Latinské štvorce

II. kapitola. Latinské pravouholníky alebo o práškoch na spanie

In: Juraj Bosák (author): Latinské štvorce. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 18–31.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403867

II. kapitola

LATINSKÉ PRAVOUHOLNÍKY
alebo
O PRÁŠKOCH NA SPANIE

Predstavme si, že máme k dispozícii veľký počet ľudí trpiacich nespavosťou a že vo výskume bolo pripravených 7 druhov prášku na spanie, ktorý sú tieto osoby ochotné na sebe vyskúšať. Vzniká otázka, akým spôsobom máme usporiadať experiment. Jedna z možností je táto:

Rozdelíme ľudí do 7 približne rovnakých skupín a experiment rozvrhneme do 7 časových období (napr. týždňov) s použitím latinského štvorca (3). Obdobia budú zodpovedať riadkom, skupiny osôb stĺpcom a prášky členom latinského štvorca. Napr. v prvom týždni 1. skupina bude užívať prášok číslo 6, 2. skupina prášok č. 2 atď., v zhode s prvým riadkom latinského štvorca (3). V druhom týždni vymeníme prášky, ktoré majú používať jednotlivé skupiny podľa druhého riadku latinského štvorca: 1. skupina bude skúšať prášok č. 1, 2. skupina prášok č. 3 atď. Po siedmich týždňoch budeme mať dostatok materiálu na to, aby sme zistili, ktorý prášok priniesol najlepšie výsledky.

Môže sa však stať, že experiment budeme musieť prerušiť už po 6. týždni. V tomto prípade priebeh pokusu bude zodpovedať schéme

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \tag{14}$$

ktorú dostaneme z latinského štvorca (3) vynechaním posledného riadku. Keďže má obdĺžnikový tvar, 6 riadkov a 7 stĺpcov, hovoríme jej *latinský obdĺžnik* typu 6×7 (nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$).

Menej spoľahlivé výsledky dostávame, ak experiment musíme skončiť už po troch týždňoch, podľa latinského obdĺžnika typu 3×7:

$$(15) \qquad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Príčinou nespoľahlivosti nie je len malý počet riadkov (teda týždňov), ale aj ich nevhodná skladba; napr. v 1. a 4. stĺpci sú tie isté prvky 1, 5, 6, t. j. prvá a štvrtá skupina osôb skúša tie isté prášky. Tento druhý nedostatok sa dá odstrániť tým, že si zvolíme latinský obdĺžnik, ktorý takúto nevýhodu nemá, napr.

$$(16) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

ktorého stĺpce majú tú zaujímavú vlastnosť, že obsahujú všetky dvojice utvorené z prvkov 1, 2, ..., 7 (tzv. *kombinácie* druhej triedy zo siedmich prvkov), a to každú práve raz (zatiaľ, čo latinský obdĺžnik (15) obsahuje napr. dvojicu $\{2, 3\}$ dvakrát — v 2. a 7. stĺpci, zato napr. dvojicu $\{1, 4\}$ ani raz v niektorom stĺpci) — je to tzv. *steinerovský systém trojíc* zo 7 prvkov, pomenovaný podľa nemeckého geometra Jakoba Steinera (1796—1863), ktorý sa r. 1853 takýmito systémami zaoberal.

Niekedy budeme potrebovať aj spoločný názov pre latinské štvorce a latinské obdĺžniky. V zhode s geometrickým názvoslovím budeme ich volať *latinské pravouholníky.*

Aby sme mohli pojem latinského pravouholníka presne definovať, povieme si najprv niekoľko základných poznatkov z teórie matíc. Potom budeme môcť dať presnejší význam takým pojmom, ktoré sme doteraz „ilegálne“ používali, napr. riadok a stĺpec; slovo „schéma“ budeme môcť nahradiť presnejším výrazom „matica“. Aby čitateľ mal už vopred predstavu o tom, čo chceme definovať, uvedieme príklady matíc:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & -6 & \sqrt{2} \\ 1 & 3 & 3,14 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ a \\ d \end{bmatrix}$$

