dostáváme tak nerovnost

$$G_4(\mathbf{y}) \leqq A_4(\mathbf{y})\,,$$

která je ostrá, jsou-li alespoň dvě z čísel y_1, y_2, y_3, y_4 různá.

Stejným postupem můžeme nyní matematickou indukcí dokázat, že nerovnost (AG) platí pro $n = 2, 4, 8, 16, \ldots$, tj. pro čísla tvaru 2^k, kde k je přirozené číslo. Platí-li totiž (AG) pro $2^k = n$,

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq A_n(\mathbf{x})\,,$$

dokážeme (AG) pro $2^{k+1} = 2n$ takto: Pro $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n})$ položíme $\mathbf{u} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a $\mathbf{v} = (y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n})$. Podle indukčního předpokladu je

$$G_n(\mathbf{u}) \leqq A_n(\mathbf{u}) \quad \text{a} \quad G_n(\mathbf{v}) \leqq A_n(\mathbf{v}),$$

a tedy

$$G_{2n}(\mathbf{y}) = \sqrt{G_n(\mathbf{u}) . G_n(\mathbf{v})} \leqq \sqrt{A_n(\mathbf{u}) . A_n(\mathbf{v})}$$

a z nerovnosti (I.18), použité pro $x_1 = A_n(\mathbf{u})$ a $x_2 = A_n(\mathbf{v})$, pak plyne

$$G_{2n}(\mathbf{y}) \leqq \sqrt{A_n(\mathbf{u}) . A_n(\mathbf{v})} \leqq \frac{A_n(\mathbf{u}) + A_n(\mathbf{v})}{2} = A_{2n}(\mathbf{y}) .$$

Úvahy o tom, kdy je tato nerovnost ostrá, si čtenář provede snadno sám.

Tím jsme dokázali nerovnost (AG) pro speciální hodnoty n. Pro zbývající přirozená čísla ji dokážeme zpětnou indukcí, která tvrdí: Platí-li (AG) pro $n \geqq 2$, platí i pro $n - 1$.

Uvažujme proto pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) > \mathbf{0}$ vektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, definovaný takto:

$$y_i = x_i \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n - 1;$$

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1} .$$

Pak je též $\mathbf{y} > \mathbf{0}$; nerovnost $G_n(\mathbf{y}) \leqq A_n(\mathbf{y})$, která podle předpokladu platí, má tvar

$$\text{(I.20)} \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}} . \sqrt[n]{\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n - 1}} \leqq$$

$$\leqq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\,.$$

To můžeme zapsat též takto:

$$[G_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{(n-1)/n} . [A_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{1/n} \leqq A_{n-1}(\boldsymbol{x})\,.$$

Vynásobíme-li tuto nerovnost kladným číslem

$$[A_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{-1/n},$$

dostaneme nerovnost

$$[G_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{(n-1)/n} \leqq [A_{n-1}(\boldsymbol{x})]^{(n-1)/n},$$

odkud plyne nerovnost (AG) pro $n - 1$ umocněním. — Jsou-li alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ různá, jsou různá i alespoň dvě z čísel $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n$; nerovnost v (I.20) je pak ostrá a ostrá bude i výsledná nerovnost $G_{n-1}(\boldsymbol{x}) < A_{n-1}(\boldsymbol{x})$.

Druhý důkaz byl publikován v roce 1954 a jeho autorem je G. Ehlers: Uvažujme takové $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, že je

(I.21) $$x_1 x_2 \ldots x_n = 1$$

(tj. $[G_n(\boldsymbol{x})]^n = 1$). Pak lze nerovnost (AG) upravit na tvar

(I.22) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq n\,.$$

Dokážeme indukcí, že (I.22) platí za předpokladu (I.21).*) Především platí nerovnost (I.22) pro $n = 1$.

*) Důkaz je uveden též v 6. svazku Školy mladých matematiků *Matematická indukce* (str. 35, příklad 4).

Předpokládejme nyní, že platí pro n, a mějme vektor $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ takový, že

$$y_1 y_2 \ldots y_n y_{n+1} = 1 .$$

Mezi čísly $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ pak musí existovat dvě čísla y_i a y_j $(i \neq j)$, pro něž platí: $y_i \leqq 1$, $y_j \geqq 1$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že to jsou čísla y_1 a y_2. Je tedy $y_1 \leqq 1$ a $y_2 \geqq 1$ čili $y_1 - 1 \leqq 0$ a $y_2 - 1 \geqq 0$ čili $(y_1 - 1)(y_2 - 1) \leqq 0$. Tuto poslední nerovnost lze zapsat takto:

$$y_1 \cdot y_2 + 1 \leqq y_1 + y_2 .$$

Přičteme-li na obou stranách výrazy $y_3 + y_4 + \ldots + y_n + y_{n+1}$, dostaneme

$$\text{(I.23)} \qquad y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n + y_{n+1} \geqq \geqq 1 + y_1 y_2 + y_3 + \ldots + y_{n+1} .$$

Položme

$$x_1 = y_1 y_2, \quad x_2 = y_3, \quad x_3 = y_4, \quad \ldots, \quad x_n = y_{n+1} .$$

Pak vektor $\mathbf{x}$ splňuje podmínku (I.21), neboť

$$x_1 x_2 \ldots x_n = y_1 y_2 y_3 \ldots y_{n+1} = 1$$

a podle indukčního předpokladu pak platí (I.22), tj.

