3. kapitola

# NEZÁVISLÉ UDALOSTI

Začnime s jednoduchým príkladom.

**Príklad 3.1.** Hádžeme dvakrát tou istou kockou. Aká je pravdepodobnosť toho, že po oba razy padne šestka (označme túto udalosť znakom $(+, +)$); že prvý raz padne šestka, druhý raz nepadne (udalosť $(+, -)$); že prvý raz nepadne, druhý raz padne (udalosť $(-, +)$); že nepadne ani raz (udalosť $(-, -)$)?

*Riešenie.* Pri dvojnásobnom hode kockou je možných celkom 36 výsledkov $(1, 1), \ldots, (1, 6), (2, 1), \ldots, (2, 6), \ldots, (6, 1), \ldots, (6, 6)$. Pri prvom hode je totiž možných 6 výsledkov a ku každému z nich máme 6 možných výsledkov pri druhom hode. Základný priestor (istá udalosť) $\Omega$ pozostáva teda z 36 prvkov

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}.$$

Udalosť, ktorú sme označili znakom $(+, +)$ nastane vtedy, keď po oba razy padne šestka, teda

$$(+, +) = \{(6, 6)\}.$$

Preto

$$P(+, +) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Ďalej

$$(+, -) = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}.$$

teda

$$P(+,—) = \frac{5}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}.$$

Podobne

$$(—,+) = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\},$$

$$P(—,+) = \frac{5}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Konečne

$$(—,—) = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 5), \ldots, (5, 1), \ldots, (5, 5)\}.$$

teda

$$P(—,—) = \frac{25}{36} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}.$$

Čitateľ si iste pamätá, že 1/6 resp. 5/6 je pravdepodobnosť toho, že pri jednom hode padne resp. nepadne šestka. Preto si ľahko sám z výsledkov

$$P(+,+) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad P(+,—) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

$$P(—,+) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \quad P(—,—) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

vytvorí hypotézu. Overme si ju najprv na ďalších príkladoch.

**Príklad 3.2.** Hádžme trikrát po sebe kockou, vypíšme všetky udalosti súvisiace s padnutím resp. nepadnutím šestky a vypočítajme ich pravdepodobnosť.

*Riešenie.* Základný priestor $\Omega$ má teraz $6^3 = 216$ prvkov. Nás zaujíma $8 = 2^3$ udalostí $(+,+,+)$, $(+,+,—)$, $(+,—,+)$, $(—,+,+)$, $(+,—,—)$, $(—,+,—)$,

$(-, -, +)$, $(-, -, -)$. Podobne ako predtým vypočítame

$$P(+, +, +) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(+, +, -) = \frac{5}{6^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

$$P(+, -, +) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(-, +, +) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(+, -, -) = \frac{5^2}{6^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

$$P(-, +, -) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6},$$

$$P(-, -, +) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

$$P(-, -, -) = \frac{5^3}{6^3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}.$$

## Cvičenia

**3.1.** Hádžme trikrát po sebe kockou. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) práve dvakrát padne šestka b) aspoň raz padne šestka c) šestka padne nanajvýš dvakrát?

**3.2.** Hádžme päťkrát mincou. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) nikdy nepadne znak b) práve trikrát padne znak c) práve dvakrát padne znak d) najviac dvakrát padne znak?

**3.3.** V desiatich urnách je po deviatich bielych a jednej čiernej guľke. Vytiahneme z každej urny po jednej guľke. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky budú biele?

3.4. Vyťahujeme guľky z troch urien. V prvej sú 3 biele a 2 čierne guľky, v druhej 5 bielych a 1 čierna, v tretej 3 biele a 4 čierne. Vytiahneme z každej urny po jednej guľke. Aká je pravdepodobnosť toho, že všetky tri budú biele?

