O pravdepodobnosti

4. kapitola. Podmienená pravdepodobnosť

In: Beloslav Riečan (author); Zdena Riečanová (author): O pravdepodobnosti. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 50–63.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403854

4. kapitola

PODMIENENÁ PRAVDEPODOBNOSŤ

Vráťme sa k príkladu 3.6. V urne sme mali 7 bielych a 9 modrých guliek. Pravdepodobnosť $P(M_1)$ vytiahnutia modrej guľky (pri prvom ťahu) je teda 9/16. Ak však vytiahneme prvú bielu guľku a nevrátime ju, pri druhom ťahu sa pravdepodobnostné pomery menia. Pravdepodobnosť, že bude vytiahnutá modrá guľka (za predpokladu, že prvá vytiahnutá guľka bola biela) je o niečo väčšia — 9/15.

V príklade 3.6 sme, pravda, vypočítali $P(B_1) = 7/16$, $P(M_2) = 9/16$. Ale M_2 je udalosť spočívajúca v tom, že druhá vytiahnutá guľka je modrá, bez ohľadu na to, aká bola prvá. (Základný priestor Ω pozostáva z dvojíc ťahaných guliek a obsahuje celkom 16.15 prvkov.) Tých 9/15 je pravdepodobnosť udalosti M_2 podmienená tým, že sa uskutočnila udalosť B_1; označme ju znakom $P(M_2|B_1)$. Čím je charakterizovaná? Ako ju definovať, resp. vypočítať?

V príklade 3.6. sme zistili, že

$$P(B_1 \cap M_2) = \frac{7.9}{16.15} = \frac{7}{16} \cdot \frac{9}{15} = P(B_1)\, P(M_2|B_1)\,.$$

A práve túto rovnosť použijeme na definíciu podmienenej pravdepodobnosti.

Definícia 4.1. *Nech A, B sú ľubovoľné udalosti,* $P(B) > 0$. *Potom definujeme*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Číslo $P(A|B)$ nazývame podmienenou pravdepodobnosťou udalosti A za podmienky, že nastala udalosť B.

Príklad 4.1. Mladé dievča má 20 potenciálnych pytačov. Vie porovnať vlastnosti každých dvoch z tých, ktorí ju už popýtali o ruku. Ak sa rozhodne vydať sa, berie si posledného z tých, ktorí ju pýtali (odmietnutí pytači už neprichádzajú do úvahy), a to vtedy, ak je najlepší zo všetkých dovtedajších pytačov. Povedzme, že siedmy pytač v poradí bol úspešný. Aká je pravdepodobnosť toho, že si za muže vzalo najlepšieho spomedzi všetkých dvadsiatich?

Riešenie. Nech A je udalosť — dievčina si vybrala najlepšieho spomedzi dvadsiatich mládencov, B — vybrala si najlepšieho spomedzi prvých siedmich. Vieme teda, že B nastala a pýtame sa na $P(A|B)$.

Sedem prvých pytačov možno usporiadať celkom $7!$ spôsobmi. Pritom, ak je siedmy pytač najlepší, predošlých 6 pytačov môžeme usporiadať $6!$ spôsobmi. Preto

$$P(B) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}.$$

Podobne

$$P(A) = \frac{1}{20}.$$

Uvážme ešte, že $A \cap B = A$, (Najlepší spomedzi dvadsiatich je najlepším aj spomedzi siedmich.) Teda

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{20}.$$

Cvičenia

4.1. Na Prírodovedeckej fakulte študuje 30 % poslucháčov matematiku, 20 % matematiku aj fyziku. Aká je pravdepodobnosť toho, že študent študujúci matematiku bude študovať aj fyziku?

4.2. Hráč vytiahol 4 karty spomedzi 52 kanastových kariet; všetky sú červené. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky 4 budú srdcové alebo všetky štyri budú kárové?

