Latinské štvorce

VI. kapitola. Roomovské štvorce alebo hráme bridž

In: Juraj Bosák (author): Latinské štvorce. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 64–72.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403871

VI. kapitola

ROOMOVSKÉ ŠTVORCE
alebo
HRÁME BRIDŽ

Vráťme sa teraz na začiatok knihy a položme si úlohu vyplniť prázdnu tabuľku (1) z I. kapitoly číslami 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8 tak, aby sa v každom riadku i stĺpci tabuľky vyskytovalo každé z čísel 1, 2, ..., 8, a to práve raz. Na prvý pohľad by sa zdalo, že úloha je neriešiteľná, lebo tabuľka (1) má len 7.7 = 49 štvorčekov. No úloha sa predsa len dá vyriešiť, ak pripustíme, aby v niektorých štvorčekoch boli napísané dve čísla:

(44)

6	2	7	1	4	5,8	3
1	3	6	5,8	7	4	2
5	7,8	4	6	3	2	1
2	1	3	7	5	6	4,8
7	6	1	4	2,8	3	5
3	4	5,8	2	6	1	7
4,8	5	2	3	1	7	6

Toto riešenie sme dostali z latinského štvorca (3) tým, že sme do niektorých štvorčekov zapísali ešte ďalšie číslo 8.

Ak dovolíme aj to, aby niektoré štvorčeky boli prázdne, môžeme sa zaobísť bez štvorčekov vyplnených jediným číslom:

(45)

8,1	5,6	2,4		3,7		
	8,2	6,7	3,5		4,1	
		8,3	7,1	4,6		5,2
6,3			8,4	1,2	5,7	
	7,4			8,5	2,3	6,1
7,2		1,5			8,6	3,4
4,5	1,3		2,6			8,7

Je zrejmé, že tabuľku (45) môžeme považovať za štvorcovú maticu rádu 7, v ktorej každý člen je buď prázdna množina (t.j. množina, ktorá nemá žiaden prvok) alebo 2-prvková množina (t.j. množina, ktorá má práve dva prvky). Ak urobíme zjednotenie členov (teda príslušných množín) z ľubovoľného riadku alebo stĺpca matice (45), dostaneme vždy množinu $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$.

Matica (45) má však ešte ďalšiu zaujímavú vlastnosť: Uvažujme, koľko dvojíc rôznych prvkov (teda 2-prvkových množín) možno utvoriť z prvkov 1, 2, 3, ..., 8. Ako vieme z III. kapitoly, takýchto dvojíc je

$$\binom{8}{2} = \frac{8 . 7}{1 . 2} = 28 .$$

Ak dobre preskúmame maticu (45), zistíme, že každá z týchto 28 dvojíc sa tu vyskytuje práve raz. Napr. dvojica $\{2, 5\}$, alebo, čo je to isté, $\{5, 2\}$, sa vyskytuje v 3. riadku a 7. stĺpci a inde sa už nevyskytuje.

Zdalo by sa, že útvary podobného druhu ako je matica (45) nemôžu mať vážne aplikácie a hodia sa azda len na rozptýlenie znudených matematikov. Skutočnosť je však trochu iná, o čom svedčí už i fakt, že roomovské (vyslov „rúmovské") štvorce (lebo tak sa tieto matice nazývajú) boli objavené až dvakrát, vždy v súvislosti s témou vzdialenou od štúdia latinských štvorcov. Svoje meno dostali podľa austrálskeho matematika T. G. Rooma, ktorý k nim dospel r. 1955 pri štúdiu istého problému z algebraickej geometrie. No nebol to prvý objav roomovských štvorcov, lebo ich fakticky študovali už r. 1897 v súvislosti s organizáciou turnajov v kartovej hre zvanej „bridž" (z anglického slova „bridge" = = most). Prv než si o tom pohovoríme podrobnejšie, povedzme si definíciu roomovského štvorca.

Nech je dané prirodzené číslo k a množina M, ktorá má práve $2k$ prvkov. Označme znakom $P(M)$ množinu všetkých podmnožín množiny M. *Roomovským štvorcom rádu* $2k - 1$ *nad* M nazývame štvorcovú maticu A rádu $2k - 1$ nad množinou $P(M)$, o ktorej platí:

1. Každý člen matice A je buď prázdnou množinou alebo 2-prvkovou podmnožinou množiny M.
2. Pre ľubovoľný riadok (i stĺpec) matice A platí: zjednotením všetkých členov z tohto riadku (resp. stĺpca) je množina M.
3. Každá 2-prvková podmnožina množiny M sa vyskytuje práve raz ako člen matice A.