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 y_2 + y_3 + \ldots + y_{n+1} \geqq n .$$

Z nerovnosti (I.23) tedy plyne

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + y_{n+1} \geqq 1 + n ,$$

což je (I.22) pro $n + 1$. — Bude-li alespoň jedno x_i různé od 1, bude nerovnost v (I.22) ostrá, kdežto pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ platí v (I.22) rovnost.

K nerovnosti (AG) pro $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) > \mathbf{0}$ dojdeme nyní tak, že položíme

$$x_i = \frac{z_i}{G_n(\mathbf{z})}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pak je $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, a tedy

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{G_n(\mathbf{z})}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) \geqq n;$$

odtud už plyne, že $G_n(\mathbf{z}) \leqq A_n(\mathbf{z})$.

Třetí důkaz pochází od E. Jacobsthala a byl uveřejněn v roce 1951. Je sice poněkud umělý, udává však současně zajímavý vztah pro rozdíl $A_n(\mathbf{x}) - G_n(\mathbf{x})$.

Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $k = 1, 2, \ldots, n$; označme

$$\text{(I.24)} \qquad A_k = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}, \; G_k = \sqrt[k]{x_1 x_2 \ldots x_k}.$$

Je tedy $k . A_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$ a $G_k^k = x_1 x_2 \ldots x_k$ a odtud dostáváme tyto rekurentní vztahy

$$\text{(I.25)} \qquad (k + 1) A_{k+1} = k A_k + x_{k+1}, \quad G_{k+1}^{k+1} = G_k^k . x_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1 .$$

Pak je

$$A_{k+1} = \frac{k}{k+1} \cdot A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} = \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} \frac{G_{k+1}^{k+1}}{G_k^k},$$

tj.

$$\text{(I.26)} \qquad A_{k+1} = \frac{k}{k+1} A_k + \frac{G_k}{k+1} \left(\frac{G_{k+1}}{G_k} \right)^{k+1}.$$

Nyní užijeme nerovnosti (P.1) z přípravné kapitoly pro $\alpha = k + 1$; tato nerovnost má pak tvar

$$t^{k+1} \geqq (k+1)\,t - k \quad \text{pro} \quad t \geqq 0\,,$$

přičemž pro $t \neq 1$ je nerovnost ostrá. Položíme-li zde

$$t = \frac{G_{k+1}}{G_k}\,,$$

dostaneme

$$\left(\frac{G_{k+1}}{G_k}\right)^{k+1} \geqq (k+1)\frac{G_{k+1}}{G_k} - k\,,$$

což po užití v identitě (I.26) dává:

$$A_{k+1} \geqq \frac{k}{k+1}\,A_k + \frac{G_k}{k+1}\left[\frac{G_{k+1}}{G_k}\,(k+1) - k\right] =$$

$$= \frac{k}{k+1}\,A_k + G_{k+1} - \frac{k}{k+1}\,G_k$$

čili

$$(\text{I.27}) \qquad (A_{k+1} - G_{k+1}) \geqq \frac{k}{k+1}\,(A_k - G_k)\,.$$

Protože pro $k = 2$ je $A_2 \geqq G_2$, plyne z poslední nerovnosti

$$A_k \geqq G_k \quad \text{pro} \quad k = 2, 3, \ldots, n\,,$$

což pro $k = n$ je nerovnost (AG). Jsou-li alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ různá, je nerovnost (AG) ostrá: lze totiž čísla x_i uspořádat tak, aby bylo $x_1 \neq x_2$, a pak je (jak víme např. už z prvního důkazu) $A_2 > G_2$.

Z (I.27) ihned plyne

$$(A_n - G_n) \geqq \frac{p}{n}\,(A_p - G_p) \quad \text{pro} \quad n \geqq p \geqq 2\,,$$

a speciálně tedy

$$(I.28)\qquad (A_n - G_n) \geqq \frac{2}{n}(A_2 - G_2)\,.$$

Čtvrtý důkaz nebudeme provádět do všech podrobností; ty si čtenář snadno doplní. Důkaz využívá jisté zajímavé vlastnosti aritmetických a geometrických průměrů.

Budiž tedy $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a předpokládejme, že platí (I.12). Aritmetický průměr $A_n(\mathbf{x})$ označme písmenem a a utvořme z vektoru $\mathbf{x}$ nový vektor $\mathbf{y}$ takto: Prvek x_1 (nejmenší prvek v $\mathbf{x}$) nahradíme číslem a, prvek x_n (největší prvek v $\mathbf{x}$) nahradíme číslem $x_1 + x_n - a$, prvky $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ponecháme beze změny. Bude tedy $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)$, kde

$$y_1 = a, y_2 = x_2, y_3 = x_3, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1},$$
$$y_n = x_1 + x_n - a\,.$$

Zřejmě je

$$(I.29)\qquad A_n(\mathbf{y}) = A_n(\mathbf{x}) = a\,,$$

tj. aritmetický průměr se při přechodu od vektoru $\mathbf{x}$ k vektoru $\mathbf{y}$ *nezmění*. Podívejme se, jak se bude chovat geometrický průměr: Podle (I.12) je $x_1 \leqq x_i \leqq x_n$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, a tedy je

$$nx_1 = x_1 + x_1 + \ldots + x_1 \leqq$$
$$\leqq x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqq$$
$$\leqq x_n + x_n + \ldots + x_n = nx_n$$