Prvá matica má typ 2×3, druhá 3×3, tretia 5×1 (pokúste sa na tomto základe definovať, čo budeme rozumieť pod typom matice!). Formálne tieto matice vyzerajú ako tabuľky, ale nebudeme ich definovať ako tabuľky, lež ako funkcie (zobrazenia), ktoré usporiadaným dvojiciam (o ktorých sa neskôr ukáže, že označujú poradové číslo riadku a stĺpca) priraďujú nejaké prvky, ktoré sú na tom-ktorom mieste. Napr. prvá z horeuvedených matíc priraďuje usporiadanej dvojici [2, 1] číslo 5 (lebo v prvej matici je v 2. riadku a 1. stĺpci číslo 5), druhá matica prvok 1 a tretia prvok b.

Teraz môžeme vysloviť definíciu matice:

Nech sú dané prirodzené čísla m, n a množina M. *Maticou typu $m \times n$ nad množinou M* rozumieme funkciu A, ktorá každej takej usporiadanej dvojici $[i, j]$ prirodzených čísel, že $i \leq m$, $j \leq n$, priraďuje prvok množiny M. Tento prvok budeme označovať znakom $A(i, j)$. Maticu A budeme zapisovať takto:

$$(17) \qquad A = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) & \dots & A(1,n) \\ A(2,1) & A(2,2) & \dots & A(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A(m,1) & A(m,2) & \dots & A(m,n) \end{bmatrix}$$

Ak $m \neq n$, matica A sa nazýva *obdĺžniková matica (typu $m \times n$)*. Ak $m = n$, matica A sa nazýva *štvorcová matica (rádu n)*. Prvky $A(i, j)$, priradené usporiadaným dvojiciam $[i, j]$, sa nazývajú *členy matice A*.
Napr.

$$(18) \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

je obdĺžniková matica typu 3×4 nad množinou $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ — nie je dôležité, že niektoré prvky množiny M (a to 2 a 10) nie sú členmi matice A. (Pochopiteľne, za množinu M by sme mohli vziať tiež napr. množinu $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ alebo hoci aj množinu všetkých reálnych čísel.) Členy $A(1, 1)$, $A(2, 3)$ a $A(3, 1)$ sa rovnajú 3 atď.

Uveďme pre informáciu čitateľa ešte niekoľko poznámok, ktoré mu môžu byť užitočné pri štúdiu ďalšej literatúry:

1. V literatúre sa často pri zapisovaní matíc v tvare (17) namiesto hranatých zátvoriek [ ] používajú okrúhle zátvorky ( ) alebo dvojité čiary $\| \ \|$.

2. Je samozrejmé, že ak maticu označíme znakom B, jej členy budeme označovať symbolmi $B(i, j)$. V literatúre namiesto $A(i, j)$, $B(i, j)$ a pod. sa často používa $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ atď.

3. Namiesto slova „rád“ (štvorcovej matice) sa používa aj „stupeň“. Namiesto „člen matice“ sa často hovorí jednoducho „prvok matice“.

Ako sme už predtým poznamenali, riadky a stĺpce môžu byť definované bez použitia trochu nejasného pojmu „schémy“. Napr. i-tým *riadkom matice* (17) budeme rozumieť funkciu, ktorá sa dostane z funkcie A zúžením jej definičného oboru na usporiadané dvojice $[i, j]$, kde na prvom mieste stojí (pevne zvolený) prvok $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Podobne možno definovať j-tý *stĺpec matice* A. Napr. druhý riadok matice (18) je funkcia, ktorá priraďuje usporiadanej dvojici

$[2, 1]$ číslo 1,
$[2, 2]$ číslo 1,
$[2, 3]$ číslo 3,
$[2, 4]$ číslo 4

a inde nie je definovaná.

Teraz už môžeme pristúpiť k definícii latinského pravouholníka.

