5. kapitola

AXIÓMY TEÓRIE PRAVDEPODOBNOSTI

Už dvakrát sme spomenuli, že pravdepodobnosť je vlastne zobrazenie, ktoré každej množine E z nejakého systému množín $\mathscr{S}$ priraďuje reálne číslo $P(E)$. V prvej kapitole pozostával $\mathscr{S}$ zo všetkých podmnožín danej konečnej množiny. V druhej kapitole pozostával $\mathscr{S}$ zo všetkých množín v danej rovinnej oblasti, ktorých „obsah sa dá vypočítať".

Teraz sa postavíme na axiomatické stanovisko. Pre teóriu pravdepodobnosti nie je natoľko dôležitá konštrukcia systému $\mathscr{S}$ resp. zobrazenia P, ako ich vlastnosti. Úlohou teórie pravdepodobnosti je potom odvádzať z jednoduchých, axiomaticky vymedzených vlastností, zložitejšie a tak vytvárať účinný aparát pre riešenie praktických úloh.

Ostatne, axiomatická metóda je čitateľovi iste známa. Už tradične sa axiomaticky vymedzujú pojmy bod, priamka, rovina. Najjednoduchšie je tiež postaviť sa na axiomatické stanovisko pri vymedzení pojmu čísla. Iný dosť známy príklad pojmu, ktorý sa definuje axiomaticky (aj keď zatiaľ možno nie zo školskej praxe) je pojem grupy.

V našom prípade máme teda zobrazenie $P: \mathscr{S} \to R$ a chceme vymedziť niektoré vlastnosti, ktoré budú určovať pojem pravdepodobnosť. Najprv sa budeme zaoberať definičným oborom $\mathscr{S}$ zobrazenia P. $\mathscr{S}$ pozostáva z podmnožín danej množiny Ω. Nemusí však pozostávať zo všetkých jej podmnožín.

Definícia 5.1. *Systém $\mathscr{S}$ podmnožín neprázdnej množiny Ω sa nazýva σ-algebrou, ak má tieto vlastnosti:*

1. *$\mathscr{S}$ je neprázdny.*
2. *Ak $E \in \mathscr{S}$, tak aj $E' = \Omega - E \in \mathscr{S}$.*
3. *Ak $E_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, tak aj $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup \cup E_n \cup \ldots \in \mathscr{S}$. Množiny patriace do $\mathscr{S}$ nazývame udalosťami, alebo merateľnými množinami.*

Množinu $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \cup \ldots$ označujeme obvykle znakom $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Je to množina tých $x \in \Omega$, ktoré patria aspoň do jednej z množín E_n. Podobne znakom $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ alebo $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n \cap \ldots$ označujeme množinu tých $x \in \Omega$, ktoré patria do všetkých množín E_n.

Príklad 5.1. Nech $E_n = \langle 2^{-n}, 2^{-n+1} \rangle$. Nájdime množiny $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Riešenie. Znázornime si situáciu na obrázku. Zdá sa, že platí rovnosť $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = (0,1\rangle$. Dokážme ju.

Nech $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, potom existuje také n, že $x \in E_n = \langle 2^{-n}, 2^{-n+} \rangle \subset (0,1\rangle$, teda $x \in (0, 1\rangle$. Naopak, nech $x \in (0, 1\rangle$, t. j. $0 < x \leqq 1$. Potom existuje také n, že $2^{-n} < x$. Vezmime z týchto n najmenšie a označme ho znakom n_0. Potom

$$\frac{1}{2^{n_0}} < x\,, \quad \frac{1}{2^{n_0-1}} \geqq x$$

metože $n_0 - 1 < n_0$ a n_0 je najmenšie spomedzi spoprenutých prirodzených čísel. Vidíme teda, že existuje také prirodzené číslo n_0, že

$$x \in (2^{-n_0}, 2^{-n_0+1}\rangle \subset \langle 2^{-n_0}, 2^{-n_0+1}\rangle$$

teda

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle 2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle .$$

Dokázali sme teda skutočne, že

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle 2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle = (0, 1\rangle .$$

Čo sa týka prieniku $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, je to prázdna množina $\emptyset$. Keby totiž existoval prvok $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, potom by $x \in E_1 = \langle 1/2, 1\rangle$ t. j. $x \geqq 1/2$ a súčasne $x \in E_3 = \langle 1/8, 1/4\rangle$ t. j. $x \leqq 1/4$, ale to nie je možné.