čili $x_1 \leqq A_n(\mathbf{x}) \leqq x_n$. To znamená, že je $a - x_1 \geqq 0$ a $x_n - a \geqq 0$, čili

$$0 \leqq (a - x_1)(x_n - a) =$$
$$= a(x_1 + x_n - a) - x_1x_n = y_1y_n - x_1x_n\,.$$

Dostali jsme tak nerovnost

$$x_1x_n \leqq y_1y_n ;$$

vynásobíme-li ji kladným číslem $x_2x_3 \ldots x_{n-1} = y_2y_3 \ldots y_{n-1}$, dostaneme po odmocnění nerovnost

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{y}) , \tag{I.30}$$

tj. geometrický průměr se při přechodu od vektoru $\mathbf{x}$ k vektoru $\mathbf{y}$ *nezmenší*.

Všimněme si nyní vektoru $\mathbf{y}$. Jsou dvě možnosti: (a) číslo a je nejmenší z čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$; (b) číslo a není nejmenší z čísel $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

V případě (a) je $a \leqq y_i$ pro $i = 2, 3, \ldots, n$; uvědomíme-li si, jak jsou definována čísla y_i, dostáváme nerovnosti

(I.31)

$$a \leqq x_2 ,\ a \leqq x_3 ,\ \ldots ,\ a \leqq x_{n-1} ,\ a \leqq x_1 + x_n - a .$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$(n-1)a \leqq x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_1 + x_n - a = \\ = nA_n(\mathbf{x}) - a = (n-1)a$$

čili

$$(n-1)\, a \leqq (n-1)a .$$

Zde však nutně musí platit rovnost, a tedy musí platit rovnosti ve všech nerovnostech v (I.31):

$$a = x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x_1 + x_n - a .$$

Protože $y_1 = a$, dostáváme odtud $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-1} = a$; a protože $A_n(\mathbf{y}) = a$, plyne odtud, že také $y_n = x_1 + x_n - a = a$. Vektor $\mathbf{y}$ má tedy v případě (a) tvar

$$(a, a, a, \ldots, a, a) .$$

V případě (b) bude mezi čísly $y_2, y_3, \ldots, y_n$ existovat číslo menší než a. Poněvadž však $A_n(\mathbf{y}) = a$ [viz (I.29)], musí mezi nimi existovat i číslo větší než a (jinak by totiž bylo $a = A_n(\mathbf{y}) < \dfrac{n\,.\,a}{n} = a$, a to je spor). Uspořádáme-li tedy čísla $y_1, y_2, \ldots, y_n$ podle velikosti: $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n-1}}, y_{i_n}$, bude se číslo $a (= y_1)$ vyskytovat alespoň jednou mezi čísly $y_{i_2}, y_{i_3}, \ldots, y_{i_{n-1}}$.*)

Nyní utvořme z vektoru $\mathbf{y}$ nový vektor $\mathbf{z}$ stejným postupem jako jsme to učinili u vektoru $\mathbf{x}$: Položíme

$$z_1 = a,\ z_2 = y_{i_2},\ z_3 = y_{i_3},\ \ldots,$$
$$z_{n-1} = y_{i_{n-1}},\ z_n = y_{i_1} + y_{i_n} - a$$

(uvědomte si, že je $A_n(\mathbf{y}) = a$). Pak bude (viz (I.29) a (I.30))

$$A_n(\mathbf{z}) = a \quad \text{a} \quad G_n(\mathbf{y}) \leqq G_n(\mathbf{z})\,.$$

Mezi čísly $z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}$ se vyskytuje alespoň jedno číslo a, a protože $z_1 = a$, je číslo a ve vektoru $\mathbf{z}$ zastoupeno alespoň dvakrát. Stejně jako u vektoru $\mathbf{y}$ zjistíme, že buď má $\mathbf{z}$ tvar $(a, a, a, \ldots, a, a)$, nebo je jedno z čísel z_i $(i \geqq 2)$ menší než a, tj. platí

$$z_{j_1} < z_{j_2} \leqq z_{j_3} \leqq \ldots \leqq z_{j_{n-1}} \leqq z_{j_n}\,,$$

kde $z_{j_1} < a$ a mezi čísly $z_{j_2}, \ldots, z_{j_{n-1}}$ se číslo a vyskytuje alespoň dvakrát.

Budeme-li v tomto procesu pokračovat, dostaneme po k-tém kroku $(k < n)$ vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, v němž alespoň k čísel bude rovných a, a přitom bude platit

$$A_n(\mathbf{x}) = A_n(\mathbf{y}) = A_n(\mathbf{z}) = \ldots = A_n(\mathbf{u}) = a\,,$$
$$G_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{y}) \leqq G_n(\mathbf{z}) \leqq \ldots \leqq G_n(\mathbf{u})\,.$$

*) Dokažte, že nemůže být $y_{i_n} = a$.

Po nejvýše $n-1$ krocích dojdeme k vektoru $\mathbf{w} = (a, a, \ldots, a)$, neboť pak bude $w_1 = w_2 = \ldots = w_{n-1} = a$, a tedy také $w_n = a$. Ale $G_n(\mathbf{w}) = \sqrt[n]{a.a.\ldots.a} = \sqrt[n]{a^n} = a$, takže máme

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{w}) = a = A_n(\mathbf{x}) \, ,$$

což je nerovnost (AG).

