VÝSLEDKY CVIČENÍ

1.1. a) $\frac{27}{10^3} = 0{,}027$ b) $\frac{m}{10^3} > \frac{1}{3^3} \Rightarrow m > 37$

1.2. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

1.3. $\frac{\binom{12}{5}\binom{15}{5}}{\binom{27}{10}}$

1.4. $\frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$

1.5. $\frac{20.19.18.17.16}{20.20.20.20.20} = 0{,}5814$

1.6. $\frac{365.364}{365.365} = \frac{364}{365}$

1.7. Štyri skupiny môžu sedieť napr. zľava doprava 4! spôsobmi. Pritom môže sedieť Američania 3!, Sovieti 5!, Francúzi 5! a Poliaci 2! spôsobmi. Teda priaznivých možností je 4!3!5!5!2!. Všetkých možností je zrejme 15!. Preto

$$P = \frac{4!3!5!5!2!}{15!}.$$

1.8. $1 - \frac{364}{365} = \frac{1}{365}$

1.9. $1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - r + 1)}{365^r}$

1.10. Má byť $p = 1 - \dfrac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - r + 1)}{365^r} > \dfrac{1}{2}$.
Pre $r = 22$ je $p = 0{,}4757$, pre $r = 23$ je $p = 0{,}5073$.

1.11. $1 - \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{7^3}$

1.12. a) $\dbinom{7}{2} \dfrac{5^5}{6^7}$ b) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^5 \cdot \dfrac{9}{4}$ c) $1 - 2\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$

1.13. a) $\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{1}{11}$ b) $\dfrac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{14}{33}$ c) $1 - \dfrac{14}{33} = \dfrac{19}{33}$

1.14. a) $\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{24}{91}$ b) $\dfrac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{45}{91}$ c) $1 - \dfrac{24}{91} = \dfrac{67}{91}$

1.15. $1 - \dfrac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 12 \cdot 11}{30^{20}} = 0{,}9998$

1.16. Pretože $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, platí $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

1.17. $P(A) = \dfrac{1}{3}$ b) $P(B) = \dfrac{2}{3}$ c) $P(A - B) = \dfrac{1}{12}$

1.18. $B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$, pričom $(B \cap A) \cap (B \cap A') = \emptyset$. Preto $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$.

1.19. $P(A \cup B \cup C \cup D \cup E) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - \ldots - P(D \cap E) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap C \cap D) + \ldots + P(C \cap D \cap E) - P(A \cap B \cap C \cap D) - \ldots - P(B \cap C \cap D \cap E) + P(A \cap B \cap C \cap D \cap E)$.

1.20. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$

$$+ \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Dôkaz. Predpokladajme, že veta platí pre nejaké n; máme ju dokázať pre $n+1$. Majme $n+1$ množín $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Podľa indukčného predpokladu

$$P(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i) = \sum_{i=2}^{n+1} P(A_i) - \sum_{2 \leq i < j} P(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{2 \leq i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots,$$

$$P(\bigcup_{i=2}^{n+1} (A_1 \cap A_i)) = \sum_{i=2}^{n+1} P(A_1 \cap A_i) - \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} P(A_1 \cap A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{2 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_1 \cap A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}).$$

Ale

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n+1} A_i) = P(A_1) + P(\bigcup_{i=2}^{n+1} A_i) - P(\bigcup_{i=2}^{n+1} (A_1 \cap A_i)) =$$

$$= P(A_1) + \sum_{i=2}^{n+1} P(A_i) - \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) - \sum_{i=2}^{n+1} P(A_1 \cap A_i) +$$
$$+ \sum_{2 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} P(A_1 \cap A_i \cap A_j) - \ldots$$
$$\ldots - (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots$$
$$+ (-1)^{n+2} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n+1})$$