V tejto definícii sme použili frázu, že matica A je nad množinou $P(M)$. To znamená, že členmi matice A sú podmnožiny množiny M (a nie samotné prvky množiny M, ako to bolo pri latinských štvorcoch). Pre zjednodušenie zápisu roomovských štvorcov pri 2-prvkových množinách $\{x, y\}$ niekedy vynechávame zátvorky $\{\}$. Okolnosť, že určitý člen roomovského štvorca je prázdna množina $\emptyset$, možno naznačiť aj tak (ako sme to robili dosiaľ), že príslušné miesto v štvorci ponecháme prázdne. Tieto dohody sú výhodné najmä vtedy, keď roomovský štvorec nezapisujeme tak, ako sme zapisovali matice (napr. v hranatých zátvorkách), ale keď nakreslíme štvorec aj so všetkými štvorčekmi.

Ľahko si overíme, že matica (45) spĺňa pri $k = 4$ a $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$ všetky podmienky uvedenej definície, teda je roomovským štvorcom rádu 7 nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Voľne možno povedať, že *roomovský štvorec rádu* $2k - 1$ je štvorcová schéma zložená z $2k - 1$ riadkov a $2k - 1$ stĺpcov vyplnená pomocou $2k$ daných prvkov, a to tak, aby každé miesto schémy bolo buď prázdne, alebo obsadené dvoma prvkami, pričom každý riadok i stĺpec obsahuje všetkých $2k$ prvkov a každá dvojica daných $2k$ prvkov sa v schéme vyskytuje práve raz.

Poznamenejme, že niektorí autori roomovský štvorec rádu $2k - 1$ nazývajú i roomovským štvorcom rádu $2k$ (podľa počtu použitých prvkov namiesto počtu riadkov a stĺpcov). Napr. (45) je v tomto zmysle nielen roomovským štvorcom rádu 7, ale i rádu 8.

Teoréma 16. *Nech je A roomovský štvorec rádu $2k - 1$ nad množinou M. Potom pre každý riadok (resp. stĺpec) R matice A platí:*

4. *Každý prvok množiny M sa vyskytuje práve v jednom člene riadku (resp. stĺpca) R.*
5. *Riadok (resp. stĺpec) R obsahuje k dvojíc a $k - 1$ ďalších členov, ktorými sú prázdne množiny.*

Dôkaz urobíme len pre riadky (pre stĺpce je obdobný). Z 2. podmienky definície roomovského štvorca vyplýva, že každý prvok množiny M sa vyskytuje v každom riadku matice A aspoň raz. Keďže množina M má $2k$ prvkov, musí každý riadok obsahovať aspoň k dvojíc. Keby niektorý riadok obsahoval viac než k dvojíc, bol by celkový počet dvojíc (v $2k - 1$ riadkoch roomovského štvorca) väčší než $k(2k - 1)$. To však nie je možné, pretože z $2k$-prvkovej množiny sa dá utvoriť len

$$\binom{2k}{2} = \frac{2k.(2k - 1)}{1.2} = k(2k - 1)$$

dvojíc. Preto každý riadok musí obsahovať presne k dvojíc. Keďže v každom riadku musia byť, ako už vieme, zastúpené všetky prvky množiny M, môže sa tam každý vyskytovať len raz. Ďalej vieme, že v riadku je presne k dvojíc. Zvyšujúcich

$$(2k - 1) - k = k - 1$$

členov sa preto musí rovnať prázdnej množine.

Ake vráťme sa k bridžu. V tejto hre, ktorá svojou intelektuálnou úrovňou a bohatstvom kombinácií býva porovnávaná so šachom, hrajú 4 hráči rozsadení okolo stola a každý z nich dostane pri rozdaní 13 kariet. Hráči sa označujú pomocou svetových strán: N (z anglického north = sever), E (east = východ), S (south = juh) a W (west = západ). Hráči sediaci oproti sebe (napr. N—S) tvoria tzv. linku a spolupracujú oproti druhej linke (E—W), t. j. ide vlastne o zápas dvoch dvojíc.

Na tomto mieste nemáme možnosť vykladať pravidlá tejto zaujímavej hry; obmedzíme sa však na konštatovanie, že v tejto tradičnej spoločenskej forme výsledok hry je značne ovplyvnený rozdaním kariet. Pravé hodnoty bridžu sa zreteľne uplatnia až v súťažnom bridži, pri ktorom sa eliminujú výhody, ktoré získajú hráči rozdaním kariet, takže tam „dobré" karty už prestávajú byť výhodou.

