Nerovnosti a odhady

Úvod

ÚVOD

Otočíme-li písmeno V o devadesát stupňů doprava nebo doleva, dostaneme znaménko nerovnosti. Nevyhne se mu nikdo, kdo se jen trochu zabývá matematikou, a intuitivně s tímto znaménkem pracuje každý, neboť denně všichni používáme pojmů „větší než“, „menší než“ atp.

Bez nerovnosti se neobejde ani Matematická olympiáda; vyskytuje se skoro v každé úloze — nezávisle na kategorii řešitelů. Ve většině úloh hrají nerovnosti pouze pomocnou roli, ale početné jsou i úlohy, v nichž je nerovnost podstatnou složkou, v nichž jde třeba o to vyřešit jednu či více nerovností (či přesněji, v dnešní terminologii, *nerovnic*) o jedné či více neznámých, kde se jedná o určení rovinného oboru, který je popsán nerovnostmi atp. Důležitost nerovností a nerovnic ve školské matematice je konec konců zdůrazněna i skutečností, že speciálně jim byly věnovány už dvě publikace Školy mladých matematiků: svazek 5 F. Veselého *O nerovnostech* a svazek 18 K. Havlíčka *Analytická geometrie a nerovnosti*.

I v tomto svazku Školy mladých matematiků půjde o nerovnosti, ovšem z poněkud jiného hlediska než třeba u obou zmíněných publikací. Zde budeme chápat nerovnost ve smyslu *odhadu*, budeme se ptát, zda nějaký výraz, v němž vystupují čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — označme tento výraz symbolem $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ —, lze odhadnout jiným, jednodušším, nebo pro naše konkrétní účely vhodnějším výrazem $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Budeme zkrátka vyšetřovat nerovnosti tvaru

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \tag{U.1}$$

přičemž čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ budou ležet v nějaké předem dané množině M. Výraz $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pak bude *horním odhadem* výrazu $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a naopak — výraz $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bude *dolním odhadem* výrazu $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Nespokojíme se přitom jen tak s nějakým odhadem; budeme chtít, aby nerovnost (U.1) byla v nějakém smyslu *přesná*. Tuto přesnost můžeme vyjádřit různým způsobem: můžeme např. požadovat, aby pro jistou n-tici čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z M nastala v (U.1) rovnost; nebo můžeme požadovat, aby rozdíl mezi pravou a levou stranou bylo možno učinit libovolně malý; nebo můžeme chtít, aby jistá konstanta — např. konstanta c, má-li výraz G tvar $c.\widetilde{G}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — byla nejlepší možná, tj. např. taková, že nerovnost (U.1) už neplatí, zvolíme-li G ve tvaru $\bar{c}.\widetilde{G}$, kde je $\bar{c} < c$; nebo můžeme požadavek přesnosti vyjádřit jinak. Ilustrujme to na příkladech.

Příklad U.1. Pro každé reálné číslo x platí

$$x \leqq |x|\,;$$

platí však také $x \leqq \alpha|x| + \beta$, je-li $\beta \geqq 0$ a $\alpha \geqq 1$. Označíme-li $F(x) = x$ a $G_{\alpha,\beta}(x) = \alpha|x| + \beta$, dostaneme odhad

$$F(x) \leqq G_{\alpha,\beta}(x)\,,$$

který platí pro všechna reálná čísla x, je-li $\alpha \geqq 1$ a $\beta \geqq 0$; nejlepším horním odhadem ze všech odhadů tvaru $G_{\alpha,\beta}$ ovšem bude výraz $G_{1,0}(x) = |x|$, neboť $G_{1,0}(x) \leqq G_{\alpha,\beta}(x)$. Jinými slovy: konstanty $\alpha = 1$, $\beta = 0$ jsou ze všech konstant $\alpha \geqq 1$ a $\beta \geqq 0$ *nejlepší.*