**Príklad 3.3.** Nech $\Omega = \{x_1, \ldots, x_i\}$ je konečná množina pozostávajúca z $i$ prvkov, $\emptyset \neq A \subset \Omega$, $A$ pozostáva z $m$ prvkov. Nech $\Omega \times \Omega$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc $(x, y)$ prvkov z množiny $\Omega$. Aká je pravdepodobnosť toho, že oba prvky $x$, $y$ patria do množiny $A$ (inak povedané, že v oboch opakovaniach nastane udalosť $A$); že $x \in A$, $y \notin A$; že $x \notin A$, $y \in A$; že $x \notin A$, $y \notin A$

*Riešenie.* Spomínané udalosti označíme po rade $(+, +)$, $(+, —)$, $(—, +)$, $(—, —)$. Všetkých usporiadaných dvojíc $(x, y)$ prvkov množiny $\Omega$ je $i \cdot i = i^2$. Ďalej, počet prvmnožiny $(+, +)$ je $m \cdot m = m^2$, teda

$$P(+, +) = \frac{m^2}{i^2} = \frac{m}{i} \cdot \frac{m}{i}.$$

Počet prvkov množiny $(+, —)$ je $m \cdot (i—m)$, teda

$$P(+, —) = \frac{m}{i} \cdot \frac{i - m}{i} = \frac{m}{i}\left(1 - \frac{m}{i}\right).$$

Podobne

$$P(—, +) = \left(1 - \frac{m}{i}\right)\frac{m}{i},$$

$$P(—, —) = \frac{i - m}{i} \cdot \frac{i - m}{i} = \left(1 - \frac{m}{i}\right)\left(1 - \frac{m}{i}\right)$$

Označme znakom $p$ pravdepodobnosť udalosti $A$, t. j. $p = P(A) = \frac{m}{i}$, znakom $q$ pravdepodobnosť opačnej udalosti $A'$, t. j. $q = P(A') = 1 — P(A) = 1 — \frac{m}{i} = 1 — p$. Potom

$$P(+,+) = p.p = p^2\,, \quad P(+,-) = p.q\,,$$
$$P(-,+) = q.p\,, \quad P(-,-) = q.q = q^2\,.$$

**Príklad 3.4.** Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, (takže $P(A) = p = 3/5$). Nech $\Omega^n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega}_{n\text{-krát}}$ je množina všetkých usporiadaných $n$-tíc prvkov z $\Omega$ (t. j. množina všetkých možných výsledkov pri $n$-násobnom opakovaní „pokusu" $\Omega$). Aká je pravdepodobnosť udalosti $B$, že $n$-tica $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ bude mať prvky z množiny $A$ práve na miestach $j_1, j_2, \ldots, j_k$?

*Riešenie.* Všetkých prvkov množiny $\Omega^n$ je $5.5. \ldots .5 = 5^n$. Do súradníc $j_1, \ldots, j_k$ môžeme dosadiť po 3 prvky, na iné miesta zvyšné dva prvky, takže všetkých prvkov skúmanej množiny je

$$2. \ldots \underset{j_1}{.3.} \ldots \underset{j_2}{.3.} \ldots \underset{j_k}{.3.} \ldots = 3^k . 2^{n-k}\,,$$

teda

$$P(B) = \frac{3^k . 2^{n-k}}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-k} =$$
$$= \left(\frac{3}{5}\right)^k \left(1 - \frac{3}{5}\right)^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k}.$$

## Cvičenia

**3.5.** Hoďme 1 000-krát kockou. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) šestka padne práve 200-krát b) padne aspoň 100 krát?

**3.6.** Hoďme kockou $n$-krát. Aká je pravdepodobnosť toho, že a) šestka padne práve $k$-krát b) padne aspoň $k$-krát c) najviac $k$-krát?

**3.7.** Správca mincovne dáva do každej kazety so 100 mincami jednu falošnú. Kráľ dá preveriť 100 kaziet tak, že z každej vyberie po jednej minci a túto preskúma. Aká je pravdepodobnosť toho, že falšovateľ bude prichytený?

Pojem nezávislosti resp. závislosti si vysvetlíme najprv na nasledujúcich dvoch príkladoch.

**Príklad 3.5.** Majme v urne 7 bielych a 9 modrých guliek. Vyberieme jednu z nich, vrátime ju späť a zamiešame. Potom znovu vyberieme guľku. Aká je pravdepodobnosť toho, že obe guľky budú biele (udalosť $BB$), že prvá bude biela, druhá modrá ($BM$), že prvá bude modrá, druhá biela ($MB$), že obe budú modré ($MM$)?