1.21. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$

1.22. Nech A_i je udalosť spočívajúca v tom, že i-tý hráč dostane všetky karty rovnakej farby. Potom $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = 4/\binom{32}{8}$, $P(A_1 \cap A_2) =$

$$= P(A_1 \cap A_3) = \ldots = P(A_3 \cap A_4) = 4.3/\binom{32}{8}\binom{24}{8},$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \ldots = P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$
$$= 4.3.2/\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4),$$

teda hľadaná pravdepodobnosť je

$$4 \cdot \frac{4}{\binom{32}{8}} - \binom{4}{2}\frac{4.3}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}} + \binom{4}{3}\frac{4.3.2}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}} - \frac{4.3.2}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}.$$

1.23. Najprv rozriešime c). Podobne ako v príklade 1.21 zistíme, že hľadaná pravdepodobnosť P_1 je

$$P_1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!}.$$

a) Udalosť „nikto nedostal správny kľúčik" je komplementom k udalosti „aspoň jeden dostal správny kľúčik". Preto pre pravdepodobnosť P_0 toho, že nikto nedostal správny kľúčik platí

$$P_0 = 1 - P_1 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}.$$

b) Nech B_i je udalosť spočívajúca v tom, že i-tý obyvateľ obdržal správny kľúčik, ale ostatní obyvatelia nie. Máme vypočítať vlastne $P(\bigcup_{i=1}^{6} B_i) = \sum_{i=1}^{6} P(B_i)$. Počítajme najprv $P(B_1)$.

$$P(B_1) = P(A_1 - (A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_6)) =$$
$$= P(A_1) - P((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (A_1 \cap A_6)).$$

Podľa cvičenia 1.20 (pozri príklad 1.11) je však

$$P(\bigcup_{i=2}^{6}(A_1 \cap A_i)) = \sum_{i=2}^{6} P(A_1 \cap A_i) - \sum_{2 \le i < j \le 6} P(A_1 \cap A_i \cap A_j) +$$
$$+ \ldots + P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6).$$

Ľahko zistíme ďalej, že $P(A_1 \cap A_i) = \frac{4!}{6!} = \frac{1}{6.5}$,
$P(A_1 \cap A_i \cap A_j) = \frac{1}{6.5.4}, \ldots, P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6) =$
$= \frac{1}{6!}$. Preto

$$P(B_1) = \frac{1}{6} - 5.\frac{1}{6.5} + \binom{5}{2}\frac{1}{6.5.4} - \binom{5}{3}\frac{1}{6.5.4.3} +$$
$$+ \binom{5}{4}\frac{1}{6!} - \frac{1}{6!} = \frac{1}{6.2!} - \frac{1}{6.3!} + \frac{1}{6.4!} - \frac{1}{6.5!}.$$

Pretože $P(B_1) = P(B_2) = \ldots = P(B_6)$, pravdepodobnosť P_1' toho, že práve jeden obyvateľ obdržal správny kľúčik sa rovná číslu

$$P_1' = 6P(B_1) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}.$$

d) Nech udalosť A znamená — aspoň dvaja dostali správny kľúčik, B — práve jeden dostal správny kľúčik, C — aspoň jeden dostal správny kľúčik. Potom $C = A \cup B$, $A \cap B = 0$, teda (podľa c) a b))

$P(C) = P(A) + P(B)$,

$$P(A) = P(C) - P(B) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} -$$
$$-\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) =$$
$$= 1 - \frac{2}{2!} + \frac{2}{3!} - \frac{2}{4!} + \frac{2}{5!} - \frac{1}{6!}.$$

Inak zapísané

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} -$$
$$-\left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}\right)=$$

$$=\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}-\frac{4}{5!}+\frac{5}{6!}.$$

1.24. Nech A, resp. B, resp. C sú udalosti spočívajúce v tom, že prvá, resp. druhá, resp. tretia súčiastka pracuje. Máme vypočítať $P(A' \cap B' \cap C')$. Ale $A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup \cup C)'$, teda

$$P(A' \cap B' \cap C') = 1 - P(A \cup B \cup C) =$$
$$= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) +$$
$$+ P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$$
$$= 1 - 3.0{,}5 + 3.0{,}1875 - 0{,}0625 = 0.$$

Pravdepodobnosť toho, že žiadna súčiastka nebude pracovať je teda 0.

