V. kapitola. Grécko-latinské štvorce alebo ako 36 oficierov nesplnilo rozkaz

V. kapitola

GRÉCKO-LATINSKÉ ŠTVORCE
alebo
AKO 36 OFICIEROV NESPLNILO ROZKAZ

Stalo sa to vraj niekedy v 18. storočí. Na slávnosti malo nastúpiť 36 dôstojníkov (vtedy ich ešte volali oficiermi) povyberaných zo šiestich plukov, a to tak, aby z každého pluku bolo vybraných 6 oficierov rôznych hodností (v dnešnej terminológii by to bol plukovník, podplukovník, major, nadporučík, poručík a podporučík). Oficieri mali utvoriť štvorec zložený zo 6 radov po 6 oficieroch, a to tak, aby v každom rade i zástupe (matematik by povedal: v každom riadku a stĺpci) bolo po 1 oficierovi z každého pluku i z každej hodnosti. Oficieri však nesplnili rozkaz — jednoducho sa im nepodarilo vymyslieť spôsob nástupu.

Generál, ktorý slávnosť organizoval, sa nahneval a zo slávnosti odvolal všetkých oficierov šiesteho pluku a všetkých podporučíkov. Potom už oficieri vedeli nastúpiť predpísaným spôsobom. Ak označíme plukovníkov písmenom a, podplukovníkov — b, majorov — c, nadporučíkov — d, poručíkov — e a pluky označíme gréckymi písmenami $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, nástupový tvar vyzeral takto:

$$(37) \qquad \begin{bmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma & d\delta & e\varepsilon \\ b\varepsilon & c\alpha & d\beta & e\gamma & a\delta \\ c\delta & d\varepsilon & e\alpha & a\beta & b\gamma \\ d\gamma & e\delta & a\varepsilon & b\alpha & c\beta \\ e\beta & a\gamma & b\delta & c\varepsilon & d\alpha \end{bmatrix}$$

(Symbol $b\varepsilon$ značí podplukovníka z 5. pluku, $c\alpha$ majora z 1. pluku a pod.) Generál bol tento raz spokojný. Nebol však spokojný jeden z najgeniálnejších matematikov, L. Euler, ktorý sa okolo r. 1779 začal *úlohou o 36 oficieroch* zaoberať a dospel k názoru, že je neriešiteľná; toto sa však podarilo dokázať až r. 1900 G. Tarrymu.

Čitateľ, ktorý si prečítal prvé dve kapitoly tejto knihy, sa zaiste nebude čudovať tomu, že tento útvar sa nazýva *grécko-latinský štvorec* (vyskytujú sa v ňom grécke i latinské písmená) rádu 5 (má 5 riadkov a 5 stĺpcov). Nebude sa čudovať ani tomu, že sme okraje štvorca označili hranatými zátvorkami. Ide znovu o maticu; jej členmi sú v tomto prípade dvojice písmen (jedno latinské a jedno grécke). Namiesto matice (37) by sme však mohli napísať aj dve matice

$$(38)\qquad \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \delta & \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \delta & \varepsilon & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \alpha \end{bmatrix}$$

ktoré sú latinskými štvorcami (hoci členy druhého sú označené gréckymi písmenami), a to takými, že na zodpovedajúcich si miestach oboch matíc sa postupne vystriedajú všetky dvojice zložené z jedného z latinských písmen a, b, c, d, e a z jedného z gréckych písmen α, β, γ, δ, ε. (Takéto dva latinské štvorce budeme nazývať *ortogonálne*.)

Situácia by sa však podstatne nezmenila, keby sme aj v druhom štvorci použili latinské písmená a, b, c, d, e alebo keby sme na označenie členov v obidvoch latinských štvorcoch použili číslice, ako to obyčajne budeme robiť.