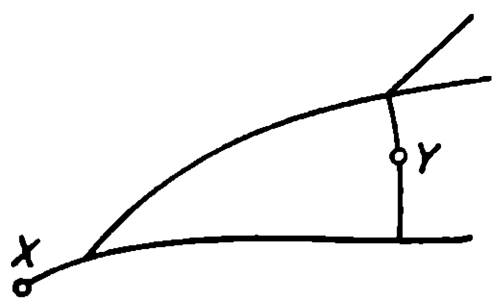
4.3. Dané sú pravdepodobnosti $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(A \cap B) = 1/6$. Vypočítajte $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A'|B')$, $P(B'|A')$.

4.4. Dané sú pravdepodobnosti $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$. Vypočítajte $P(A|B)$.

4.5. Vypočítajte $P(B|A)$ v prípade, že $A \subset B$.

4.6. Vypočítajte $P(B|A)$ v prípade, že $A \cap B = \emptyset$.

Príklad 4.2. Z mesta X do mesta Y sa možno dostať dvomi cestami podľa priloženej mapy. Automobilista, ktorý nepozná cestu sa vydá správnym smerom, ale na každej križovatke sa rozhoduje náhodne; všetky možnosti sú rovnako pravdepodobné. Aká je pravdepodobnosť, že automobilista príde do mesta Y?



Obr. 7

Riešenie. Označme znakom A udalosť — automobilista príde do Y, B_1 — automobilista sa vybral po dolnej (pravej) ceste, B_2 — po hornej (ľavej) ceste. Podľa podmienok úlohy, $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$. Ak sa ale vydal po hornej ceste, potom pravdepodobnosť, že nájde Y je 1/3 (má 3 rovnako pravdepodobnosé možnosti), teda $P(A|B_2) = 1/3$. Podobne dostaneme, že $P(A|B_1) = 1/2$. Uvážme, že

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

Skutočne, ak $\omega \in A$ (automobilista prišiel do Y), tak alebo $\omega \in B_1 \cap A$ (prišiel do Y po dolnej ceste), alebo $\omega \in B_2 \cap A$ (prišiel do Y po hornej ceste), teda $A \subset \subset (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$; podobne sa dokáže opačná inklúzia. Pretože $A \cap B_1$, $A \cap B_2$ sa navzájom vylučujú (cesty B_1, B_2 sa pretnú až v Y), máme

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) = \\ &= P(B_1)\, P(A|B_1) + P(B_2)\, P(A|B_2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Postup, ktorý sme použili v príklade 4.2 možno zovšeobecniť. Nech

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i\,, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j)\,.$$

Potom

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)\,,$$

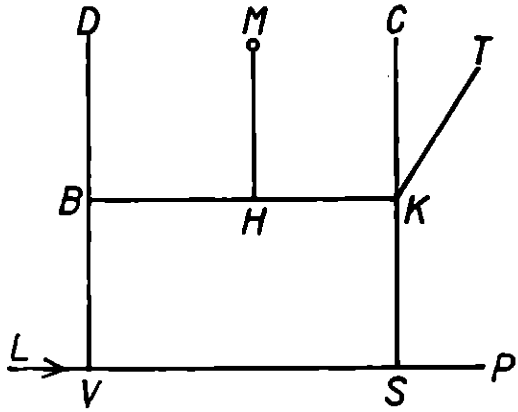
teda

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) = \\ &= P(B_1)\, P(A|B_1) + P(B_2)\, P(A|B_2) + \ldots + \\ &\quad + P(B_n)\, P(A|B_n)\,, \end{aligned}$$

alebo krátko zapísané

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A|B_i)\,.$$

Príklad 4.3. Matematický pavilon v Mlynskej doline v Bratislave stojí na dosť neznámom mieste M. Aká je pravdepodobnosť, že študent motorista ho nájde? Pritom z hlavnej cesty na vedľajšiu odbočuje s pravdepodobnosťou 1/3; pri križovatke ciest rovnakého významu má každá z možností rovnakú pravdepodobnosť. Študent začne hľadať pri Lafranconi L smerom von z mesta ($L \longrightarrow V$) a prestane hľadať, ak prejde dvakrát po tom istom mieste, alebo ak príde na Pražskú cestu (P), Devínsku cestu (D), pred televízne štúdio (T) alebo na cintorín v Slávičom údolí (C). (Prirodzene prestane hľadať aj vtedy, keď nájde Matematický pavilón M.)