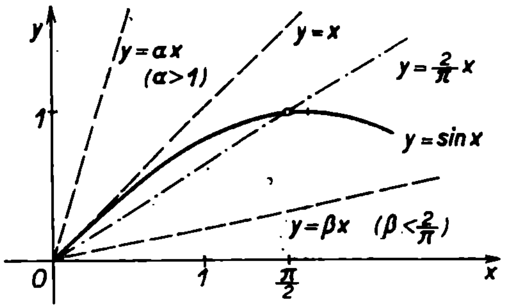
Příklad U.2. Zvolme za M interval $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a položme $F(x) = \sin x$. Zkoumejme horní odhady $H_\alpha(x)$ tvaru $\alpha . x$ a dolní odhady $D_\beta(x)$ tvaru $\beta . x$, tj. zkoumejme, kdy pro všechna $x \in M$ platí

$$D_\beta(x) \leqq \sin x \leqq H_\alpha(x)$$

čili

$$\beta x \leqq \sin x \leqq \alpha x \,. \tag{U.2}$$

Lze ukázat, že to platí pro $\alpha \geqq 1$ a $\beta \leqq \frac{2}{\pi}$ (viz též obr. 1), zatímco pro $\alpha < 1$ neplatí horní odhad a pro $\beta > \frac{2}{\pi}$ neplatí dolní odhad (uvědomte si, že všude je podstatné, že $x \in M$!). Nerovnosti



Obr. 1.

$$\frac{2}{\pi} x \leqq \sin x \leqq x$$

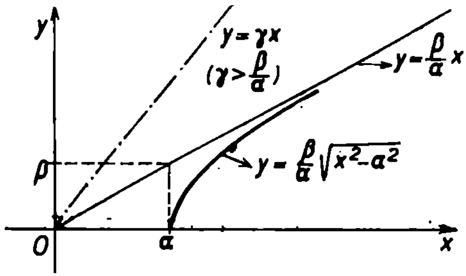
jsou přitom *přesné* v tom smyslu, že rovnost nastává jednak pro $x = 0$ a u dolního odhadu ještě pro $x = \frac{\pi}{2}$.

Konstanty $\beta_0 = \frac{2}{\pi}$ a $\alpha_0 = 1$ jsou nejlepší možné, neboť je-li $\beta < \frac{2}{\pi}$ a $\alpha > 1$, platí

$$\beta x \leqq \beta_0 x \leqq \sin x \leqq \alpha_0 x \leqq \alpha x\,.$$

Příklad U.3. Buďte α, β kladná čísla, M interval $\langle\alpha, \infty)$ a $F(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2}$. Chtěli bychom výraz $F(x)$ odhadnout *shora* výrazem typu $H_\gamma(x) = \gamma x$, $\gamma > 0$. Z geometrie víme, že výraz $F(x)$ popisuje část hyperboly (viz též obr. 2). Je-li $\gamma < \frac{\beta}{\alpha}$, bude nerovnost

$$\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2} \leqq \gamma x \tag{U.3}$$



Obr. 2.

platit jen pro některé hodnoty x, nikoliv pro *všechna* $x \in M$ (řešte rovnici $\beta\sqrt{x^2 - \alpha^2} = \alpha\gamma x$!). Horní odhad dostaneme, volíme-li $\gamma \geq \frac{\beta}{\alpha}$. Nejlepší horní odhad přitom dostaneme, volíme-li $\gamma = \gamma_0 = \frac{\beta}{\alpha}$, neboť pro $\gamma > \gamma_0$ a pro každé $x \in M$ platí

$$\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2 - \alpha^2} \leqq \gamma_0 x < \gamma x\,.$$

Zde nelze ukázat, že by v nerovnosti (U.3) nastávala pro $\gamma = \gamma_0$ rovnost, naopak, nerovnost je vždy *ostrá*. Rozdíl mezi pravou a levou stranou však konverguje k nule, roste-li x do nekonečna, tj. rozdíl mezi pravou a levou stranou lze učinit libovolně malý volbou vhodné hodnoty x.

Nerovnosti typu odhadů se v Matematické olympiádě často objevují. Např. v 8. ročníku byl v kategorii B zadán tento příklad: „Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c platí vztah

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9\,;$$

nalezněte všechny trojice, pro něž nastává rovnost.“ To lze chápat jako úlohu dokázat odhad

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9\,\frac{1}{a + b + c}\,,$$

ukázat, že je přesný a že devítka je nejlepší možná konstanta. Tato úloha je speciálním případem úlohy, která se objevila ve 2. ročníku Matematické olympiády v kategorii A a kde šlo o to dokázat nerovnost

$$(U.4)\quad (x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geqq n^2.$$

My se k této úloze vrátíme v dalším a uvedeme dva způsoby řešení této úlohy — viz příklad I.1 a příklad II.2.