1.25. Podľa príkladu 1.11, ktorého tvrdenie je v poriadku aj v zovšeobecnenej schéme, platí

$$0{,}9 = P(A \cup F \cup R) = P(A) + P(F) + P(R) - P(A \cap F) -$$
$$- P(A \cap R) - P(F \cap R) + P(A \cap F \cap R) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - P(A \cap F) - P(A \cap R) - P(F \cap R) + \frac{1}{30}.$$

Odtiaľ

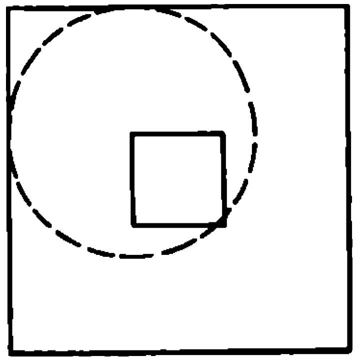
$$P(A \cap F) + P(A \cap R) + P(F \cap R) = \frac{7}{15}.$$

Nás, pravda, zaujíma

$$P((A \cap F) \cup (A \cap R) \cup (F \cap R)) = P(A \cap F) + P(A \cap R) +$$
$$+ P(F \cap R) - P(A \cap F \cap R) - P(A \cap F \cap R) -$$
$$- P(A \cap F \cap R) + P(A \cap F \cap R) =$$
$$= \frac{7}{15} - 2P(A \cap F \cap R) = \frac{7}{15} - 2.\frac{1}{30} = \frac{2}{5}.$$

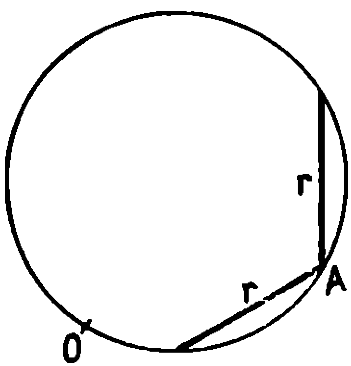
2.1. Skúmajme polohy stredu mince. Všetky možnosti polohy sú charakterizované štvorcom (obr. 11), polohy, pri ktorých je minca obsiahnutá v niektorom očku danej siete sú charakterizované štvorčekom, ktorého strana je 1/4 strany veľkého štvorca. Preto

$$p = \frac{\left(\frac{1}{4}a\right)^2}{a^2} = \frac{1}{16}.$$

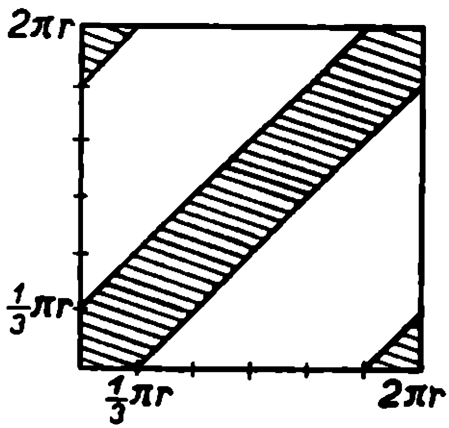


Obr. 11

2.2. Zvoľme na kružnici (s polomerom r) pevne bod O, na os x-ovú nanášajme polohu bodu A (dĺžku oblúka $\widehat{OA}$), na os y-ovú polohu bodu B. Hľadaná pravdepodobnosť je pomer „vyšrafovaného obsahu" k obsahu štvorca, teda



Obr. 12

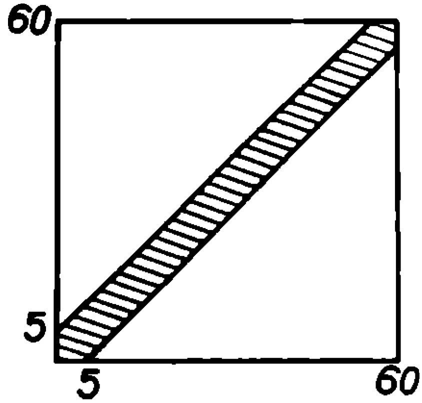


Obr. 13

$$p = \frac{2 \cdot \frac{\pi r}{3} \cdot 2\pi r}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{3} \cdot$$

