Latinské štvorce

I. kapitola. Latinské štvorce alebo malá exkurzia do polnohospodárstva

In: Juraj Bosák (author): Latinské štvorce. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 5–17.

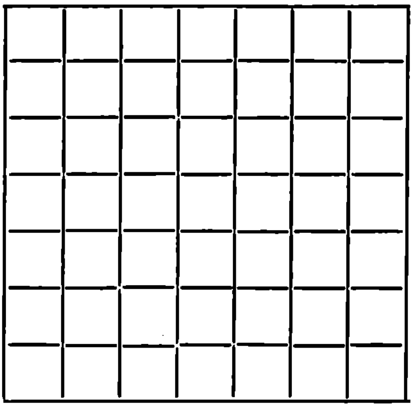
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403866

I. kapitola

LATINSKÉ ŠTVORCE
alebo
MALÁ EXKURZIA DO POĽNOHOSPODÁRSTVA

Predstavme si, že máme na poli štvorcového tvaru vyskúšať 7 druhov pšenice a určiť, ktorý druh dá najväčšiu úrodu. Pri experimente môžeme postupovať takto: rozdelíme pole na 49 štvorčekov (štvorcových parciel) rozložených do 7 riadkov a 7 stĺpcov, ako je znázornené schémou (1):

(1)



Položme si úlohu zasiať na každý zo 49 štvorčekov v (1) jeden zo 7 druhov pšenice tak, aby v každom riadku i stĺpci boli všetky štvorčeky obsiate rôznymi druhmi pšenice. To možno urobiť ľahko: ak označíme 7 druhov pšenice znakmi a, b, c, d, e, f a g, jeden z možných plánov osevu je znázornený schémou (2):

(2)

f	b	g	a	d	e	c
a	c	f	e	g	d	b
e	g	d	f	c	b	a
b	a	c	g	e	f	d
g	f	a	d	b	c	e
c	d	e	b	f	a	g
d	e	b	c	a	g	f

Keď pšenica vyrastie, zistíme úrody na každej zo 49 parciel, spočítame úrodu každého zo 7 druhov pšenice osobitne, prípadne použijeme aj hlbšie štatistické metódy, ktoré nám pomôžu urobiť vyhodnotenie experimentu.

Podobným spôsobom môžeme usporiadať pokus, ak máme síce len jeden druh rastliny (napr. zemiakov), ale máme vyhodnotiť vplyv 7 rôznych druhov hnojenia.

Schémy toho tvaru, ako napr. (2), sa nazývajú *latinské štvorce*. Ich názov pochádza z toho, že prvky sú označené písmenami latinskej abecedy na rozdiel od tzv. *grécko-latinských štvorcov* (s ktorými sa zoznámime v VI. kapitole), ktoré obsahujú grécke i latinské písmená. Poznamenajme však hneď, že používanie latinských (resp. gréckych) písmen je nepodstatné — problém by sa totiž vôbec nezmenil, keby sme do štvorčekov mali vpisovať číslice alebo iné symboly, alebo keby sme mali štvorčeky napr. zafarbiť rôznymi farbami zodpovedajúcimi v nejakom zmysle písmenám. Namiesto písmen budeme najčastejšie používať prirodzené čísla (v danom prípade 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7). Takisto nie je potrebné kresliť štvorec a štvorečky, na ktoré je štvorec rozdelený. Obyčajne budeme túto „kostru" vynechávať a len okraje štvorca označíme hranatými zátvorkami. Ak teda v latinskom štvorci (2) namiesto a (resp. b, c, d, e, f, g) píšeme všade 1 (resp. 2, 3, 4, 5, 6, 7), môžeme ho zapísať aj v tvare (3):

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \\ 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Výhoda metódy latinského štvorca je v tom, že podstatne obmedzuje vplyv rozdielnych podmienok (pôdných i poveternostných), ktoré môžu existovať v jednotlivých riadkoch alebo stĺpcoch, a tak pri minimálnom počte pokusov dáva maximálne informácie.

Latinský štvorec (2), resp. (3) sa skladá zo $7^2 = 49$ štvorčekov; hovoríme, že je to latinský štvorec rádu 7. Všeobecne môžeme skúmať latinské štvorce rádu n, kde n je ľubovoľné prirodzené číslo. Napr.