Nech sú dané prirodzené čísla m, n a množina M, ktorá má práve n prvkov (skrátene: *n-prvková množina*). *Latinským pravouholníkom typu $m \times n$ nad množinou M* rozumieme maticu A typu $m \times n$ nad množinou M, pričom platí:

1. v žiadnom riadku matice A nie je ten istý prvok priradený rôznym usporiadaným dvojiciam;
2. v žiadnom stĺpci matice A nie je ten istý prvok priradený rôznym usporiadaným dvojiciam.

Podmienku 1 (resp. 2) možno stručne vyjadriť takto: každý riadok (resp. stĺpec) matice A je prostá funkcia.

V prípade $m < n$ latinský pravouholník typu $m \times n$ nazývame *latinským obdĺžnikom*. V prípade $m = n$ ho nazývame *latinským štvorcom rádu n* (čím spresňujeme definíciu z I. kapitoly). Ľahko vidieť, že nemôže existovať latinský pravouholník typu $m \times n$, kde $m > n$; takýto pravouholník by musel obsahovať stĺpce zložené z m členov, čo je nemožné, lebo k dispozícii máme len n prvkov množiny M, takže stĺpce nemôžu obsahovať viac než n navzájom rôznych prvkov množiny M.

Latinský pravouholník typu $1 \times n$ (teda s jediným riadkom) jednoznačne odpovedá *poradiu* prvkov vybraných po jednom z množiny M. Keďže M má práve n prvkov, existuje práve $n!$ latinských pravouholníkov typu $1 \times n$ nad množinou M.

Jestvuje jednoduchá metóda ako zostrojiť latinský obdĺžnik typu $m \times n$ (pri $m < n$): najprv zostrojíme latinský štvorec rádu n a použijeme m jeho riadkov (ostatné riadky vynecháme). Možno však namietnuť, že táto metóda príliš pripomína známu metódu, ako chytiť leva (chytiť tri levy a dva vypustiť...). Preto sa zaoberajme radšej obrátenou otázkou: kedy latinské obdĺžniky možno pridaním ďalších riadkov doplniť na latinské štvorce? Dá sa dokázať prekvapujúci fakt, že to ide vždy. Dokonca platí:

Teoréma 2. *Ku každému latinskému obdĺžniku typu* $m \times n$ *možno aspoň* $(n - m)!$ *spôsobmi pridať ďalší riadok tak, aby vznikol latinský pravouholník typu* $(m + 1) \times \times n$.

Dôkaz je pomerne náročný, preto ho vynechávame. Čitateľ ho nájde napr. v knihe M. Halla [3], teoréma 5.1.5. Uvedieme však niektoré dôsledky tejto teorémy a dokážeme ich za predpokladu, že teoréma platí.

Dôsledok 1. *Nech* p, q, n *sú také prirodzené čísla, že* $1 \leq p < q \leq n$. *Potom platí: Každý latinský pravouholník typu* $p \times n$ *možno aspoň*

$$(n - p)!(n - p - 1)!(n - p - 2)! \ldots$$
$$\ldots (n - q + 2)!(n - q + 1)!$$

spôsobmi doplniť na latinský pravouholník typu $q \times n$. *Špeciálne, každý latinský pravouholník typu* $p \times n$ *možno aspoň*

$$(n - p)!(n - p - 1)!(n - p - 2)!\dots 2!1!$$

spôsobmi doplniť na latinský štvorec rádu n.

Dôkaz. Prvé tvrdenie vyplýva z teorémy 2 jej $(q - p)$-násobným použitím, a to pre $m = p, p + 1, p + 2, \dots, q - 2, q - 1$. Druhé tvrdenie vyplýva z prvého pre $q = n$.