Poznámka I.1. Důkazem nerovnosti (AG) je dokázána věta I.1 jako celek. Všimněte si, že jsme dokázali vlastně o něco více; ukázali jsme totiž, že rovnost v (I.10) platí tehdy a jen tehdy, je-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

V jistém smyslu jsou tedy nerovnosti v (I.10) přesné; v dalším však ukážeme, že existuje celá řada výrazů $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které lze vložit např. mezi $A_n(\mathbf{x})$ a $G_n(\mathbf{x})$. Tvrzení z prvního odstavce této poznámky ovšem zaručuje, že pro $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ musí být

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A_n(\mathbf{x}) = G_n(\mathbf{x}) \, .$$

Úloha I.1. Čtvrtý důkaz nerovnosti (AG) lze upravit tak, že se využívá geometrického průměru $G_n(\mathbf{x}) = g$. Proveďte to.

Uvedeme nyní několik příkladů, v nichž jednak užijeme nerovností z věty I.1, jednak odvodíme další vztahy pro průměry.

Příklad I.1. (2. ročník MO, kategorie A.) Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$. Pak platí

I.32)
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \right) \geqq n^2 \, .$$

Nerovnost (I.32) není totiž ničím jiným než upravenou nerovností mezi harmonickým a aritmetickým průměrem: Je $H_n(\boldsymbol{x}) \leqq A_n(\boldsymbol{x})$ a z (I.5) plyne

$$1 = H_n(\boldsymbol{x}) A_n\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}}\right) \leqq A_n(\boldsymbol{x}) A_n\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}}\right);$$

vynásobíme-li tuto nerovnost číslem n^2, dostáváme (I.32). — Dokonce z věty I.1 plyne, že rovnost v (I.32) nastane tehdy a jen tehdy, bude-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Příklad I.2. Budiž $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ a označme $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nA_n(\boldsymbol{x})$. Pak platí

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}. \tag{I.33}$$

Užijeme-li totiž nerovnost (AG) pro vektor $\boldsymbol{1} + \boldsymbol{x}$ (viz označení na str. 13 a 14), bude

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) = [G_n(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{x})]^n \leqq$$
$$\leqq [A_n(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{x})]^n = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (1 + x_k)\right]^n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1 + x_k}{n}\right)^n =$$
$$= [1 + A_n(\boldsymbol{x})]^n = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n.$$

Podle binomického vzorce je nyní

$$\left(1 + \frac{s}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n.n.\ldots.n} s^k =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} 1\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{s^k}{k!} \leqq \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}$$

a (I.33) je dokázáno.

Příklad I.3. Budiž $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n$ a $y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq$ $\leqq y_n$. Pak platí

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,. \tag{I.34}$$

Tato nerovnost se nazývá *Čebyševova* a lze ji zapsat ve tvaru

$$A_n(\mathbf{x}) \,.\, A_n(\mathbf{y}) \leqq A_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}) \,. \tag{I.35}$$

(význam symbolu $\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}$ byl vysvětlen na str. 14).

Důkaz: Označme $S_n(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = nA_n(\mathbf{x})$. Zřejmými úpravami dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i y_i - x_i y_k) = \sum_{i=1}^{n}(n x_i y_i - x_i S_n(\mathbf{y})) = $$
$$= nS_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}) - S_n(\mathbf{x})S_n(\mathbf{y}) \,,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k - x_k y_i) = \sum_{k=1}^{n}(n x_k y_k - x_k S_n(\mathbf{y})) = $$
$$= nS_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}) - S_n(\mathbf{x})S_n(\mathbf{y}) \,.$$

Sečteme-li obě rovnosti, dostaneme po úpravě

$$nS_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}) - S_n(\mathbf{x})S_n(\mathbf{y}) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i y_i - x_i y_k + x_k y_k - x_k y_i) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_i - x_k)(y_i - y_k) \,.$$

Z podmínek na x_i a y_i plyne, že výrazy $(x_i - x_k)$ a $(y_i - y_k)$ mají stejné znaménko; je tedy $(x_i - x_k)$. $.\,(y_i - y_k) \geqq 0$ pro $i, k = 1, 2, \ldots, n$. To však znamená, že $nS_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}) - S_n(\mathbf{x})S_n(\mathbf{y}) \geqq 0$, a po vynásobení této nerovnosti číslem $\frac{1}{n^2}$ dostaneme nerovnost $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}) - - A_n(\mathbf{x})A_n(\mathbf{y}) \geqq 0$, což je (I.35).

Z důkazu je vidět, že nerovnost (I.34) platí také za předpokladu

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n \quad \text{a} \quad y_1 \geqq y_2 \geqq \ldots \geqq y_n .$$

Nerovnost (I.34) či (I.35) lze zobecnit i na více vektorů: Budiž $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ a $0 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \ldots \leqq z_n$. Pak plyne z (I.35)

$$A_n(\mathbf{x})A_n(\mathbf{y})A_n(\mathbf{z}) \leqq A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y})A_n(\mathbf{z}) ,$$

neboť $A_n(\mathbf{z}) \geqq 0$. Abychom mohli užít (I.35) pro vektory $\mathbf{u} = \mathbf{xy}$ a $\mathbf{z}$, musí být $x_1y_1 \leqq x_2y_2 \leqq \ldots \leqq x_ny_n$. To není obecně zaručeno; budeme-li však předpokládat

$$0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n , \quad 0 \leqq y_1 \leqq y_2 \leqq \ldots \leqq y_n$$

bude také $0 \leqq x_1y_1 \leqq x_2y_2 \leqq \ldots \leqq x_ny_n$ a tedy podle (I.35) je $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y})A_n(\mathbf{z}) \leqq A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}.\mathbf{z})$ čili

$$A_n(\mathbf{x}).A_n(\mathbf{y}).A_n(\mathbf{z}) \leqq A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y}.\mathbf{z}) .$$