2.8. Na súradnicové osi nanášajme možný čas príchodu jednotlivých duelantov. Vzhľadom na to, že A čaká na B najviac 5 min. a takisto B na A, je hľadaná pravdepodobnosť podiel „vyšrafovaného" obsahu a obsahu štvorca, teda

$$p = \frac{575}{3\,600} = \frac{23}{144} \cdot$$



Obr. 14

3.1. a) $\dfrac{\binom{3}{2} \cdot 5}{6^3} = \dfrac{15}{216}$ b) Najjednoduchšie cez komplement:

$1 - \dfrac{5^3}{6^3} = \dfrac{91}{216}$ c) $\dfrac{5^3}{6^3} + \dfrac{3 \cdot 5^2}{6^3} + \dfrac{3 \cdot 5}{6^3} = 1 - \dfrac{1}{6^3} = \dfrac{215}{216}$

3.2. a) $\dfrac{1}{2^5}$ b) $\dfrac{\binom{5}{3}}{2^5}$ c) $\dfrac{\binom{5}{2}}{2^5}$ d) $\dfrac{1}{2^5} + \dfrac{\binom{5}{1}}{2^5} + \dfrac{\binom{5}{2}}{2^5}$

3.3. $\dfrac{9^{10}}{10^{10}}$

3.4. $\dfrac{3 \cdot 5 \cdot 3}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3}{14}$

3.5. a) $\binom{1000}{200}\left(\frac{1}{6}\right)^{200}\left(\frac{5}{6}\right)^{800}$ b) $\sum\limits_{k=100}^{1000}\binom{1000}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{1000-k}$

3.6. a) $\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$ b) $\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$

c) $\sum\limits_{i=1}^{k}\binom{n}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^{i}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-i}$

3.7. Pravdepodobnosť, že pri jednej kazete objaví falošnú mincu je $1/100$, že je neobjaví je $1 - 1/100$, že ju neobjaví ani v jednom prípade, je

$$\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100}.$$

3.8. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$; udalosti A, B sú teda nezávislé.

3.9. $P(A) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap C) = 0 \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, teda udalosti A, C nie sú nezávislé.

3.10. $P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A)\,P(\emptyset)$.

3.11. $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A).1 = P(A)\,P(\Omega)$.

3.12. Ak $P(A) = 0$, alebo $P(B) = 0$, tak $P(A \cap B) = P(\emptyset) = P(A)\,P(B)$. Naopak, nech sú A, B nezávislé. Potom $0 = P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, teda $P(A) = 0$, alebo $P(B) = 0$.

3.13. $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(A \cap R) = \frac{3}{8}$, $P(R) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, pričom $P(A \cap R) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = P(A)\,P(R)$.

3.14. $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)\,P(B) = (1 - P(A)\,(1 - P(B)) = P(A')\,P(B')$.

3.15. $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B) = P(A)\,P(B) + P(A' \cap B)$. Preto $P(A' \cap B) = P(B) - P(A)\,P(B) = P(B)\,(1 - P(A)) = P(B)\,P(A')$.

3.16. Tu sú tieto navzájom sa vylučujúce udalosti: všetci traja hlasujú správne, prví dvaja správne, tretí nesprávne, prvý a tretí správne, druhý nesprávne, prvý nesprávne, druhý a tretí správne.

$$p \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot (1 - p) \cdot \frac{1}{2} + (1 - p) \cdot p \cdot \frac{1}{2} = p$$

Porota prijíma teda správne rozhodnutie s pravdepodobnosťou p.