Dôsledok 2. *Pre ľubovoľné také prirodzené čísla* m, n, *že* $m \leq n$, *existuje aspoň*

$$n!(n - 1)!(n - 2)!\dots(n - m + 2)!(n - m + 1)!$$

latinských pravouholníkov typu $m \times n$ *nad množinou* $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dôkaz. Pre $m = 1$ tvrdenie platí, lebo existuje presne $n!$ latinských pravouholníkov typu $1 \times n$ nad množinou $\{1, 2, \dots, n\}$. Ak $m \geq 2$, podľa dôsledku 1 pre $p = 1$, $q = m$ každý z $n!$ latinských pravouholníkov typu $1 \times n$ nad množinou $\{1, 2, \dots, n\}$ možno aspoň

$$(n - 1)!(n - 2)!\dots(n - m + 2)!(n - m + 1)!$$

spôsobmi doplniť na latinský pravouholník typu $m \times n$. Z toho vyplýva naše tvrdenie.

Dôsledok 3. (M. Hall 1948). *Pre ľubovoľné prirodzené číslo* n *existuje aspoň* $n!\,(n - 1)!(n - 2)!\dots 2!1!$ *latinských štvorcov rádu* n *nad množinou* $\{1, 2, \dots, n\}$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z dôsledku 2, ak položíme $m = n$.

Dôsledok 4. *Pre ľubovoľné prirodzené číslo n o počte L_n latinských štvorcov rádu n nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ platí:*

$$n(n-1)^2 (n-2)^3 (n-3)^4 \ldots 3^{n-2} 2^{n-1} 1^n \leq L_n \leq$$
$$\leq n(n-1)^3 (n-2)^5 (n-3)^7 \ldots 3^{2n-5} 2^{2n-3} 1^{2n-1}.$$

Dôkaz. Dolný odhad (t. j. prvá nerovnosť) je len iným spôsobom prepísaný dôsledok 3. Horný odhad ľahko dokážeme, ak latinský štvorec tvoríme postupne po riadkoch a pri napísaní každého člena ohraničíme zhora počet možností, ktorými to možno urobiť; nakoniec počet týchto možností vynásobíme.

Latinský pravouholník typu $m \times n$ nazývame *normalizovaný*, ak jeho prvý riadok je

$$[1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n];$$

ak okrem toho jeho prvý stĺpec je

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ldots \\ m \end{bmatrix}$$

latinský pravouholník nazývame *redukovaný*. Napr. latinský obdĺžnik typu 2×4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

je normalizovaný, ale nie je redukovaný.

Teoréma 3. *Nech m a n sú prirodzené čísla, $m \leq n$. Nech $R(m, n)$ označuje počet redukovaných, $N(m, n)$ — počet normalizovaných a $L(m, n)$ — počet všetkých latin-*

ských pravouholníkov typu $m \times n$ nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$. Potom platí:

$$L(m, n) = n!N(m, n) , \tag{19}$$

$$N(m, n) = \frac{(n-1)!}{(n-m)!} R(m, n) , \tag{20}$$

$$L(m, n) = \frac{n!\,(n-1)!}{(n-m)!} R(m, n) . \tag{21}$$

Poznámka. Z (21) pri $m = n$ dostávame tvrdenie teorémy 1.

Dôkaz teorémy 3. Z každého normalizovaného latinského pravouholníka typu $m \times n$ môžeme permutáciou jeho stĺpcov utvoriť $n!$ rôznych latinských pravouholníkov rovnakého typu, pričom z rôznych normalizovaných latinských pravouholníkov zrejme vzniknú opäť rôzne latinské pravouholníky. Zrejme každý latinský pravouholník môže vzniknúť permutáciou stĺpcov práve z jedného normalizovaného latinského pravouholníka. Preto platí (19).

Keďže z (19) a (20) vyplýva (21), stačí dokázať (20). Zrejme (20) platí v prípade $m = 1$. Preto predpokladajme, že $m \geq 2$.