Spomeňme len jednu formu súťažného bridžu, a to súťaž dvojíc. Predstavme si napr., že do súťaže sa prihlásilo 8 dvojíc (t. j. 16 hráčov). Usporiadateľ môže zorganizovať súťaž nasledujúcim spôsobom: Pre hru pripraví 7 stolov; na každý stôl položí škatuľu so 4 priehradkami označenými N, E, S a W po 13 kartách. Každá škatuľa obsahuje pevné rozdanie kariet, ktoré sa po každej hre obnoví a ostáva na tomto stole; naproti tomu dvojice hráčov postupne vystriedajú všetky stoly (a teda všetky rozdania). Dvojiciam sa žrebom pridelia čísla 1, 2, ..., 8 a turnaj sa môže hrať na základe roomovského štvorca (45), v ktorom riadky označujú kolá a stĺpce označujú stoly (rozdania). Napr. v prvom kole sa stretnú dvojice 8—1 pri prvom stole, 5—6 pri druhom, 2—4 pri treťom a 3—7 pri piatom; štvrtý, šiesty a siedmy stôl ostanú prázdne. Dvojice hráčov, ktorých číslo je uvedené na prvom mieste v štvorčeku (v prvom kole 8, 5, 2 a 3) obsadia linku N—S, druhé dvojice obsadia linku E—W. Po skončení celého turnaja sa porovnajú výsledky, ktoré dosiahli dvojice hráčov s tým istým rozdaním (napr. na prvom stole dvojice linky N—S, tj. 8, 6, 7 a 4). Za najhorší výsledok na stole sa neudelí žiaden bod, za lepšie výsledky vždy o 2 body viac (teda najlepšia dvojica na prvom stole na linke N—S dostane 6 bodov a na linke E—W taktiež 6 bodov). Body získané tou-ktorou dvojicou na jednotlivých stoloch sa sčitujú a víťazom turnaja sa stáva dvojica hráčov s najvyšším počtom bodov.

Pokúsme sa preložiť do „bridžového jazyka" vlastnosti 1—5 z definície roomovského štvorca a z teorémy 16. Roomovský štvorec rádu $2k - 1$ zodpovedá bridžovému turnaju $2k$ dvojíc, ktorý sa hrá na $2k - 1$ stoloch a skladá sa z $2k - 1$ kôl, pričom platí:

1. Celý turnaj sa skladá zo zápasov vždy dvoch dvojíc.
2. Ľubovoľná dvojica hrá v každom kole (resp. na každom stole) aspoň raz.
3. Ľubovoľné dve dvojice hráčov sa stretnú v turnaji práve raz.
4. Ľubovoľná dvojica hrá v každom kole (resp. na každom stole) práve raz.
5. V každom kole sa hrá práve na k stoloch (resp. na každom stole sa hrá práve v k kolách).

Uvedené vlastnosti sa ukazujú ako veľmi vhodné pre organizovanie bridžových turnajov. Vzniká otázka, pri akom počte dvojíc hráčov možno takýmto spôsobom zorganizovať bridžový turnaj. Inými slovami, pre ktoré prirodzené čísla k existuje aspoň jeden roomovský štvorec rádu $2k - 1$. Túto otázku sa podarilo vyriešiť až pomerne nedávno:

Teoréma 17 (W. D. Wallis 1973). *Nech je k prirodzené číslo. Roomovský štvorec rádu $2k - 1$ existuje práve vtedy, keď $k \neq 2$ a $k \neq 3$.*

Dôkaz pre jeho komplikovanosť vynechávame.

Z teorémy 17 vyplýva, že pre každý párny počet $2k$ dvojíc hráčov väčší než 6 možno zorganizovať bridžový turnaj pomocou roomovského štvorca rádu $2k - 1$. Pri nepárnom počte $2k - 1$ dvojíc (kde $k \geq 4$) možno použiť taktiež roomovský štvorec rádu $2k - 1$ s tým, že sa vynechajú dvojice, v ktorých sa vyskytuje pevne zvolený prvok (napr. $2k$). Počet stolov a kôl $(2k - 1)$ ostane nezmenený. Malé zmeny nastanú vo vlastnostiach 2, 4 a 5. Napr. v každom kole bude mať jedna dvojica „voľno“ a pri každom stole (rozdaní) sa vystriedajú všetky dvojice hráčov okrem jednej.

Cvičenia

19. Nájdite aspoň jeden roomovský štvorec rádu 9 (t. j. zostavte hrací plán pre bridžový turnaj 10 dvojíc — označte ich 0, 1, 2, ..., 9).

20. Dokážte, že neexistuje roomovský štvorec rádu 3.