Príklad 5.2. Nech $\Omega = \langle 0, 1\rangle$ a nech $\mathscr{S}_1 = \{\emptyset, \langle 0,1/2), \langle 1/2,1\rangle, \langle 0,1\rangle\}$, $\mathscr{S}_2 = \{\emptyset, \langle 0, 1/2\rangle, \langle 1/2,1\rangle, \langle 0,1\rangle\}$. Zistite, či $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ sú σ-algebry.

Riešenie. Uvažujme najprv o $\mathscr{S}_1$. $\mathscr{S}_1$ je neprázdny, $\mathscr{S}_1$ je uzavretý vzhľadom na komplementy. Konečne, $\mathscr{S}_1$ je uzavretý vzhľadom na spočítateľné zjednotenia. Vidíme teda, že $\mathscr{S}_1$ je σ-algebra. Na druhej strane $\mathscr{S}_2$ nie je σ-algebra, pretože $\langle 0,1/2\rangle \in \mathscr{S}_2$, ale $\langle 0,1\rangle - \langle 0,1/2\rangle = (1/2,1\rangle \notin \mathscr{S}_2$.

Cvičenia

5.1. Dokážte tzv. de Morganove pravidlá

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)' = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n' , \quad \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n' .$$

5.2. Nech $E_n = \langle 1 - 1/n, 1 + 1/n \rangle$. Vypočítajte $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

5.3. Zistite, či systém $\mathcal{S}$ všetkých intervalov na číselnej osi je σ-algebrou.

5.4. Uvažujme o systéme $\mathcal{S}$ pozostávajúcom z $\emptyset$, $\langle 0,1 \rangle$ všetkých intervalov tvaru $\langle 0, 1/n)$ a všetkých intervalov tvaru $\langle 1/n, 1 \rangle$. Zistite, či je $\mathcal{S}$ σ-algebrou.

5.5. Dokážte, že každá σ-algebra $\mathcal{S}$ je uzavretá vzhľadom na spočítateľné prieniky tj. ak $E_n \in \mathcal{S} (n = 1, 2, \ldots)$, tak aj $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$.

5.6. Dokážte, že každá σ-algebra $\mathcal{S}$ je uzavretá vzhľadom na konečné zjednotenia a prieniky.

5.7. Ak $\mathcal{S}$ je σ-algebra, tak $\emptyset, \Omega \in \mathcal{S}$.

5.8. Ak $\mathcal{S}$ je σ-algebra a $E, F \in \mathcal{S}$, tak aj $E - F = \{x \in \Omega; x \in E, x \notin F\} \in \mathcal{S}$.

5.9. Neprázdny systém $\mathcal{S}$ podmnožín danej množiny Ω je σ-algebrou práve vtedy, keď je uzavretý vzhľadom na komplementy a vzhľadom na spočítateľné prieniky.

5.10. Dokážte, že systém $\mathcal{S}$ podmnožín množiny Ω je σ-algebrou práve vtedy, keď má tieto vlastnosti: 1. $\Omega \in \mathcal{S}$. 2. $E, F \in \mathcal{S} \Rightarrow E - F = \{x \in \Omega; x \in E, x \notin F\} \in \mathcal{S}$. 3. $E_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$.

Teraz pristúpime k axiomatickej definícii pravdepodobnosti.

Definícia 5.2. *Nech $\mathcal{S}$ je σ-algebra podmnožín neprázdnej množiny Ω, $P: \mathcal{S} \to R$ je zobrazenie, ktoré každej množine $E \in \mathcal{S}$ priraďuje reálne číslo $P(E)$. Zobrazenie P nazývame pravdepodobnosťou, ak má tieto vlastnosti:*

1. $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$.

2. $P(E) \geqq 0$ *pre všetky* $E \in \mathcal{S}$.

3. *Ak* $E_n \in \mathcal{S}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *a* $E_n \cap E_m = 0$ $(n \neq m)$, *tak*

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \cup \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) .$$

Vlastnosť uvedená pod číslom 3 sa nazýva σ-aditívnosť zobrazenia P.

Príklad 5.3. Ilustrujme si σ-aditívnosť na tomto príklade: $E_n = (2^{-n}, 2^{-n+1}\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, $P((a, b\rangle) = b - a$.