V tomto svazku uvedeme několik užitečných odhadů nebo — chcete-li — nerovností. Jejich význam — a i smysl tohoto svazečku — je v tom, že je dobré je znát, vědět o nich, neboť se mohou hodit při řešení řady úloh, s nimiž se čtenář setká [viz např. nerovnost (U.4) — autor ztroskotal kdysi právě na této úloze a dodnes se za to hanbí; kdyby byl znal Cauchyovu nerovnost, vyřešil by ji obratem ruky, ale tehdy ještě svazky Školy mladých matematiků neexistovaly]. To však není jediný jejich význam, a řekl bych, že není ani hlavní. Za důležitější než *znát* tyto nerovnosti považuji *umět je dokázat*, či přesněji *vědět, jak se dokazují.* V těchto důkazech (a my u některých nerovností uvedeme důkazů několik) je totiž skryta řada pěkných idejí, šikovných početních obratů a pod., což vše lze využít i v řadě jiných matematických problémů.

Doporučujeme proto čtenáři, aby při četbě tohoto svazečku maximálně spolupracoval, aby sledoval hlavní ideje důkazů jednotlivých tvrzení a pokusil se je odlišit od těch kroků, které představují jistou početní rutinu, aby se zamyslel nad tím, zda se na daný problém lze dívat i z jiné strany a zda existuje možnost zobecňování. To byl konec konců i důvod toho, že některé nerovnosti jsou dokazovány vícerým způsobem, ač by se to mohlo někdy zdát zbytečné či zbytečně složité.

Každá kapitola obsahuje řadu úloh, jejichž řešení by mělo čtenáři pomoci v tom, aby se mohl podílet na právě požadované spolupráci. Úlohy jsou různého stupně obtížnosti a v závěru svazku jsou obsaženy výsledky, návody k řešení nebo celá řešení; bylo by však vhodné, kdyby čtenář nalistování posledních stránek odložil na co nejpozdější dobu. Bylo by možno dodat více úloh či příkladů, domnívám se však, že úlohy zde obsažené mohou zainteresovaného čtenáře podnítit k tomu, aby si podobné úkoly kladl sám; přitom bych chtěl připomenout, že beze smyslu nejsou ani zdánlivě zcela triviální úlohy jako volba speciálních čísel v dané nerovnosti (viz např. úlohy II.1 a II.2 nebo úlohy III.3, III.4 a III.5) — i takový výsledek může být zajímavý a někdy dokonce osvětlí nerovnost více než vztah s obecnými vektory. A čtenář, který bude mít skutečný zájem, najde inspiraci v seznamu literatury na konci svazku: zvláště v knihách [4], [5] a [6] najde mnoho dalších vhodných úloh.

Nakonec několik slov k užitečnosti nerovností, o nichž budeme hovořit. Vyjděme třeba z elementární nerovnosti

$$(a - b)^2 \geqq 0 ,$$

která platí pro všechny dvojice reálných čísel a, b. Plyne odtud, že $a^2 - 2ab + b^2 \geqq 0$, čili že $a^2 + b^2 \geqq 2ab$, čili že

$$ab \leqq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 . \tag{U.5}$$

Tím jsme tedy odvodili jednoduchý odhad výrazu ab, který je zajímavý především pro $a \geqq 0$, $b \geqq 0$. Odhad (U.5) znal už Eukleides a my v dalším uvidíme, jak je užitečný (*geometricky* znamená, že plocha obdélníka není větší než polovina plochy čtverce sestrojeného nad úhlopříčkou!); zobecněním tohoto odhadu, s nímž se též setkáme, je odhad

$$ab \leqq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \left(p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

Tento odhad je jedním z nejdůležitějších pomocných prostředků při řešení různých problémů matematické analýzy, a to problémů velice netriviálních. S trochou nadsázky lze říci, že na tomto odhadu je založena nejedna matematická teorie. Snad tedy čtenář uvěří, že nerovnosti, s nimiž se setká, nejsou jen samoúčelným prostředkem Matematických olympiád.