Obr. 8(Hlavnými su cesty $LVSP$ a $LVBD$.)

Riešenie. Študent má dve možnosti B_1, B_2. Buď pôjde vľavo (V, B), alebo vpravo (V, S). Ak sa dá po ceste B_1, pravdepodobnosť, že nájde M je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (najprv odbočuje na vedľajšiu cestu pri botanickej záhrade B, potom prechádza križovatkou H ciest rovnakého významu). Ak sa dá po ceste B_2, pravdepodobnosť, že nájde M (t. j., že pôjde po ceste S, K, H, M) je $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$. Preto (označme nájdenie M na prvý pokus znakom M_1)

$$P(M_1) = P(B_1)\, P(M_1 | B_1) + P(B_2)\, P(M_1 | B_2) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{9}.$$

Uvedený výsledok je v súlade s našou skúsenosťou. Nájsť Matematický pavilón v Mlynskej doline je dosť ťažké.

Príklad 4.4. Povedzme, že po uvedomení si neúspechu študent pokus nájsť M zopakuje podľa tých istých pravidiel. Aká je pravdepodobnosť toho, že študent nájde Matematický pavilón pri týchto dvoch pokusoch?

Riešenie. Označme znakom M_2 udalosť: študent nájde M pri druhom pokuse. Potom

$$P(M_2) = P(M_2 \cap P) + P(M_2 \cap T) + P(M_2 \cap C) +$$
$$+ P(M_2 \cap D) + P(M_2 \cap L) =$$
$$= P(P)\, P(M_2 | P) + P(T)\, P(M_2 | T) + \dots +$$
$$+ P(L)\, P(M_2 | L)\,.$$

(Do L sa dostáva, ak pri prvom pokuse prejde dvakrát to isté miesto t. j. V. V tom prípade odchádza k L a otočí sa.) Vidno, že treba najprv vypočítať pravdepodobnosti P, T, C, D, L (pri prvom pokuse). Podobne ako pri výpočte $P(M_1)$ dostaneme

$$P(P) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}_{L,V,S,P} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}_{L,V,B,H,K,S,P} = \frac{25}{72}\,;$$

$$P(T) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{L,V,S,K,T} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}_{L,V,B,H,K,T} = \frac{1}{12}; \quad P(C) = \frac{1}{12};$$

$$P(D) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}_{L,V,B,D} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{L,V,S,K,H,B,D} = \frac{25}{72};$$

$$P(L) = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}_{L,\,V,\,B,\,H,\,K,\,S,\,V} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{L,\,V,\,S,\,K,\,H,\,B,\,V} = \frac{1}{36}$$

(Všimnime si, pre kontrólu, že $P(M_1) + P(P) + \ldots + P(L) = 1$.) Počítajme teraz podmienené pravdepodobnosti

$$P(M_2|P) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{9},$$

$$P(M_2|T) = P(M_2|C) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{72},$$

$$P(M_2|D) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{27},$$

$$P(M_2|L) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{9}.$$

Po dosadení dostaneme

$$P(M_2) = \frac{25}{72}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{12}\cdot\frac{13}{72} + \frac{1}{12}\cdot\frac{13}{72} + \frac{25}{72}\cdot\frac{5}{27} + \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{9} \doteq 0{,}135.$$

Pri dvoch pokusoch ($M_1 \cap M_2 = \emptyset$) je teda

$$P(M_1 \cup M_2) = 0{,}111 + 0{,}135 = 0{,}246\,.$$

Príklad 4.5. Predpokladajme teraz, že študent podnikne len jeden pokus, ale nekončí ho v prípade, že prechádza dvakrát po tom istom mieste. Aká je pravdepodobnosť toho, že nájde M?