Z každého redukovaného latinského pravouholníka A typu $m \times n$ môžeme dostať

$$(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{(n-1)!}{(n-m)!} \tag{22}$$

normalizovaných latinských pravouholníkov typu $m \times n$ takto:

Zvolíme usporiadanú skupinu $[k_2, k_3, \ldots, k_m]$ $m - 1$ rôznych čísel vybraných z čísel $2, 3, \ldots, n$ (to je tzv.

variácia ($m - 1$)-ej triedy z prvkov $2, 3, \ldots, n$ bez opakovania). Zrejme k_2 možno zvoliť $n - 1$ spôsobmi, k_3 $n - 2$ spôsobmi, atď. až k_m možno zvoliť $n - m + 1$ spôsobmi, takže celú usporiadanú skupinu možno zvoliť počtom spôsobov (22). Utvorme poradie $[k_1, k_2, \ldots, k_m, k_{m+1}, \ldots, k_n]$ čísel $1, 2, \ldots, n$ takto: položme $k_1 = 1$; k_2 až k_m ponechajme ako doteraz; za k_{m+1} až k_n zvoľme ostatné z čísel $1, 2, \ldots, n$, v poradí od najmenšieho po najväčšie. Nahraďme teraz v A všetky dvojky číslom k_2, trojky číslom k_3 atď., až všetky čísla n číslom k_n. Dostaneme nový latinský pravouholník. Vhodnou permutáciou jeho stĺpcov vznikne normalizovaný latinský pravouholník. Ľahko zistíme, že týmto postupom vznikne každý latinský pravouholník typu $m \times n$ nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ práve z jedného redukovaného (spätný postup je totiž jednoznačný). To dokazuje teorému.

Zrejme platí pre ľubovoľné prirodzené čísla m a n:

$R(m, n) = 0$, ak $m > n$,
$R(n, n) = R_n$ (počet redukovaných latinských štvorcov rádu n),
$R(1, n) = 1$.

Ľahko sa tiež zistí, že pre $n > 1$ platí:

$$R(n - 1, n) = R_n .$$

Vzhľadom na (20) miesto vzorcov pre $R(m, n)$, stačí nájsť vzorce pre $N(m, n)$. V ďalších dvoch kapitolách uvedieme vzorce pre $N(2, n)$ a $N(3, n)$. Podľa (20) platí

$$R(2, n) = \frac{N(2, n)}{n - 1},$$

$$R(3, n) = \frac{N(3, n)}{(n - 1)(n - 2)},$$

takže potom budeme mať vlastne aj vzorce pre $R(2, n)$ a $R(3, n)$.

Značnú pozornosť pri výskume latinských pravouholníkov venovali matematici otázke, kedy možno danú maticu A typu $r \times s$ rozšíriť pridaním ďalších riadkov a stĺpcov na latinský štvorec predpísaného rádu n. Zrejme nutnou podmienkou je to, aby boli splnené obidva body z definície latinského pravouholníka. To však ešte nestačí. Napr. ľahko zistíme, že maticu

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

nielen, že nemožno rozšíriť na latinský štvorec rádu 4 (čo je samozrejmé, lebo obsahuje 5 rôznych členov) ale ani na latinský štvorec rádu 5 a 6. Možno ju však rozšíriť na latinský štvorec rádu 7, napr. takto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Všeobecné kritérium pre „vnorenie“ matíc do latinských štvorcov predpísaného rádu vyzerá takto:

Teoréma 4. (H. J. Ryser 1951). *Nech sú dané prirodzené čísla r, s, n (pričom $r \leq n$, $s \leq n$) a matica A typu $r \times s$ nad n-prvkovou množinou $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Nech žiaden riadok ani stĺpec matice A neobsahuje dva rovnaké* *prvky ako členy. Pre $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme znakom $V(i)$ počet výskytov prvku p_i v matici A. Potom platí: Maticu A možno pridaním ďalších riadkov a stĺpcov doplniť na latinský štvorec rádu n, práve vtedy, keď*

$$V(i) \geq r + s - n \tag{23}$$

pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dôkaz vynecháme, ukážeme si však použitie teorémy na horeuvedenom príklade, kde bolo $r = 3$, $s = 4$. Ak položíme $n = 5$, dostávame:

$$\begin{aligned} r + s - n &= 2, \\ V(1) &= 3, \\ V(2) &= 3, \\ V(3) &= 3, \\ V(4) &= 2, \\ V(5) &= 1. \end{aligned}$$

Podmienka (23) teda nie je splnená pre $i = 5$.
Ak položíme $n = 6$, máme:

$$\begin{aligned} r + s - n &= 1, \\ V(6) &= 0. \end{aligned}$$

Teda (23) nie je splnené pre $i = 6$.