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

je latinský štvorec rádu 5.

Teraz si pojem latinského štvorca trochu spresníme. Nech je dané prirodzené číslo n a množina M, ktorá má práve n prvkov (pre určitosť si môžeme predstaviť, že sa skladá z prvých n prirodzených čísel, t.j. $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; to však nie je podstatné).

Latinským štvorcom nad množinou M nazývame štvorcovú schému A tvaru

$$
\begin{bmatrix}
A(1,1) & A(1,2) & A(1,3) & \ldots & A(1,n) \\
A(2,1) & A(2,2) & A(2,3) & \ldots & A(2,n) \\
A(3,1) & A(3,2) & A(3,3) & \ldots & A(3,n) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
A(n,1) & A(n,2) & A(n,3) & \ldots & A(n,n)
\end{bmatrix}
\tag{5}
$$

skladajúcu sa z n^2 členov (každý člen $A(i, j)$, kde $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$, je prvkom množiny M), ktoré sú usporiadané do n riadkov a n stĺpcov, pričom platí:

1. V každom riadku sú všetky členy navzájom rôzne.
2. V každom stĺpci sú všetky členy navzájom rôzne.

Z uvedených dvoch podmienok vyplýva (keďže v množine M máme len n rôznych prvkov), že v každom riadku (a podobne v každom stĺpci) sa vyskytujú všetky prvky množiny M (každý práve raz).

Poznamenajme ešte to, čo čitateľ už asi sám zistil: znak i v označení člena $A(i, j)$ znamená poradové číslo riadku, znak j — poradové číslo stĺpca. Člen $A(i, j)$ teda leží v i-tom riadku a j-tom stĺpci latinského štvorca A.

Číslo n (počet prvkov množiny M) nazývame *rádom latinského štvorca A*. Stručne povedané, *latinským štvorcom rádu n* nazývame štvorcovú schému, ktorá má n riadkov a n stĺpcov vytvorených len pomocou n daných prvkov, pričom každý riadok i stĺpec obsahuje všetkých n prvkov.

Ďalším spresnením a zovšeobecnením pojmu latinského štvorca sa budeme zaoberať v II. kapitole.

Metóda latinských štvorcov má širšie použitie, než by sa na prvý pohľad zdalo. Riadky a stĺpce v danom experimente nemusia totiž znamenať poľnohospodárske parcely, ba dokonca vôbec nemusia predstavovať geometrické útvary, ale ľubovoľné činitele (faktory), ktorých vplyv chceme zistiť. Napr. ak chceme zistiť vplyv 7 spôsobov kŕmenia (ktoré označíme *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*) na dojivosť kráv, rozdelíme kravy do 7 rovnako veľkých stád zodpovedajúcich stĺpcom latinského štvorca a experiment rozdelíme na 7 období zodpovedajúcich riadkom latinského štvorca (2). Napr. v prvom období bude mať prvé stádo krmivo *f*, druhé stádo krmivo *b*, tretie — *g* atď. Vyhodnotenie pokusu možno urobiť podobne ako v predošlých prípadoch.

Čitateľ sa zaiste nechá ľahko presvedčiť o tom, že skutočnosť, že všetky doterajšie príklady sme vzali z poľnohospodárstva, je čisto náhodná a že práve tak by sme mohli vybrať príklady z iných odvetví. Uveďme ešte jeden príklad celkom iného druhu a z inej oblasti — z *teórie kódovania*.

Predstavme si, že treba dopraviť správu z jedného miesta na druhé, nemožno ju však preniesť v pôvodnom tvare, ale treba ju najprv zakódovať (zašifrovať). Dôvodom nemusí byť vždy len potreba utajenia obsahu správy, ale aj napr. schopnosť technického zariadenia vysielať len obmedzený počet znakov (tak pri telegrafe máme len dva znaky, bodku a čiarku). Preto každé písmeno správy nahradíme jeho *kódom* (tzv. *kódovým slovom*), t.j. konečnou postupnosťou (skupinou) písmen. Tieto kódy môžeme utvoriť mnohými spôsobmi. Ukážme si jeden z nich, pri ktorom sa používa latinský štvorec, napr. (4). Kódy budú tieto:

a = 111	b = 122	c = 133	d = 144	e = 155
f = 212	g = 223	h = 234	i = 245	j = 251
k = 313	l = 324	m = 335	n = 341	o = 352
p = 414	q = 425	r = 431	s = 442	t = 453
u = 515	v = 521	x = 532	y = 543	z = 554