Vidíme, že pojem grécko-latinského štvorca môžeme previesť na pojem dvoch ortogonálnych latinských štvorcov, ktorý si teraz budeme presne definovať:

Latinské štvorce A a B rádu n nazývame *ortogonálne*, ak n^2 usporiadaných dvojíc $[A(i, j), B(i, j)]$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, je navzájom rôznych (takže sú to všetky usporiadané dvojice $[a, b]$, kde $a \in M_A$, $b \in M_B$, pričom M_A a M_B sú množiny, nad ktorými sú dané latinské štvorce A a B).

Ako sme videli, možno predpokladať, že obidva latinské štvorce sú nad tou istou množinou. Napr. latinské štvorce (38) po zmene označenia môžeme uvažovať nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a zapísať takto:

$$(39) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Čitateľ, ktorý si pozorne prezrie ortogonálne latinské štvorce (39), ľahko nájde pravidlo, pomocou ktorého sme ich zostavili a zistí, že tento „trik“ možno použiť pri ľubovoľnom nepárnom ráde:

Teoréma 13 (L. Euler 1782). *Pre každé nepárne prirodzené číslo n existujú dva ortogonálne latinské štvorce rádu n.*

Dôkaz vykonáme tak, že dva ortogonálne latinské štvorce A_1 a A_2 priamo zostrojíme tým, že definujeme ich členy v i-tom riadku a j-tom stĺpci ($i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$):

$$A_1(i, j) = \begin{cases} i + j - 1, \text{ ak } i + j - 1 \leq n, \\ i + j - 1 - n, \text{ ak } i + j - 1 > n. \end{cases}$$

$$A_2(i, j) = \begin{cases} i - j + 1, \text{ ak } i - j + 1 > 0, \\ i - j + 1 + n, \text{ ak } i - j + 1 \leq 0. \end{cases}$$

Postupne sa ľahko presvedčíme, že platí:

1. Všetky členy $A_1(i, j)$ aj $A_2(i, j)$ sú celé čísla.
2. Pre každé $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ máme $1 \leq A_1(i, j) \leq n$, $1 \leq A_2(i, j) \leq n$.
3. A_1 a A_2 sú latinské štvorce.
4. Latinské štvorce A_1 a A_2 sú ortogonálne.

Odporúčama čitateľovi, aby si podrobne vykonal tieto štyri body dôkazu.

Podstatne ťažšia je otázka, či platí obdobná teoréma pre párne rády. Experimentálne zistíme ľahko len to, že neexistujú dva ortogonálne latinské štvorce rádu 2, ale existujú pre rád 4, napr. tieto:

$$(40) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ako sme už povedali, dva ortogonálne latinské štvorce rádu 6 neexistujú, ale dôkaz tohto tvrdenia je obťažný. Euler sám dokázal, že existujú dva ortogonálne latinské štvorce ľubovoľného rádu $4k$ (kde k je prirodzené číslo) a vyslovil hypotézu, že neexistujú dva ortogonálne latinské štvorce žiadneho rádu $4k - 2$ (kde k je opäť prirodzené číslo). Ako vieme, hypotéza platí pre $k = 1$ a $k = 2$. R. 1958 však R. C. Bose a S. S. Shrikhande zostrojili dva ortogonálne latinské štvorce rádu 22 a o rok neskôr E. T. Parker zostrojil ortogonálne latinské štvorce rádu 10, čím bola Eulerova hypotéza vyvrátená pre $k = 6$ a $k = 3$. Dnes už vieme, že táto hypotéza neplatí pre žiadne $k > 2$ a spoločným úsilím mnohých matematikov sa podarilo prísť k nasledujúcemu výsledku, ktorému by sa asi Euler veľmi začudoval:

Teoréma 14 (R. C. Bose, S. S. Shrikhande, E. T. Parker 1960). *Dva ortogonálne latinské štvorce rádu n existujú práve vtedy, keď $n \neq 2$ a $n \neq 6$.*

Dôkaz tu nemôžeme uviesť pre jeho veľkú obťažnosť.