Riešenie. Študent má v podstate dve možnosti: Točiť sa v smere hodinových ručičiek a pritom hľadať M, alebo točiť sa naopak. (Predpokladajme, že nemôže otočiť automobil do protismeru.) Pravdepodobnosť jednej ľavotočivej otáčky (začíname medzi H a B) je

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\;\frac{1}{2} = \frac{1}{72}\,.$$

Podobne pravdepodobnosť jednej pravotočivej otáčky (začneme medzi H a K) je

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{72}\,.$$

Preto

$$P(M_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{72} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{72}\right)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{72} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{72}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{1}{36}\left(1 + \frac{1}{72} + \frac{1}{72^2} + \cdots\right) +$$

$$+ \frac{1}{12}\left(1 + \frac{1}{72} + \frac{1}{72^2} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\frac{1}{1 - \frac{1}{72}} + \frac{1}{12}\frac{1}{1 - \frac{1}{72}} = \frac{8}{71}.$$

Vidíme teda, že pravdepodobnosť úspechu sa zvýši celkom nepatrne. Neoplatí sa teda motať dvakrát (dokonca nekonečne veľakrát) po tom istom mieste.

Cvičenia

4.7. Majme 4 urny. V prvej sú 3 biele a 2 čierne guľôčky, v druhej 2 biele a 2 čierne, v tretej 1 biela 4 čierne a vo štvrtej 5 bielych a jedna čierna. Náhodne vyberieme jednu urnu a z nej guľôčku. Aká je pravdepodobnosť toho, že bude biela?

4.8. Prvý stroj vyrába 50 % výrobkov určitého druhu, druhý stroj 30 % a tretí stroj 20 %. Z toho chybných výrobkov je u prvého stroja 3 %, u druhého 4 %, u tretieho 5 %. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok bude chybný?

Príklad 4.6. Predpokladajme, že v určitom mieste počas sezóny pätinu dní prší, inokedy je pekne. Predpoveď dážďa býva chybná v polovici prípadov, predpoveď pekného počasia v desatine prípadov. Aká je pravdepodobnosť toho, že predpoveď počasia na niektorý deň bude správna?

Riešenie. Nech udalosť A_1 znamená, že prší, A_2 — je pekne, B_1 — predpovedali dážď, B_2 — predpovedali pekné počasie. Máme vypočítať $P((A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2)) =$

$P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2)$. Pritom vieme, že $P(A_1) = 1/5$, $P(A_2) = 4/5$, $P(A_1|B_1) = 1/2$, $P(A_1|B_2) = 1/10$, $P(A_2|B_2) = 9/10$. Zrejme

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 \cap B_1) + P(A_1 \cap B_2) = \\ &= P(A_1|B_1)\,P(B_1) + P(A_1|B_2)\,P(B_2) = \\ &= P(A_1|B_1)\,P(B_1) + P(A_1|B_2)\,(1 - P(B_1)), \end{aligned}$$

teda

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2}P(B_1) + \frac{1}{10}(1 - P(B_1)) .$$

Odtiaľ dostávame

$$P(B_1) = \frac{1}{4}, \quad P(B_2) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Preto

$$P(A_1 \cap B_1) = P(B_1)\,P(A_1|B_1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$P(A_2 \cap B_2) = P(B_2)\,P(A_2|B_2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{10} = \frac{27}{40},$$

$$P(A_1 \cap B_1) + P(A_2 \cap B_2) = \frac{1}{8} + \frac{27}{40} = \frac{4}{5}.$$

Príklad 4.7. V herni hrá hráč, ktorý má 50 Kčs. Pri každej hre môže s rovnakou pravdepodobnosťou vyhrať resp. prehrať 1 Kčs. Zaumienil si hrať dovtedy, kým nebude mať 100 Kčs. Aká je pravdepodobnosť toho, že príde o všetky peniaze?