Utvorili sme ich z latinského štvorca (4) tak, že pred každý člen latinského štvorca sme napísali poradové číslo riadku a stĺpca. Napr. v druhom riadku a štvrtom stĺpci je 5, čím vznikol kód (kódové slovo) 245. Týmto kódom sme priradili písmená (v danom príklade v abecednom poriadku, ale to je nepodstatné). Napr. slovo „algebra" vyzerá zakódované takto:

111 324 223 155 122 431 111

Náš kód má jednu dôležitú výhodu: sám „objavuje" chybu! Ak sa totiž v niektorom kódovom slove raz pomýlime, napr. namiesto 431 napíšeme 531, ihneď zistíme, že je tam chyba — jednoducho z toho dôvodu, že 531 nie je kódom žiadneho písmena. Preto sa môžeme pokúsiť chybu opraviť, čo sa spravidla ľahko podarí.

Dá sa dokázať, že z ľubovoľného latinského štvorca môžeme uvedeným spôsobom vytvoriť *kód objavujúci chybu*; vyplýva to zo základných vlastností latinského štvorca.

Ak použijeme latinský štvorec väčšieho rádu (napr. 7), môžeme zakódovať väčší počet písmen alebo iných znakov (napr. i písmená s mäkčeňmi a dĺžňami, číslice, bodku, čiarku, vykričník a pod.).

Existujú aj dokonalejšie kódy než kódy objavujúce chybu, a to *kódy opravujúce chybu*, pri ktorých pri jednej chybe v kódovom slove nielen objavíme, že sa chyba stala, ale jednoznačne určíme, ako vyzeralo pôvodné kódové slovo; teda kód vie chybu automaticky „opraviť". Horeuvedený kód, utvorený pomocou latinského štvorca (4) takýmto nie je, lebo napr. jednou chybou v kódovom slove môže vzniknúť skupina 531, a nedá sa zistiť (bez dodania ďalšej informácie, napr. zo zmyslu celej správy), či pôvodné kódové slovo bolo 431 (=r), 521 (=v) alebo 532 (=x).

Poznáme aj kódy objavujúce alebo opravujúce viac než jednu chybu v jednom kódovom slove. Tieto prednosti sú však obyčajne draho zaplatené tým, že sa neúmerne zväčšuje počet použitých znakov alebo rozsah správy, čo má za následok časové alebo hospodárske straty.

Teraz sa budeme venovať rozboru niektorých matematických problémov, ktoré pri štúdiu latinských štvorcov vznikajú.

Naše úlohy, ktorými sme sa na začiatku zaoberali, sme redukovali na utvorenie latinského štvorca rádu 7, t.j. vpísanie symbolov a, b, c, d, e, f, g (resp. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) do štvorčekov schémy (1) (do každého štvorčeka po jednom symbole) tak, aby riadky i stĺpce tvorené štvorčekmi obsahovali vždy rôzne symboly. Táto úloha má, ako neskôr uvidíme, obrovský počet riešení; latinský štvorec (2) resp. (3) predstavuje len jedno z nich.

Nech je dané prirodzené číslo n. Vzniká otázka, koľko existuje latinských štvorcov rádu n nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$, t.j. zložených z čísel $1, 2, \ldots, n$. Označme tento počet znakom L_n. Pre $n = 1, 2$ a 3 je jednoduché nájsť všetky takéto latinské štvorce. Sú to:

$$(6) \quad n = 1: [1]$$

$$n = 2: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$n = 3$: $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3\\1&3&2\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&2\\3&2&1\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3\\3&2&1\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\\2&3&1\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{bmatrix}$

Pri konštrukcii latinských štvorcov rádu 3 si stačí uvedomiť, že prvý riadok možno zvoliť 6 spôsobmi; pri každej z týchto volieb prvý člen druhého riadku možno zvoliť dvoma spôsobmi. Zvyšok štvorca je jednoznačne určený. Teda $L_1 = 1$, $L_2 = 2$, $L_3 = 12$. Pre výpočet čísla L_n pri väčšom n je vhodné urobiť niektoré zjednodušenia.