Ako sme spomínali v I. kapitole, latinské štvorce nám umožňujú robiť experimenty, pri ktorých sú poľnohospodárske pozemky usporiadané vo dvoch smeroch a do úvahy sa berie ešte ďalšia skutočnosť — znak (napr. druh pšenice alebo druh hnojenia). Môžeme však robiť aj pokusy, ktoré nemajú nič spoločného s geometrickými štvorcami, pri ktorých sa daný súbor (napr. kravy, pri ktorých zisťujeme dojivosť) triedi súčasne podľa troch znakov (napr. stáda, do ktorých sú kravy rozdelené, obdobia, v ktorých sa experimenty robia a druh krmiva, ktoré kravy dostávajú). Podobne môžeme využiť aj grécko-latinské štvorce pri poľnohospodárskych pokusoch na štvorcových parcelách, pričom skúmame súčasne dva ďalšie znaky (napr. odrodu rastliny i druh hnojenia) alebo pri pokusoch bez názornej geometrickej interpretácie, kde daný súbor (napríklad žiakov skúmaných so zreteľom na študijné výsledky) triedime súčasne podľa štyroch znakov (napr. obdobie, trieda a rôzne metodiky vyučovania jazykov v dvoch jazykoch). Vzniká otázka, či možno počet znakov takýmto spôsobom ešte zväčšovať. Odpoveď je vo všeobecnosti kladná, ak pri každom znaku rozdelíme súbor na rovnaký a vhodne zvolený počet skupín (napr. 5, keď je možné skúmať súbor až podľa 6 znakov). K tomu však potrebujeme pojem navzájom ortogonálnych latinských štvorcov.

Nech je k prirodzené číslo. Hovoríme, že latinské štvorce $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sú *navzájom ortogonálne*, ak pre ľubovoľné také prirodzené čísla p, q, že $1 \leq p < q \leq n$ platí: latinské štvorce A_p a A_q sú ortogonálne. Napr. latinské štvorce

$$(41) \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

rádu 5 sú navzájom ortogonálne, ako sa čitateľ ľahko presvedčí. Keď chceme, môžeme ich napísať aj vo forme jedinej matice

$$\begin{bmatrix} 1111 & 2222 & 3333 & 4444 & 5555 \\ 2345 & 3451 & 4512 & 5123 & 1234 \\ 3524 & 4135 & 5241 & 1352 & 2413 \\ 4253 & 5314 & 1425 & 2531 & 3142 \\ 5432 & 1543 & 2154 & 3215 & 4321 \end{bmatrix}$$

Z teorémy 14 vieme, že pre každé prirodzené číslo n rôzne od 2 a od 6 existujú aspoň dva ortogonálne latinské štvorce. V poslednom čase sa veľa úsilia venovalo určeniu maximálneho počtu $N(n)$ navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n. Z teorémy 14 vieme, že

$N(2) = N(6) = 1$ a $N(n) \geq 2$ pre $n \neq 2$, $n \neq 6$. Z existencie navzájom ortogonálnych latinských štvorcov (41) vyplýva, že $N(5) \geq 4$. V skutočnosti platí $N(5) = 4$, čo vyplýva z nasledujúceho výsledku:

Teoréma 15. *Pre každé prirodzené číslo $n > 1$ platí $N(n) \leq n - 1$, t. j. neexistuje viac než $n - 1$ navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n.*

Poznámka. Teoréma neplatí pre $n = 1$, lebo ľubovoľné dva latinské štvorce rádu 1 sú ortogonálne, takže môžeme utvoriť ľubovoľne mnoho navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu 1. Túto skutočnosť môžeme symbolicky vyjadriť takto: $N(1) = \infty$ (čítaj: hodnota $N(1)$ je nekonečná).

Dôkaz teorémy 15. Predpokladajme, že je dané prirodzené číslo k a navzájom ortogonálne latinské štvorce $A_1, A_2, \ldots, A_k$ rádu $n > 1$. Treba dokázať, že $k \leq n - 1$.