3.17. Nech p_1 je pravdepodobnosť toho, že syn vyhrá nad otcom, p_2 — že vyhrá nad trenérom. V alternatíve otec, tréner, otec je pravdepodobnosť úspechu

$$p_1 p_2 p_1 + p_1 p_2 (1 - p_1) + (1 - p_1) p_2 p_1 = p_1 p_2 (2 - p_1).$$

v druhej alternatíve

$$p_2 p_1 p_2 + p_2 p_1 (1 - p_2) + (1 - p_2) p_1 p_2 = p_1 p_2 (2 - p_2).$$

Pretože $p_1 > p_2$, t. j. $p_1 p_2 (2 - p_1) < p_1 p_2 (2 - p_2)$, druhá alternatíva je pre syna výhodnejšia.

3.18. Pravdepodobnosť toho, že niekto bude mať vaše dátum narodenia je 1/365, že nebude je 1 — 1/365. Pravdepodobnosť toho, že z n osôb žiadna nebude mať to isté dátum narodenia čo vy, je

$$\left(1 - \frac{1}{365}\right)^n,$$

že aspoň jedna bude mať to dátum, je

$$1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n.$$

Hľadáme teda najmenšie také prirodzené číslo n aby

$$1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^n > \frac{1}{2}; \quad n > \frac{-\log 2}{\log 364 - \log 365}, \quad n \geqq 251.$$

3.19. Nech A je udalosť spočívajúca v tom, že v súboji X nebude zasiahnutý. Potom

$$P(A) = 0{,}2 . 0{,}6 + 0{,}2 . 0{,}4 . 0{,}2 . 0{,}6 + \ldots =$$
$$= 0{,}2 . 0{,}6 (1 + 0{,}4 . 0{,}2 + (0{,}4 . 0{,}2)^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{0,12}{1 - 0,08} = 0,13 \cdot$$

8.20. Nech p je pravdepodobnosť toho, že vytrénovaný X trafí cieľ. Potom

$$P(A) = p + (1 - p).0,2.p +$$
$$+ (1 - p).0,2.(1 - p).0,2.p + \ldots =$$
$$= p(1 + (1 - p).0,2 + ((1 - p).0,2)^2 + \ldots) =$$
$$= \frac{p}{1 - (1 - p).0,2} > 0,9 ,$$

ak $p > 36/41 = 0,878 \ldots$, teda X bude úspešný, ak $p \geqq 0,88$.

8.21. Nech p je pravdepodobnosť toho, že Z trafí cieľ, B je udalosť spočívajúca v tom, že Z v celom súboji nebude zasiahnutý. Potom

$$P(B) = p + (1 - p).0,2.p + \ldots = \frac{p}{1 - (1 - p).0,2} > 0,5,$$

ak $p > 49/99 = 0,49 \ldots$, teda stačí, aby $p \geqq 0,5$.

8.22. $(1 - p).0,6 + (1 - p).0,4.(1 - p).0,6 + \ldots =$

$$= \frac{0,6(1 - p)}{1 - (1 - p).0,4}$$

Pritom

$$\frac{0,6.(1 - p)}{1 - (1 - p).0,4} > 0,9 , \quad \text{ak } p < \frac{1}{16} ,$$

$$\frac{0,6.(1 - p)}{1 - (1 - p).0,4} > 0,5 , \quad \text{ak } p < \frac{3}{8}$$

Teda X má nádej väčšiu ako 0,9 na strelcov s pravdepodobnosťou zásahu menšou ako 1/16; na strelcov s pravdepodobnosťou zásahu menšou ako 3/8 má X nádej na úspech väčšiu ako 0,5.

8.23. Ak C začne strieľať na A, sú dve možnosti pre úspech A:

1. C netrafí A, A netrafí B, B zastrelí C a A trafí B; pravdepodobnosť toho je $0,6.0,3.0,7 = 0,126$.
2. C netrafí A, A trafí B a vyhrá nastávajúci súboj s C. Pravdepodobnosť toho je

$$0{,}6\,.\,0{,}7(0{,}6\,.\,0{,}7 + 0{,}6\,.\,0{,}3\,.\,0{,}6\,.\,0{,}7 + \ldots) =$$
$$= 0{,}6\,.\,0{,}7\,\frac{0{,}6\,.\,0{,}7}{1 - 0{,}3\,.\,0{,}6} = 0{,}2151.$$