Nazvime latinský štvorec rádu n *redukovaným*, ak je latinským štvorcom nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ a ak v jeho prvom riadku i prvom stĺpci sú čísla umiestnené v prirodzenom poradí: $1, 2, 3, \ldots, n$. Napr. latinský štvorec (4) je redukovaný, zatiaľ čo (3) nie. Zrejme redukovaných latinských štvorcov rádu n pri veľkom n je podstatne menej než všetkých latinských štvorcov rádu n nad $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Označme počet redukovaných latinských štvorcov rádu n znakom R_n. Ľahko zistíme, že $R_1 = R_2 = R_3 = 1$. Určme R_4. Za tým účelom napíšme schému

(7) $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & A(2,2) & A(2,3) & A(2,4)\\ 3 & A(3,2) & A(3,3) & A(3,4)\\ 4 & A(4,2) & A(4,3) & A(4,4)\end{bmatrix}$$

Aby schéma (7) bola latinským štvorcom, musí sa $A(2, 2)$ rovnať 1, 3 alebo 4. Ak $A(2, 2) = 1$, tak zrejme $A(2, 4) = A(4, 2) = 3$, $A(2, 3) = A(3, 2) = 4$ a zvyšok schémy možno dvojakým spôsobom doplniť na latinský štvorec:

(8)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

alebo

(9)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ak $A(2, 3) = 3$, tak postupne dostávame: $A(2, 4) = A(4, 2) = 1$, $A(2, 3) = A(3, 2) = 4$, $A(3, 4) = A(4, 3) = 2$, $A(3, 3) = 1$, $A(4, 4) = 3$, t.j. dostávame latinský štvorec

(10)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Podobne pre $A(2, 2) = 4$ dostávame jediný latinský štvorec

(11)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teda $R_4 = 4$.

Hodnoty R_n sú stále v centre pozornosti kombinatorikov. Napriek tomu doteraz nebol nájdený všeobecný vzorec pre R_n, ba čo viac, čísla R_n sú známe len pre $n < 10$. Sú to:

(12)
$$R_1 = 1,$$
$$R_2 = 1,$$
$$R_3 = 1,$$

$$
\begin{aligned}
R_4 &= 4,\\
R_5 &= 56,\\
R_6 &= 9\,408,\\
R_7 &= 16\,942\,080,\\
R_8 &= 535\,281\,401\,856,\\
R_9 &= 377\,597\,570\,964\,258\,816.
\end{aligned}
$$

Pre $n \leq 5$ tieto hodnoty určil už r. 1782 L. Euler, ktorý sa bezúspešne pokúšal vypočítať aj R_6. Túto hodnotu vypočítal až M. Frolov r. 1890; uvádza aj hodnotu $R_7 = 221\,276\,160$, ktorá je však nesprávna. Túto správne vypočítal až A. Sade r. 1948; R_8 bolo určené M. B. Wellsom r. 1967. Poslednú známu hodnotu R_9 vypočítali S. E. Bammel a J. Rothstein r. 1974 s použitím samočinných počítačov. Vidíme, že redukovaných latinských štvorcov rádu 9 je viac ako tretina trilióna.

Vzniká otázka, ako možno pomocou počtu R_n redukovaných latinských štvorcov rádu n vyjadriť počet L_n všetkých latinských štvorcov nad $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tento vzťah je jednoduchý:

Teoréma 1 (P. A. MacMahon 1915). *Nech n je prirodzené číslo, L_n — počet latinských štvorcov nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ a R_n — počet redukovaných latinských štvorcov rádu n. Potom platí:*

$$L_n = n!(n-1)!R_n \,. \tag{13}$$

Poznámka: Ak n je prirodzené číslo, znak $n!$ (čítaj: *n-faktoriál*) označuje súčin všetkých prirodzených čísel od 1 do n, tj. $n! = 1.2.3 \ldots n$. Ďalej sa ukazuje výhodným položiť $0! = 1$. Pre porozumenie nasledujúcemu dôkazu je dobré vedieť, že pre každé prirodzené n sa

$n!$ rovná počtu permutácií (alebo tiež počtu poradí) *n-prvkovej množiny* (tj. množiny, ktorá má práve n prvkov).