Odtud speciálně plyne: Je-li m přirozené číslo a je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, je

$$[A_n(\mathbf{x})]^m \leqq A_n(\mathbf{x}^m) . \tag{I.36}$$

Vzorec (I.35) ukazuje, jak lze odhadnout aritmetický průměr součinu dvou vektorů $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{y})$. Vzorec pro aritmetický průměr součtu dvou vektorů je jasný:

$$A_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A_n(\mathbf{x}) + A_n(\mathbf{y}) . \tag{I.37}$$

U geometrického průměru je naopak jednoduchý vzorec pro případ součinu dvou vektorů: Je-li $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$, je

$$(I.38) \qquad G_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{y}) = G_n(\mathbf{x})\,.\,G_n(\mathbf{y})\,.$$

Než si všimneme geometrického průměru součtu dvou vektorů, dokážeme toto tvrzení:

Věta I.2. *Budiž* $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) > \mathbf{0}$, $G_n(\mathbf{z}) = 1$. *Pak je pro každé* $\mathbf{x} > \mathbf{0}$

$$(I.39) \qquad A_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{z}) \geqq G_n(\mathbf{x})\,.$$

Ke každému vektoru $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ *existuje vektor* $\mathbf{z}$ *(závislý na* $\mathbf{x}$*) tak, že* $G_n(\mathbf{z}) = 1$ *a že v* (I.39) *platí rovnost.*

Důkaz: Z nerovnosti (AG) především plyne, že $A_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{z}) \geqq G_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{z})$; užijeme-li však (I.38), je $G_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{z}) = G_n(\mathbf{x})\,.\,G_n(\mathbf{z}) = G_n(\mathbf{x})$, neboť $G_n(\mathbf{z}) = 1$. Tím je dokázána nerovnost (I.39). Zapišme ji ve tvaru

$$A_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{z}) \geqq G_n(\mathbf{x}\,.\,\mathbf{z})\,;$$

podle věty I.1 zde nastává rovnost tehdy a jen tehdy, je-li $x_1z_1 = x_2z_2 = \ldots = x_nz_n$. Těmito rovnostmi je však vektor $\mathbf{z}$ určen. Stačí volit

$$z_i = \frac{G_n(\mathbf{x})}{x_i}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,;$$

pak je $z_i > 0$, neboť $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ a tedy $G_n(\mathbf{x}) > 0$, a dále je $x_iz_i = G_n(\mathbf{x})$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a $G_n(\mathbf{z}) = 1$.

Nyní už můžeme dokázat toto tvrzení: Pro $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ a $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ je

$$(I.40) \qquad G_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geqq G_n(\mathbf{x}) + G_n(\mathbf{y})\,.$$

Důkaz: Je-li některé z čísel x_i nebo některé z čísel y_i rovné nule, je $G_n(\mathbf{x}) = 0$ nebo $G_n(\mathbf{y}) = 0$ a nerovnost (I.40) zřejmě platí. Proto můžeme předpokládat $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{y} > \mathbf{0}$. Pak podle věty I.2 existuje k vektoru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ vektor $\mathbf{z}^*$ tak, že $G_n(\mathbf{z}^*) = 1$ a $G_n(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A_n[(\mathbf{x}+\mathbf{y}).\mathbf{z}^*]$. Užijeme-li vzorce (I.37), obdržíme

$$\begin{aligned} \text{(I.41)} \qquad G_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= A_n((\mathbf{x} + \mathbf{y}).\mathbf{z}^*) = \\ &= A_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}^*) + A_n(\mathbf{y}.\mathbf{z}^*) . \end{aligned}$$

Podle věty I.2 je dále $A_n(\mathbf{x}.\mathbf{z}^*) \geqq G_n(\mathbf{x})$ a $A_n(\mathbf{y}.\mathbf{z}^*) \geqq G_n(\mathbf{y})$; odtud a z (I.41) už plyne (I.40).

Příklad I.4. V příkladu I.1 jsme dokázali, že *dolním* odhadem výrazu $A_n(\mathbf{x}).A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right)$ je jednička. *Horní* odhad udává tato nerovnost: Pro $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ je

$$\text{(I.42)} \qquad A_n(\mathbf{x}).A_n\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right) \leqq \frac{[M_n(\mathbf{x}) + m_n(\mathbf{x})]^2}{4M_n(\mathbf{x}).m_n(\mathbf{x})} .$$

Tato nerovnost plyne z nerovnosti, obsažené v této větě:

Věta I.3. *Budte a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ reálná čísla, nechť je $a_k \neq 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a nechť je $m \leqq \frac{b_k}{a_k} \leqq M$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Pak platí*

$$\text{(I.43)} \qquad \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + mM \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqq (M + m) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k .$$

Důkaz: Zřejmě platí

$$\left(\frac{b_k}{a_k} - m\right)\left(M - \frac{b_k}{a_k}\right) a_k^2 = (b_k - ma_k)\ (Ma_k - b_k) \geqq 0$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$. Sečteme-li všechny tyto nerovnosti, dostaneme

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} (b_k - ma_k)(Ma_k - b_k) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + (M + m) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - mM \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ,$$

což je (I.43).