Ak C začne strieľať na B, potom je len jedna nádej: C trafí B, na čo A vyhrá súboj s C; pravdepodobnosť toho je

$$0{,}4(0{,}7 + 0{,}3\,.\,0{,}6\,.\,0{,}7 + \ldots) = \frac{0{,}4\,.\,0{,}7}{1 - 0{,}3\,.\,0{,}6} = 0{,}3414.$$

Preto pravdepodobnosť toho, že A výjde zo súboja víťazne je

$$0{,}5(0{,}126 + 0{,}2151) + 0{,}5\,.\,0{,}3414 = 0{,}3412.$$

3.24. Tu je jediná možnosť: B začne strielať na C (pravdepodobnosť čoho je 0,5), pravdaže, trafí ho, na čo A trafí B, teda pravdepodobnosť úspechu A je $0{,}5\,.\,0{,}7 = 0{,}35$.

3.25. Keďže A chce zachrániť C bude namiesto mierenia na C strieľať vždy do vzduchu (pravdepodobnosť, že A trafí C je teda 0, pravdepodobnosť, že A trafí B je, pravda, 0,7). Sú dve možnosti: 1. A začína strieľať smerom na C. Aby C vyšiel zo súboja bez úrazu musí trafiť B a vyhrať súboj s A. Pravdepodobnosť toho je

$$0{,}4(1\,.\,0{,}4 + 1\,.\,0{,}6\,.\,1\,.\,0{,}4 + \ldots) = \frac{0{,}4\,.\,0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0{,}4\,.$$

2. A začne strieľať smerom na B. Ak má C vyhrať, musí A trafiť B, načo C vyhrá súboj s A. Pravdepodobnosť toho je

$$0{,}7(0{,}4 + 0{,}6\,.\,1\,.\,0{,}4 + \ldots) = \frac{0{,}7\,.\,0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0{,}7\,.$$

Ak chce teda A zachrániť C, musí (okrem toho, že ho bude šanovať) začať strieľať na B a mieriť pri tom zvlášť pozorne.

3.26. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/2$, $P(A_1 \cap A_2) =$ $= P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$ $= 1/4$. Teda $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$ pre $i \neq j$, ale $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$.

3.27. $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$,

$P(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$. Ďalej, $A \cap B \cap C = \{\omega_4\} = A \cap C$.

Teda

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{12} = P(A)\,P(B)\,P(C)\,,$$

ale

$$P(A \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = P(A)\,P(C).$$

Podobne $P(B \cap C) \neq P(B)\,P(C)$. Naproti tomu $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

4.1. $P(F|M) = P(F \cap M)/P(M) = 0{,}2/0{,}3 = 2/3$.

4.2. Hľadáme $P(S \cup K|Č) = P(S|Č) + P(K|Č)$, kde S znamená, že všetky štyri sú srdcové, K — károvė, $Č$ — červené. Máme $P(S|Č) = P(S \cap Č)/P(Č)$; $P(Č) = \binom{26}{4}/\binom{52}{4}$, $P(S \cap Č) = P(S) = \binom{13}{4}/\binom{52}{4}$, teda $P(S|Č) = \binom{13}{4}/\binom{26}{4} = 0{,}047$. Pretože $P(K|Č) = P(S|Č)$, je $P(S \cup K|Č) = 2.\,P(S|Č) = 0{,}094$.

4.3. Podľa definície $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = \frac{1}{6}\Big/\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Podobne $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A) = \frac{1}{6}\Big/\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Lahko sa zistí, že $P(A') = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $P(B') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. K tomu, aby sme vedeli vypočítať $P(A'|B')$ však potrebujeme poznať $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$. Ale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. Preto $P(A' \cap B') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, teda $P(A'|B') = P(A' \cap B')/P(B') = \frac{1}{3}\Big/\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$. Podobne $P(B'|A') = \frac{2}{3}$.