Konečne, ak položíme $n = 7$, platí

$$r + s - n = 0,$$

takže (23) je zrejme splnené pre každé $i = 1, 2, \ldots, 7$.

Uveďme niektoré dôsledky teorémy 4:

Dôsledok 1 (M. Hall 1945). *Každý latinský obdĺžnik typu $m \times n$ (kde $m < n$) možno doplniť na latinský štvorec rádu n.*

D ô k a z. Stačí v teoréme 4 položiť $r = m$, $s = n$ a uvážiť, že podmienka (23) má tvar $V(i) \geq m$, čo je zrejme splnené, lebo platí dokonca $V(i) = m$ pre každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Tento dôsledok nám však hovorí menej, než vieme z dôsledku 1 teorémy 2 — tam sme mali odhadnutý aj počet spôsobov doplnení na latinský štvorec. Zaujímavejší je ďalší dôsledok:

Dôsledok 2. *Nech sú dané prirodzené čísla r, s, n, pričom $r + s \leq n$. Potom platí: Každá matica typu $r \times s$ (špeciálne každá štvorcová matica rádu k, kde $2k \leq n$) nad n-prvkovou množinou neobsahujúca riadok ani stĺpec s dvoma rovnakými členmi sa dá rozšíriť na latinský štvorec rádu n.*

D ô k a z. Pre každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je podmienka (23) splnená, lebo $V(i) \geq 0 \geq r + s - n$.

P o z n á m k a. V dôsledku 2 môžeme dokonca predpokladať, že daná matica je neúplná, t.j. niektoré jej členy chýbajú (nie sú definované). Stačí ju totiž doplniť ľubovoľným spôsobom tak, aby sme pritom použili len prvky danej n-prvkovej množiny a nenarušili podmienku, že žiaden riadok ani stĺpec neobsahuje dva rovnaké členy (ľahko zistíme, že to vždy ide) a úloha je prevedená na prípad uvedený v dôsledku 2. Zdá sa, že takýto výsledok (v prípade štvorcových matíc) uvádza ako prvý T. E v a n s r. 1960.

Dôsledok 3. *Nech k a n sú prirodzené čísla, pričom $k < n$. Latinský štvorec rádu k možno rozšíriť na latinský štvorec rádu n práve vtedy, keď $n \geq 2k$.*

D ô k a z. Ak $n \geq 2k$, tak podľa dôsledku 2 latinský štvorec rádu k možno rozšíriť na latinský štvorec rádu n.

Obrátene, nech latinský štvorec A rádu k možno rozšíriť na latinský štvorec B rádu n nad množinou $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Keďže $k < n$, existuje člen p_i matice B, ktorý sa nevyskytuje v matici A. Podľa teorémy 4 platí:

$$0 = V(i) \geq k + k - n = 2k - n,$$

odkiaľ $n \geq 2k$.

Cvičenia

4. Koľkými spôsobmi možno doplniť nasledujúce latinské obdĺžniky na latinské štvorce rádu 4?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

5. Uveďte príklad latinského obdĺžnika typu 4×6, ktorý možno 8 spôsobmi doplniť na latinský štvorec rádu 6.

6. Dokážte (napr. pre $i = 1$), že podmienka $V(i) \geq r + s - n$ v teoréme 4 je nutná; inými slovami, ak maticu typu $r \times s$ nad n-prvkovou množinou $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ možno rozšíriť na latinský štvorec rádu n, tak $V(1) \geq r + s - n$.