Současně je z důkazu vidět, že rovnost bude v (I.43) platit tehdy a jen tehdy, bude-li pro každé k platit některá z rovností $\frac{b_k}{a_k} = m$ a $\frac{b_k}{a_k} = M$, tj. bude-li buď $b_k = ma_k$ nebo $b_k = Ma_k$.

Nerovnost (I.42) odvodíme z (I.43) takto: Pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$ položíme $b_k = \sqrt{x_k}$, $a_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}}$.

Pak je $\frac{b_k}{a_k} = x_k$ a $m = m_n(\mathbf{x})$, $M = M_n(\mathbf{x})$. Nerovnost (I.43) má tvar

(*)
$$\sum_{k=1}^{n} x_k + m_n(\mathbf{x}) M_n(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \leq$$

$$\leq (M_n(\mathbf{x}) + m_n(\mathbf{x})) \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}} =$$

$$= (M_n(\mathbf{x}) + m_n(\mathbf{x})) . n .$$

Použijeme-li nerovnosti (I.17) pro

$$a = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k} \quad \text{a} \quad b = \sqrt{m_n(\mathbf{x}) M_n(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} ,$$

bude

$$\sqrt{m_n(\mathbf{x})M_n(\mathbf{x})\ (\sum_{k=1}^{n} x_k)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)} \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k + m_n(\mathbf{x})\, M_n(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right],$$

a tedy podle neroxnosti (*)

$$m_n(\mathbf{x})\, M_n(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right) \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{4n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} x_k + m_n(\mathbf{x})\, M_n(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right]^2 \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{4n^2}\,[M_n(\mathbf{x}) + m_n(\mathbf{x})]^2 . n^2 = \frac{[m_n(\mathbf{x}) + M_n(\mathbf{x})]^2}{4}\,.$$

Odtud už plyne (I.42); rovnost v (I.42) přitom bude platit tehdy a jen tehdy, bude-li $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Příklad I.5. Budiž $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqq \mathbf{0}$. Označme $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ a $S_k = S - (n-1)x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - (n-1)\,x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Jsou-li všechna $S_k \geqq 0$, pak platí

$$\text{(I.44)} \qquad x_1 x_2 \ldots x_n \geqq S_1 S_2 \ldots S_n\,.$$

Je totiž $S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1} + S_{k+1} + \ldots + S_n = (n-1)\,x_k$ (ověřte to!) čili

$$x_k = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_{k-1} + S_{k+1} + \ldots + S_n}{n-1}\,.$$

Vpravo stojí aritmetický průměr vektoru $(S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}, S_{k+1}, \ldots, S_n)$, a podle nerovnosti (AG) je pak

$$x_k \geqq (S_1 S_2 \ldots S_{k-1} S_{k+1} \ldots S_n)^{1/(n-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

To je celkem n nerovností; znásobíme-li jejich levé strany a jejich pravé strany, dostaneme (I.44).

Příklad I.6. Označme pro $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) > \mathbf{0}$ symbolem $\mathbf{x}^{(i)}$ vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ a budiž

$$a_i = A_{n-1}(\mathbf{x}^{(i)}) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - x_i}{n-1}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Označme dále $\mathbf{a}$ vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n) > \mathbf{0}$. Pak platí

$$G_n(\mathbf{x}) \leqq G_n(\mathbf{a}) \leqq A_n(\mathbf{x}) . \tag{I.45}$$

Důkaz: Je

$$x_1x_2\ldots x_n = \left(\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_1}\right)^{1/(n-1)} \left(\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_2}\right)^{1/(n-1)} \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_n}\right)^{1/(n-1)} = G_{n-1}(\mathbf{x}^{(1)})\, G_{n-1}(\mathbf{x}^{(2)}) \ldots G_{n-1}(\mathbf{x}^{(n)}) .$$

Podle nerovnosti (AG) je $G_{n-1}(\mathbf{x}^{(i)}) \leqq A_{n-1}(\mathbf{x}^{(i)}) = a_i$, a tedy máme

$$x_1x_2 \ldots x_n \leqq a_1a_2 \ldots a_n ,$$

odkud plyne první nerovnost v (I.45) odmocněním.

Použijeme-li nerovnosti (AG) pro vektor $\mathbf{a}$, máme

$$G_n(\mathbf{a}) \leqq A_n(\mathbf{a}) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} =$$

$$= \frac{\dfrac{nx_1 + nx_2 + \ldots + nx_n - x_1 - x_2 - \ldots - x_n}{n-1}}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = A_n(\mathbf{x}) ,$$

což je druhá nerovnost v (I.45).

Příklad I.7. Budiž $\boldsymbol{x}^{(i)}$ vektor z příkladu I.6 a označme

$$g_i = G_{n-1}(\boldsymbol{x}^{(i)}) = \left(\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{x_i}\right)^{1/(n-1)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Je-li $\boldsymbol{g}$ vektor $(g_1, g_2, \dots, g_n) > \boldsymbol{0}$, platí

$$G_n(\boldsymbol{x}) \leqq A_n(\boldsymbol{g}) \leqq A_n(\boldsymbol{x}) \,. \tag{I.46}$$

Důkaz: V předchozím příkladu jsme ukázali, že $G_n(\boldsymbol{x}) = G_n(\boldsymbol{g})$. Z nerovnosti (AG), použité pro vektor $\boldsymbol{g}$, pak plyne první nerovnost v (I.46). Z nerovnosti (AG), použité pro vektor $\boldsymbol{x}^{(i)}$, plyne, že $g_i = G_{n-1}(\boldsymbol{x}^{(i)}) \leqq \leqq A_{n-1}(\boldsymbol{x}^{(i)}) = a_i$, takže také

$$g_1 + g_2 + \dots + g_n \leqq a_1 + a_2 + \dots + a_n \,;$$

odtud už plyne druhá nerovnost v (I.46).