4.4. Pretože $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ a $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, platí

$$P(A|B) = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)}.$$

4.5. $P(B|A) = 1$.

4.6. $P(B|A) = 0$.

4.7. $P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B \cap U_i) = \sum_{i=1}^{4} P(U_i) P(B|U_i) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} P(B|U_i) =$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{5}{6}\right) = \frac{8}{15}.$$

4.8. $P(Ch) = \Sigma\, P(A_i \cap Ch) = \Sigma\, P(Ch|A_i)\, P\,(A_i) = 0{,}03\,.$ $.\,0{,}5 + 0{,}04\,.\,0{,}3 + 0{,}05\,.\,0{,}2 = 0{,}037$.

4.9. $$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)\, P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i) P(B|A_i)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}.$$

4.10. $$P(A_1|Ch) = \frac{P(A_1)\, P(Ch|A_1)}{\Sigma\, P(A)\, P(Ch|A_i)} =$$

$$= \frac{0{,}5\,.\,0{,}03}{0{,}5\,.\,0{,}03 + 0{,}3\,.\,0{,}04 + 0{,}2\,.\,0{,}05} = \frac{15}{37}.$$

4.11. $$P(\check{Z}|V) = \frac{P(\check{Z})\, P(V|\check{Z})}{P(\check{Z})\, P(V|\check{Z}) + P(M) P(V|M)} =$$

$$= \frac{0{,}6\,.\,0{,}01}{0{,}6\,.\,0{,}01 + 0{,}4\,.\,0{,}04} = \frac{3}{11}.$$

4.12. Označme jednotlivé hypotézy H_1 (3 biele), H_2 (2 biele, jedna čierna), H_3 (1 biela, 2 čierne), H_4 (3 čierne). Potom

$$P(H_1|B) = \frac{P(H_1)\, P(B|H_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(H_i)\, P(B|H_i)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot 0} = \frac{1}{2}.$$

Podobne

$$P(H_2|B) = 1/3, \quad P(H_3|B) = 1/6, \quad P(H_4|B) = 0.$$

4.13. Dané sú $P(D_1) = 0,3$, $P(D_2) = 0,5$, $P(D_3) = 0,2$, $P(L|D_1) = 0,15$, $P(L|D_2) = 0,3$, $P(L|D_3) = 0,2$. Podľa Bayesovej formule

$$P(D_1|L) = \frac{P(L|D_1)\,P(D_1)}{\Sigma\,P(L|D_i)\,P(D_i)} =$$

$$= \frac{0,15\,.\,0,3}{0,15\,.\,0,3 + 0,3\,.\,0,5 + 0,2\,.\,0,2} = \frac{9}{47}.$$

Podobne $P(D_2|L) = 30/47$, $P(D_3|L) = 8/47$.

4.14. V tomto prípade $P(L|D_1) = \binom{5}{1}\,0,15^4\,.\,0,85 = 0,002$, $P(L|D_2) = 5\,.\,0,3^4\,.\,0,7 = 0,028$, $P(L|D_3) = 5\,.\,0,2^4\,.\,0,8 = 0,006$.

$$P(D_1|L) = \frac{P(L|D_1)\,P(D_1)}{\Sigma P(L|D_i)\,P(D_i)} =$$

$$= \frac{0,002\,.\,0,3}{0,002\,.\,0,3 + 0,028\,.\,0,5 + 0,006\,.\,0,2} = \frac{3}{79},$$

$P(D_2|L) = 70/79$, $P(D_3|L) = 6/79$.

5.1. $x \in (\bigcup E_n)' \Leftrightarrow x \notin \bigcup E_n \Leftrightarrow \forall n,\ x \notin E_n \Leftrightarrow \forall n,\ x \in E_n' \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in \bigcap E_n'$. Druhú rovnosť môžeme dokázať aj pomocou prvej takto: $\bigcap E_n = \bigcap (E_n')' = (\bigcup E_n')'$; preto $(\bigcap E_n)' = ((\bigcup E_n')')' = \bigcup E_n'$.