Prv než teorému 1 dokážeme, všimnime si, že všetkých 12 latinských štvorcov rádu 3 zo (6) môžeme získať z prvého *permutovaním* (postupným vymieňaním) riadkov a permutovaním stĺpcov. Napr. výmenou 2. a 3. stĺpca vznikne druhý latinský štvorec rádu 3 zo (6); ak v tomto vymeníme 1. a 3. riadok, dostaneme posledný z týchto latinských štvorcov a pod. V dôkaze teorémy zavedieme do týchto výmien (permutácií) riadkov a stĺpcov prehľadný systém.

Dôkaz teorémy 1. Zrejme z ľubovoľného redukovaného latinského štvorca A rádu n možno utvoriť $n!(n - 1)!$ latinských štvorcov nad $\{1, 2, \ldots, n\}$ nasledujúcim spôsobom: najprv permutujeme (t.j. poprehadzujeme) medzi sebou riadky štvorca A (to možno urobiť $n!$ spôsobmi) a potom — ponechajúc prvý stĺpec na mieste — permutujeme zvyšných $n - 1$ stĺpcov (čo možno urobiť $(n - 1)!$ spôsobmi). Zrejme dostaneme $n!(n - 1)!$ rôznych latinských štvorcov (líšia sa prinajmenej buď v prvom stĺpci alebo v prvom riadku). Preto stačí dokázať, že ľubovoľný latinský štvorec C nad množinou $\{1, 2, \ldots, n\}$ možno získať uvedeným spôsobom práve z jedného redukovaného latinského štvorca A rádu n. Aby sme sa o tom presvedčili, sledujme premiestňovanie ľubovoľného člena $A(i, j)$ pri uvedených permutáciách. Po permutovaní riadkov v A vznikne istý latinský štvorec B. Nech sa prvý riadok v A stane r-tým riadkom v B a i-tý riadok v A s-tým riadkom v B. Potom platí:

$$B(r, 1) = 1\,, \qquad B(r, j) = j\,,$$
$$B(s, 1) = i\,, \qquad B(s, j) = A(i, j)\,.$$

Po permutácii stĺpcov latinského štvorca B (pričom prvý stĺpec ostáva na mieste) vznikne latinský štvorec C. Nech sa j-tý stĺpec v B stane t-tým stĺpcom v C. Potom platí:

$$\begin{aligned} C(r, 1) &= 1\,, & C(r, t) &= j\,, \\ C(s, 1) &= i\,, & C(s, t) &= A(i, j)\,. \end{aligned}$$

Teda vidíme, že člen $A(i, j)$ možno na základe latinského štvorca C vypočítať takto: Nájdeme prirodzené čísla r, s, t tak, aby platilo $C(r, 1) = 1$, $C(s, 1) = i$, $C(r, t) = j$. Potom platí $C(s, t) = A(i, j)$. Zrejme čísla r, s, t sú jednoznačne určené. Preto aj $A(i, j) = C(s, t)$ je jednoznačne určené; keďže úvaha platila pre ľubovoľné i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, je aj redukovaný latinský štvorec A určený jednoznačne. Tým je dôkaz teorémy skončený.

Príklad. Podľa teorémy 1 dostávame:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1!0!R_1 = 1.1.1 = 1\,, \\ L_2 &= 2!1!R_2 = 2.1.1 = 2\,, \\ L_3 &= 3!2!R_3 = 6.2.1 = 12\,, \\ L_4 &= 4!3!R_4 = 24.6.4 = 576\,, \\ L_5 &= 5!4!R_5 = 120.24.56 = 161\,280 \end{aligned}$$

atď. Teda už latinských štvorcov rádu 5 (nad pevne zvolenou 5-prvkovou množinou) je viac než stotisíc.

Cvičenia

1. Zistite, koľkými spôsobmi možno doplniť nasledujúce schémy na latinský štvorec:

a) $\begin{bmatrix} 1 & . & . \\ . & 2 & . \\ . & . & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & . & . & . \\ . & . & 3 & . \\ . & . & 2 & . \\ . & . & . & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} . & 1 & . & . \\ . & . & . & 2 \\ 3 & . & . & . \\ . & . & 4 & . \end{bmatrix}$

2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $R_n \neq 0$ (t. j. existuje aspoň jeden redukovaný latinský štvorec rádu n).

3. Koľko existuje latinských štvorcov rádu 6 nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?