Poznámka I.2. Oba poslední příklady mj. ukazují, že mezi výrazy $G_n(\boldsymbol{x})$ a $A_n(\boldsymbol{x})$ lze zařadit výrazy $G_n(\boldsymbol{a})$ a $A_n(\boldsymbol{g})$, které opět závisejí na vektoru $\boldsymbol{x}$; tím máme konkrétní ilustraci k poznámce I.1. Jestliže nyní k vektoru $\boldsymbol{a}$ sestrojíme vektor $\boldsymbol{b}$ stejným postupem, jakým jsme v příkladu I.6 sestrojili k vektoru $\boldsymbol{x}$ vektor $\boldsymbol{a}$, bude podle zmíněného příkladu, nerovnosti (I.45), platit

$$G_n(\boldsymbol{a}) \leqq G_n(\boldsymbol{b}) \leqq A_n(\boldsymbol{a}) \,;$$

protože však je $G_n(\boldsymbol{x}) \leqq G_n(\boldsymbol{a})$ a $A_n(\boldsymbol{a}) = A_n(\boldsymbol{x})$, dostali jsme další výraz $G_n(\boldsymbol{b})$, který opět lze vložit mezi $A_n(\boldsymbol{x})$ a $G_n(\boldsymbol{x})$. A tak bychom mohli pomocí příkladů I.6 a I.7 pokračovat v sestrojování dalších výrazů, které ilustrují poznámku I.1.

Nerovnosti (AG) lze využít i v geometrických úlohách:

Příklad I.8. V 15. ročníku MO byla v kategorii B zadána tato úloha: Je dán kvádr o rozměrech a, b, c, který není krychle. Součet objemů krychlí o hranách a, b, c je větší než trojnásobný objem daného kvádru; dokažte.

Zde jde o to dokázat, že platí

$$a^3 + b^3 + c^3 > 3abc \quad \text{pro} \quad a, b, c > 0. \tag{I.47}$$

To však plyne ihned z nerovnosti (AG) pro $n = 3$: Je $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leqq \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ pro $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) > \boldsymbol{0}$, a nerovnost (I.47) dostaneme, položíme-li $x_1 = a^3$, $x_2 = b^3$, $x_3 = c^3$. Protože výchozí kvádr není krychle, jsou alespoň dvě z čísel a, b, c různá, a nerovnost je tedy podle věty I.1 ostrá.

Úloha I.2. Vyřešte pomocí nerovnosti (AG) tento (tzv. *isoperimetrický)* problém: *Mezi všemi trojúhelníky o stejném obvodu najít ten, který má největší obsah.*

Příklad I.9. V 17. ročníku MO byla v kategorii A zadána tato úloha: Pro každá tři nezáporná čísla x, y, z platí

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq 0; \tag{I.48}$$

dokažte. V kterých případech nastane rovnost?

Zde stačí použít nerovnosti (AG) pro $n = 2$, podle níž je

$$\sqrt{yz} \leqq \frac{1}{2}(y + z), \sqrt{xz} \leqq \frac{1}{2}(x + z), \sqrt{xy} \leqq \frac{1}{2}(x + y)\,.$$

Pak je

$$x(x - \sqrt{yz}) + y(y - \sqrt{xz}) + z(z - \sqrt{xy}) \geqq$$
$$\geqq x\left[x - \frac{1}{2}(y + z)\right] + y\left[y - \frac{1}{2}(x + z)\right] +$$

$$+ z\left[z - \frac{1}{2}(x + y)\right] = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 +$$
$$+ (z - x)^2] \geqq 0\,,$$

což je (I.48). Odtud je také vidět, že rovnost v (I.48) nastane tehdy a jen tehdy, bude-li $x = y = z$.

Příklad I.10. Předpokládejme, že $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, a nechť jsou A_k a G_k dána vzorci (I.24). Užijme nyní nerovnosti (P.1) pro $\alpha = k + 1$ a pro $t = \dfrac{A_{k+1}}{A_k}$. Pak je

$$\left(\frac{A_{k+1}}{A_k}\right)^{k+1} \geqq (k + 1)\frac{A_{k+1}}{A_k} - k =$$
$$= \frac{1}{A_k}[(k + 1)A_{k+1} - kA_k] = \frac{1}{A_k}x_{k+1}\,;$$

zde jsme užili prvního vzorce v (I.25). Je tedy

$$x_{k+1} \leqq \frac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^k}\,.$$

Podle druhého vzorce z (I.25) je však $x_{k+1} = \dfrac{G_{k+1}^{k+1}}{G_k^k}$, takže máme nerovnost

$$\frac{G_{k+1}^{k+1}}{G_k^k} \leqq \frac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^k}\,,$$

kterou lze upravit na tvar

$$\text{(I.49)} \quad \left(\frac{G_{k+1}}{A_{k+1}}\right)^{k+1} \leqq \left(\frac{G_k}{A_k}\right)^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

Tím jsme vlastně podali další, už *pátý* důkaz nerovnosti (AG): Z (I.49) totiž plyne, že

$$\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n \leqq \left(\frac{G_2}{A_2}\right)^2,$$

a protože víme, že $G_2 \leqq A_2$ čili že $\frac{G_2}{A_2} \leqq 1$, je také $\frac{G_n}{A_n} \leqq 1$ čili $G_n(\boldsymbol{x}) \leqq A_n(\boldsymbol{x})$.