5.2. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \langle 0,2 \rangle$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \{1\}$.

5.3. Nie je, pretože $\langle a, b \rangle' = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \notin \mathscr{S}$.

5.4. $\mathscr{S}$ je uzavretý vzhľadom na komplementy, ale nie je uzavretý vzhľadom na spočítateľné zjednotenia, pretože $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \langle 1/n, 1 \rangle = (0,1\rangle \notin \mathscr{S}$.

5.5. Ak $E_n \in \mathscr{S}$, tak aj $E_n' \in \mathscr{S}$, teda $\bigcap E_n = (\bigcup E_n')' \in \mathscr{S}$.

5.6. Nech $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{S}$. Položme $F_i = E_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $F_i = E_n$ $(i = n + 1, n + 2, \ldots)$. Potom $F_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2,$

...), teda $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{S}$. Tvrdenie o prienikoch vyplýva aj z de Morganovho pravidla

$$\bigcap_{i=1}^{n} E_i = (\bigcup_{i=1}^{n} E'_n)'.$$

5.7. Nech $E \in \mathcal{S}$. Potom aj $E' \in \mathcal{S}$, teda $\Omega = E \cup E' \in \mathcal{S}$. Odtiaľ $\emptyset = \Omega' \in \mathcal{S}$.

5.8. $E - F = E \cap F' \in \mathcal{S}$.

5.9. Ak je $\mathcal{S}$ σ-algebrou, tak je uzavretý vzhľadom na spočítateľné prieniky podľa cv. 5.5. Naopak, aj $\mathcal{S}$ je uzavretý vzhľadom na komplementy a spočítateľné prieniky, tak je $\mathcal{S}$ uzavretý aj vzhľadom na spočítateľné zjednotenia, pretože $\bigcup E_n = (\bigcap E'_n)'$.

5.10. Každá σ-algebra $\mathcal{S}$ má uvedené vlastnosti vzhľadom na cv. 5.7 a 5.8. Naopak, nech sú splnené uvedené podmienky. Potom je systém $\mathcal{S}$ (podľa 1) neprázdny a (podľa 3) uzavretý vzhľadom na spočítateľné zjednotenia. Konečne, ak $E \in \mathcal{S}$, tak (podľa 1 a 2) aj $E' = \Omega - E \in \mathcal{S}$, teda $\mathcal{S}$ je uzavretý vzhľadom na komplementy.

5.11. Položme $F_i = E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $F_i = \emptyset$ $(i = n + 1, n + 2, \ldots)$. Potom $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F_i) + 0 = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

5.12. Ak $F \subset E$, tak $E = F \cup (E - F)$, pričom E, $E-F$ sú navzájom disjunktné. Preto podľa 5.11 $P(E) = P(F) + P(E - F)$.

5.13. Podľa 5.12 je $0 \leq P(E - F) = P(E) - P(F)$, teda $P(F) \leq P(E)$.

5.14. Položme $E_n = \emptyset$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Potom $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, E_n sú navzájom disjunktné. Preto $P(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$, teda rad $\sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$ konverguje. Pre čiastočné súčty s_n nekonečného radu $\sum_{n=1}^{\infty} P(\emptyset)$ platí: $s_n = P(\emptyset) + \ldots + P(\emptyset) = nP(\emptyset)$. Ale $\lim_{n\to\infty} nP(\emptyset)$ existuje práve vtedy, keď $P(\emptyset) = 0$.

5.15. Podľa cv. 5.12 je $P(E') = P(\Omega - E) = P(\Omega) - P(E) = 1 - P(E)$.

5.16. Zrejme $E \cup F = (E - F) \cup (E \cap F) \cup (F - E)$, $E = (E - F) \cup (E \cap F)$, $F = (F - E) \cup (E \cap F)$. Odtiaľ $P(E) = P(E - F) + P(E \cap F)$, $P(F) = P(F - E) + P(E \cap F)$, $P(E \cup F) = P(E - F) + P(E \cap F) + P(F - E) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

5.17. Dôkaz je ten istý ako v cv. 1.20.