Riešenie. Nech $p(x)$ je pravdepodobnosť toho, že hráč, ktorý má x korún príde pri daných pravidlách (a predsavzatí mať 100 Kčs) o všetky. Zrejme $p(0) = 1$, $p(100) = 0$.

Pri prvej hre sú dve možnosti. Buď vyhrá 1 Kčs (potom má $x + 1$ Kčs) a vtedy je pravdepodobnosť bankrotu $p(x + 1)$, alebo prehrá 1 Kčs a pravdepodobnosť bankrotu je $p(x - 1)$. Vzhľadom na to, že pravdepodobnosť výhry i prehry je 1/2, máme

$$p(x) = \frac{1}{2}\, p(x + 1) + \frac{1}{2}\, p(x - 1)\,.$$

Riešenie tejto rovnice nájdeme skusmo: každá lineárna funkcia $p(x) = cx + d$ je jej riešením. Z podmienok $p(0) = 1$, $p(100) = 0$ dostávame

$$1 = d\,, \quad 0 = 100c + 1\,,$$

teda

$$p(x) = 1 - \frac{x}{100}\,.$$

V našom prípade je $x = 50$, teda $p(50) = 1 - \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$.

Príklad 4.8. Opitý človek stojí krok od priepasti a pohybuje sa po jednej priamke (kolmej na smer priepasti), pričom pravdepodobnosť toho, že urobí krok k priepasti je p ($p < 1/2$). Aká je pravdepodobnosť toho, že spadne do priepasti?

Riešenie. Označme znakom K_1 resp. K_2 udalosť spočívajúcu v tom, že opitý spadne do priepasti, ak je jeden resp. dva kroky od nej. Máme vypočítať $P(K_1)$. Pretože pravdepodobnosť toho, že opitý urobí krok k priepasti resp. od priepasti je p resp. $1 - p$, máme

$$P(K_1) = p + (1 - p)\, P(K_2)\,.$$

K_2 sa môže uskutočniť len tak, že opitý sa dostane zo vzdialenosti 2 krokov do vzdialenosti 1 kroku od priepasti (pravdepodobnosť čoho je taká istá ako $P(K_1)$) a potom zo vzdialenosti 1 kroku do vzdialenosti 0 krokov (to je udalosť K_1), teda

$$P(K_2) = P(K_1)\,P(K_1)\,.$$

Odtiaľ dostávame kvadratickú rovnicu

$$P(K_1) = p + (1 - p)\,(P(K_1))^2$$

alebo

$$(1 - p)\,(P(K_1))^2 - P(K_1) + p = 0\,.$$

Jej riešenie je

$$(P(K_1))_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1 - p)}}{2(1 - p)} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1 - 2p)^2}}{2(1 - p)} = \frac{1 \pm |1 - 2p|}{2(1 - p)}\,.$$

Pretože $p < 1/2$, platí $|1 - 2p| = 1 - 2p$, teda

$$(P(K_1))_{1,2} = \frac{1 \pm (1 - 2p)}{2(1 - p)} = \begin{cases} 1 \\ \dfrac{p}{1 - p} \end{cases}$$

Pravdepodobnosť toho, že opitý spadne do priepasti je $p/(1 - p)$.

Rozmanité úlohy možno riešiť aj pomocou tzv. Bayesovej formule. Skôr ako by sme ju odôvodnili vo všeobecnosti vysvetlíme ju na príklade.

Príklad 4.9. Na fakulte študuje 60 % dievčat. Spomedzi chlapcov študuje matematiku 25 %, spomedzi dievčat 10 %. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý študent matematiky bude dievča?