Riešenie. Podobne ako v príklade 5.1 zistíme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = (0, 1\rangle$, teda

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 .$$

Na druhej strane $P(E_n) = 2^{-n+1} - 2^{-n} = 2^{-n}$, teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

je geometrický rad s kvocientom 1/2. Preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 .$$

Vidíme teda, že

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) .$$

Příklad 5.4. Ilustrujme teraz σ-aditívnosť na inom príklade: Hádžeme kockou dovtedy, kým nepadne šestka. Nech E_0 je udalosť spočívajúca v tom, že šestka nepadne nikdy, E_n je udalosť spočívajúca v tom, že šestka padne prvýkrát pri n-tom hode.

Riešenie. V tomto prípade je rozumné položiť $\Omega = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Potom $E_n = \{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Udalosti E_m sú zrejme navzájom disjunktné ($E_n \cap E_m = \emptyset$ pre $n \neq m$), $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = \Omega$, teda

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = 1 .$$

Na druhej strane pre $n \geqq 1$ je

$$P(E_n) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot \;\cdots\; \cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\,,$$

teda

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \cdots$$

je geometrický rad s kvocientem 5/6. Preto

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = 1.$$

Zo σ-aditívnosti dostávame

$$1 = P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(E_n) = P(E_0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) =$$

$$= P(E_0) + 1\,,$$

teda

$$P(E_0) = 0\,.$$

Pravdepodobnosť toho, že šestka nepadne nikdy je 0.

Cvičenia

5.11. Dokážte, že pravdepodobnosť je konečne aditívna, tj.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i), \text{ ak } E_i \cap E_j = \emptyset \ (i \neq j).$$

5.12. Dokážte, že pravdepodobnosť je subtraktívna, t. j. $P(E - F) = P(E) - P(F)$, v prípade, že $F \subset E$.

5.13. Dokážte, že pravdepodobnosť je monotónna, t. j. z inklúzie $F \subset E$ vyplýva, že $P(F) \leqq P(E)$.

5.14. Ak $P\colon \mathscr{S} \to R$ je nezáporná a σ-aditívna, tak $P(\emptyset) = 0$. Dokážte.

5.15. Dokážte, že $P(E') = 1 - P(E)$.

5.16. Dokážte, že pre všetky $E, F \in \mathscr{S}$ je $P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(E \cap F)$.

5.17. Dokážte, že pre všetky $E_1, \ldots, E_n \in \mathscr{S}$ platí

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i \cap E_j \cap E_k) - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)\,.$$

Nakoniec si dokážeme dve zložitejšie tvrdenia.

Príklad 5.5. Nech $E_n \in \mathscr{S}$, $E_n \subset E_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Potom

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} P(E_n)\,.$$

Riešenie. Položme $F_1 = E_1$, $F_n = E_n - E_{n-1}$ $(n = 2, \ldots)$. Najprv dokážeme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Na jednej strane totiž $F_n \subset E_n \subset E$, teda $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset E$. Nech na druhej strane $x \in E$. Potom sú dve možnosti:

1) x patrí do všetkých E_i, teda aj do $E_1 = F_1$, čiže $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

2) x nepatrí do všetkých E_i. Označme znakom n najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré $x \in E_n$. Potom $n > 1$ (inak by x patrilo do všetkých E_i) a $x \notin E_{n-1}$. Preto $x \in E_n - E_{n-1} = F_n$, teda $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Zo σ-aditívnosti pravdepodobnosti P dostávame

$$P(E) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n) .$$

Podľa definície je súčet nekonečného radu limitou postupnosti čiastočných súčtov s_n,

$$s_n = P(F_1) + P(F_2) + \ldots + P(F_n) .$$

Podľa cvičenia 5.12 ($E_{i-1} \subset E_i$) je však pre $i > 1$ $P(F_i) = P(E_i - E_{i-1}) = P(E_i) - P(E_{i-1})$. Preto

$$s_n = P(E_1) + (P(E_2) - P(E_1)) + (P(E_3) -$$
$$- P(E_2)) + \ldots + (P(E_n) - P(E_{n-1})) = P(E_n) .$$

Odtiaľ dostávame

$$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n) = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} P(E_n) .$$

Príklad 5.6. Nech $E_n \in \mathscr{S}$, $E_n \supset E_{n+1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Potom

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) .$$

Riešenie. Položme $F_n = E'_n$. Potom $F_n \in \mathscr{S}$, $F_n \subset \subset F_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, teda podľa príkladu 5.5 a cvičenia 5.15 je

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - P((\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)') =$$

$$= 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(F_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E'_n) =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(E_n)) = 1 - 1 + \lim_{n\to\infty} P(E_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(E_n) .$$