Najprv dané latinské štvorce „normalizujeme". Ak $s \in \{1, 2, \ldots, k\}$, nahraďme v latinskom štvorci A_s všetky členy, ktoré sa rovnajú členu $A_s(1, 1)$, číslom 1, všetky členy rovnajúce sa členu $A_s(1, 2)$ číslom 2, atď. až všetky členy rovnajúce sa členu $A_s(1, n)$ nahradíme číslom n. Tým vznikne z každého A_s normalizovaný latinský štvorec rádu n, ktorý označíme znakom B_s (pre $s = 1, 2, \ldots, n$).

Latinské štvorce $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sú navzájom ortogonálne. Keby totiž dva z nich, povedzme B_s a B_t ($1 \leq s < t \leq k$) neboli ortogonálne, vznikli by z členov na dvoch rôznych odpovedajúcich si miestach v B_s a B_t dve rovnaké usporiadané dvojice, t. j. $[B_s(i, j), B_t(i, j)] = [B_s(I, J), B_t(I, J)]$ pre nejaké $i, j, I, J \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pričom $[i, j] \neq [I, J]$. V tom prípade by však aj v pôvodných latinských štvorcoch $[A_s(i, j), A_t(i, j)]$ a $[A_s(I, J), A_t(I, J)]$ boli rovnaké usporiadané dvojice, t. j. A_s a A_t by neboli ortogonálne, čo je spor s predpokladom.

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ sú teda normalizované navzájom ortogonálne latinské štvorce. Keďže $n > 1$, existujú v týchto latinských štvorcoch druhé riadky a v nich prvé členy $B_1(2, 1), B_2(2, 1), \ldots, B_k(2, 1)$. Tieto členy sú rôzne od 1, lebo číslo 1 je nad nimi (sú to normalizované latinské štvorce!). Ďalej tieto členy sú navzájom rôzne, pretože, vzhľadom na ortogonálnosť a normalizovanosť, rovnosť odpovedajúcich si členov môže nastať len v prvom riadku. Zistili sme teda, že členy $B_1(2, 1), B_2(2, 1), \ldots, B_k(2, 1)$ sú navzájom rôzne a každý z nich sa rovná niektorému z čísel $2, 3, \ldots, n$. Keďže týchto čísel je len $n - 1$, musí byť $k \leq n - 1$, čo sme mali dokázať.

Môžeme sa opýtať, pre ktoré n sa dosahuje horný odhad z teorémy 15, t. j. kedy platí $N(n) = n - 1$? (Vtedy hovoríme, že príslušné navzájom ortogonálne latinské štvorce tvoria *kompletnú sústavu.*) Lahko zistíme, že to platí pre $n = 2, 3, 4$ a 5. Overme si to:

Zrejme $N(2) = 1$. Teoréma 13 nám poskytuje dva ortogonálne latinské štvorce rádu 3, napr.

$$(42) \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

takže $N(3) = 2$. Lahko zostrojíme 3 navzájom ortogonálne latinské štvorce rádu 4, napr. takto:

$$(43) \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

teda $N(4) = 3$. Rovnosť $N(5) = 4$ vyplýva z toho, že latinské štvorce (41) sú navzájom ortogonálne.

Rovnosť $N(n) = n - 1$ však neplatí všeobecne. Už vieme, že neplatí pre $n = 6$ (lebo $N(6) = 1$). Je dokázané, že neplatí v mnohých prípadoch, napr. pre $n = 6$, 14, 21, 22, 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, 62, 66, 69, 70, 77, 78, 86, 93, 94, ... Je ďalej veľká skupina hodnôt n, o ktorých nie je dosiaľ rozhodnuté, či rovnosť $N(n) = n - 1$ platí alebo nie. Sú to napr. hodnoty $n = 10$, 12, 15, 18, 20, 24, 26, 28, 34, 35, 36, 39, 40, 44, 45, 48, 50, 51, 52, 55, 56, 58, 60, 63, 65, 68, 72, 74, 75, 76, 80, 82, 84, 85, 87, 88, 90, 91, 92, 95, 96, 98, 99, 100, ...