Riešenie. Vieme, že $P(D) = 0{,}6$, $P(Ch) = 0{,}4$, $P(M|Ch) = 0{,}25$, $P(M|D) = 0{,}1$. Máme vypočítať $P(D|M)$. Výjdeme z rovností

$$P(D \cap M) = P(M)\, P(D|M)\,,$$
$$P(D \cap M) = P(D)\, P(M|D)\,.$$

Odtiaľ

$$P(D|M) = \frac{P(D)\, P(M|D)}{P(M)} = \frac{0{,}6\,.\,0{,}1}{P(M)} = \frac{0{,}06}{P(M)}\,.$$

Pravdepodobnosť $P(M)$ vypočítame obvyklým spôsobom.

$$\begin{aligned} P(M) &= P(D \cap M) + P(Ch \cap M) = \\ &= P(D)\, P(M|D) + P(Ch)\, P(M|Ch) = \\ &= 0{,}6\,.\,0{,}1 + 0{,}4\,.\,0{,}25 = 0{,}16\,. \end{aligned}$$

Preto

$$P(D|M) = \frac{0{,}06}{0{,}16} = \frac{3}{8}\,.$$

Uvedenú úvahu môžeme urobiť aj vo všeobecnejšom prípade. Nech $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, pričom D_i sú navzájom disjunktné. (V predošlom príklade bolo $n = 2$, $D_1 = D$, $D_2 = Ch$.) Potom

$$P(D_j|M) = \frac{P(D_j)\, P(M|D_j)}{P(M)}\,,$$

pričom

$$P(M) = \sum_{i=1}^{n} P(M \cap D_i) = \sum_{i=1}^{n} P(D_i)\, P(M|D_i)\,,$$

teda

$$P(D_j|M) = \frac{P(D_j)\, P(M|D_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(D_i)\, P(M|D_i)}\,.$$

A to je už Bayesov vzorec.

Cvičenia

4.9. Majme 3 urny. V prvej sú 3 biele a 2 červené guľky, v druhej 1 biela a 4 červené, v tretej 2 biele a 3 červené. Náhodne vyberieme guľku z niektorej náhodne vybratej urny. Vidíme, že je biela. Aká je pravdepodobnosť toho, že bola vytiahnutá z prvej urny?

4.10. Prvý stroj vyrába 50 % výrobkov určitého druhu, druhý stroj 30 %, tretí 20 %. Chybných výrobkov sa na prvom stroji vyrobí 3 %, na druhom 4 %, na treťom 5 %. Vyberieme jeden výrobok a zistíme že je chybný. Aká je pravdepodobnosť toho, že bol vyrobený na prvom stroji?

4.11. V určitej oblasti je 60 % žien. Vyšších ako 180 cm je pritom 4 % mužov a 1 % žien. Niektorá osoba je vyššia ako 180 cm. Aká je pravdepodobnosť toho, že je to žena?

4.12. V urne sú tri guľky. Sú biele a čierne, ale nevieme, ktorých je koľko. Všetky hypotézy (3 biele, 2 biele a 1 čierna, 1 biela a 2 čierne, 3 čierne) sú rovnako pravdepodobné. Vytiahneme jednu guľku a vidíme, že je biela. Aké sú podmienené pravděpodobnosti jednotlivých hypotéz?

4.13. Pri vyšetrovaní pacienta je podozrenie na tri navzájom sa vylučujúce choroby s pravdepodobnosťou výskytu 0,3 resp. 0,5 resp. 0,2. Laboratórna skúška dáva kladný výsledok u 15 % chorých na prvú chorobu, u 30 % na druhú a 20 % na tretiu. Aké sú pravdepodobnosti jednotlivých chorôb po vykonaní laboratórnej skúšky s kladným výsledkom?

4.14. Riešte podobnú úlohu ako v 4.13 s tým rozdielom, že laboratórna skúška je urobená päťkrát a dáva v štyroch prípadoch kladný v jednom záporný výsledok.