Příklad I.11. Pomocí věty I.2 jsme výše dokázali nerovnost

$$G_n(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \geqq G_n(\boldsymbol{x}) + G_n(\boldsymbol{y})\,. \tag{I.40}$$

Tuto nerovnost můžeme dokázat přímo pomocí nerovnosti (AG) a několika početních obratů: Je-li $\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$, je

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i + y_i}{x_i + y_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i + y_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i + y_i} =$$
$$= A_n\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}\right) + A_n\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}\right) \geqq G_n\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}\right) + G_n\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}\right) =$$
$$= G_n(\boldsymbol{x})\,.\,G_n\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}\right) + G_n(\boldsymbol{y})\,.\,G_n\left(\frac{1}{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}\right) = \frac{G_n(\boldsymbol{x}) + G_n(\boldsymbol{y})}{G_n(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})},$$

odkud už plyne (I.40). [Použili jsme též vztahů (I.38) a (I.15).]

Předchozí příklad ukazuje, co se stane, zaměníme-li pořadí operací „součet dvou vektorů“ a „utvoření geometrického průměru“. V trochu jiném smyslu pojednává o výsledku záměny operací „sčítání“ a „tvoření průměru (aritmetického, geometrického, harmonického)“ následující úloha.

Úloha I.3. Budiž $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y} > \boldsymbol{0}$. Zřejmě je

$$(I.50)\qquad \sum_{k=1}^{m} A_2(x_k, y_k) = A_2\left(\sum_{k=1}^{m} x_k, \sum_{k=1}^{m} y_k\right)^{*)}.$$

Dokažte, že dále platí

$$(I.51)\qquad \sum_{k=1}^{m} G_2(x_k, y_k) \leqq G_2\left(\sum_{k=1}^{m} x_k, \sum_{k=1}^{m} y_k\right)$$

a

$$(I.52)\qquad \sum_{k=1}^{m} H_2(x_k, y_k) \leqq H_2\left(\sum_{k=1}^{m} x_k, \sum_{k=1}^{m} y_k\right).$$

Některé vlastnosti vektorů $\boldsymbol{x}$ se přenášejí i na aritmetické a geometrické průměry:

Úloha I.4. (22. ročník MO, kategorie A.) Budiž dána posloupnost reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ taková, že pro každé $k > 1$ platí

$$(I.53)\qquad x_{k-1} + x_{k+1} \geqq 2x_k .$$

Dokažte, že pro aritmetické průměry $A_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ platí

$$(I.54)\qquad A_{n-1} + A_{n+1} \geqq 2A_n \quad \text{pro každé } n > 1.$$

Úloha I.5. Buďte $x_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ a označme $G_n = \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Ukažte, že když pro každé $k > 1$ je

$$(I.55)\qquad x_{k-1}x_{k+1} \geqq x_k^2 ,$$

je také

$$(I.56)\qquad G_{n-1}G_{n+1} \geqq G_n^2 \quad \text{pro každé } n > 1.$$

*) Pro zjednodušení jsme zde použili označení $A_2(x_k, y_k)$ místo důslednějšího označení $A_2((x_k, y_k))$.

A nakonec uveďme pro procvičení řadu úloh, které lze snadno vyřešit pomocí předchozích výsledků; jedná se převážně o použití nerovnosti (AG).

Úloha I.6. Budiž α ostrý úhel; dokažte, že platí

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha \geqq 2 .$$

Úloha I.7. Dokažte, že pro libovolnou trojici kladných čísel a, b, c platí

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqq 8abc .$$

Kdy nastane rovnost?

Úloha I.8. Buďte a, b kladná čísla. Pro kterou reálnou hodnotu t nabývá zlomek $\frac{1}{t^2}(a + bt^4)$ nejmenší hodnoty?

Úloha I.9. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ platí

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geqq \geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + \sqrt[3]{b_1b_2b_3} .$$

Úloha I.10. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqq n .$$

Úloha I.11. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n > 1$ platí

$$n! < \left(\frac{n + 1}{2}\right)^n .$$

Úloha I.12. (a) Mezi všemi obdélníky o stejném obvodu nalezněte ten, který má největší obsah.
(b) Mezi všemi obdélníky o stejném obsahu nalezněte ten, který má nejmenší obvod.

Úloha I.13. Mezi všemi obdélníky vepsanými do kružnice o poloměru R nalezněte ten, který má největší obsah.

Úloha I.14. Mezi všemi trojúhelníky o stejném obsahu nalezněte ten, který má nejmenší obvod.

Úloha I.15. Budiž $0 < m \leqq x_k \leqq M$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Buďte p_k kladná čísla a nechť je $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Dokažte, že platí

$$(\text{I.57}) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{x_k}\right) \leqq \frac{(M+m)^2}{4Mm}.$$