Uveďme, čo je známe o $N(n)$ pre $n \leq 30$ (ak nie je známa presná hodnota, uvádzame celý interval možností):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$N(n)$	∞	1	2	3	4	1	6	7	8	2 až 9	10	5 až 11	12	2 až 10

n	15	16	17	18	19	20	21	22
$N(n)$	3 až 14	15	16	2 až 17	18	3 až 19	4 až 17	2 až 18

n	23	24	25	26	27	28	29	30
$N(n)$	22	3 až 23	24	2 až 25	26	3 až 27	28	2 až 26

Ako vidno, ostáva ešte veľa otvorených otázok, pokiaľ ide o čísla $N(n)$. V posledných rokoch bolo však v tomto smere dosiahnutých veľa čiastkových výsledkov. Uveďme z nich najdôležitejšie:

Z teorémy 14 vyplýva, že ak $n \geq 7$, tak $N(n) \geq 2$. Ďalej platí:

1. Ak $n \geq 43$, tak $N(n) \geq 3$ (C. C. Shih 1965, R. M. Wilson 1974).

2. Ak $n \geq 53$, tak $N(n) \geq 4$ (R. Guérin 1966).
3. Ak $n \geq 63$, tak $N(n) \geq 5$ (H. Hanani 1970).
4. Ak $n \geq 91$, tak $N(n) \geq 6$ (R. M. Wilson 1974).
5. Existuje také prirodzené číslo k, že pre všetky $n \geq k$ platí $N(n) \geq \sqrt[17]{n}$ (R. M. Wilson 1974).
6. Ak $n = 4k + 1$ alebo $n = 4k + 2$ (kde k je prirodzené číslo) a ak sa n nedá napísať v tvare $n = a^2 + b^2$, kde a, b sú celé čísla, tak $N(n) \neq n - 1$. (R. H. Bruck a H. J. Ryser 1949).
7. Ak $N(n) \neq n - 1$, $n \neq 1$, tak $N(n) < n - 1 - \sqrt[4]{2n}$ (R. H. Bruck 1963).
8. Ak $n = p^\alpha q^\beta \ldots r^\gamma$ je kanonický rozklad prirodzeného čísla $n > 1$ na prvočísla, tak $N(n) \geq \min\{p^\alpha, q^\beta, \ldots, r^\gamma\} - 1$ (H. F. MacNeish 1922).

Dôležitý je najmä posledný výsledok, ktorý (ak berieme do úvahy teorému 15) je zovšeobecnením nasledujúceho tvrdenia: Ak je n prirodzenou mocninou prvočísla, tak $N(n) = n - 1$ (a teda existuje kompletná sústava navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n).

Veľkú pozornosť matematikov budí najmä najmenší otvorený prípad $n = 10$. Je možné, že existuje 9 navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu 10. Zatiaľ sa však nikomu nepodarilo nájsť ani tri, hoci pri výskume boli použité i samočinné počítače.

Cvičenia

16. Možno usporiadať do 4 radov po 4 kartách esá, kráľov, horníky a dolníky zo všetkých 4 farieb (červene, zelene, žalude, gule) tak, aby v každom vodorovnom i zvislom rade bolo po jednej karte z každej hodnoty i z každej farby?

17. Nájdite všetky normalizované latinské štvorce ortogonálne k latinskému štvorcu a) (8); b) (9); c) (10); d) (11).

18. Pokúste sa zovšeobecniť konštrukciu latinských štvorcov (41) a tým dokázať: pre každé prvočíslo n existuje $n - 1$ (teda kompletná sústava) navzájom ortogonálnych latinských štvorcov rádu n.