*Riešenie.* Všetkých možných dvojíc pri ťahaní je $16.16$. Pretože prvú môžeme vytiahnuť spomedzi 7 bielych a druhú tak isto, obsahuje množina $BB$ $7.7$ prvkov, teda

$$P(BB) = \frac{7.7}{16.16} = \left(\frac{7}{16}\right)^2.$$

Podobne

$$P(BM) = \frac{7}{16}\cdot\frac{9}{16}, \quad P(MB) = \frac{9}{16}\cdot\frac{7}{16},$$

$$P(MM) = \left(\frac{9}{16}\right)^2.$$

Náš príklad je ostatne špeciálnym prípadom príkladu 3.3, kde $p = 7/16$, $q = 1 - p = 9/16$.

**Príklad 3.6.** Opäť vyberáme z urny, kde je 7 bielych a 9 modrých guliek. Ale prvú vybratú guľku nevrátime do urny. V urne teda zostáva po prvom ťahu len 15 guliek, z ktorých vyberáme druhú. Opäť sa pýtame na pravdepodobnosti udalostí $BB$, $BM$, $MB$, $MM$.

*Riešenie.* Počet všetkých dvojíc vybraných guliek sa zmenší: prvú vyberáme spomedzi 16, druhú spomedzi 15, teda počet všetkých výberov je 16.15. Na to, aby prvá z guliek bola biela je 7 možností, na to aby aj druhá bola biela je už len 6 možností (prvú vytiahnutú — bielu guľku sme nevrátili). Preto

$$P(BB) = \frac{7.6}{16.15}.$$

Podobne

$$P(BM) = \frac{7.9}{16.15}, \quad P(MB) = \frac{9.7}{16.15},$$

$$P(MM) = \frac{9.8}{16.15}.$$

V čom sa líšia príklady 3.5 a 3.6? V prvom prípade bol druhý ťah „nezávislý" od prvého. V druhom prípade závisel výsledok druhého ťahu od výsledku prvého, teda od toho, akej farby bola prvá vytiahnutá guľka. Všimnime si, že vo všetkých príkladoch tejto kapitoly (okrem príkladu 3.6) išlo o „nezávislé" opakovania. Výsledok druhého hodu kockou nezávisí od toho, aké číslo padlo pri prvom hode.

Aké bolo matematické vyjadrenie faktu „nezávislosti"? Vo všetkých príkladoch sme „príslušné" pravdepodobnosti vynásobili. To nás vedie k tejto definícii.

**Definícia 3.1.** *Udalosti $A$, $B$ nazývame nezávislé, ak*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Ako je to napr. v príklade 3.1? Nech $A_1$ je udalosť spočívajúca v tom, že pri prvom hode padne šestka, teda

$$A_1 = \{(6,1), (6,2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} =$$
$$= (+, -) \cup (+, +)$$

a nech $A_2$ je udalosť spočívajúca v tom, že pri druhom hode padne šestka, teda

$$A_2 = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\} =$$
$$= (-, +) \cup (+, +) .$$

Potom

$$A_1 \cap A_2 = \{(6, 6)\} = (+, +) ,$$

$$P(A_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(A_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} ,$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A_1)\, P(A_2) ,$$

teda udalosti $A_1$, $A_2$ sú nezávislé v zmysle definície 3.1.

Rozoberme podobne príklad 3.6. Nech $B_1$ je udalosť (v priestore dvojíc $(x_1, x_2)$ guliek, kde $x_1 \neq x_2$) spočívajúca v tom, že prvá vytiahnutá guľka je biela. Ak označíme jednotlivé biele guľky znakmi $b_1, b_2, \ldots, b_7$ a modré znakmi $m_1, m_2, \ldots, m_9$, potom

$$B_1 = \{(b_1, b_2), \ldots, (b_1, b_7), (b_1, m_1), \ldots, (b_1, m_9), \ldots$$
$$\ldots, (b_7, b_1), \ldots, (b_7, b_6), (b_7, m_1), \ldots, (b_7, m_9)\} .$$

Počet prvkov množiny $B_1$ je $7 . 15$, teda

$$P(B_1) = \frac{7 . 15}{16 . 15} = \frac{7}{16} .$$

(Je to taká istá pravdepodobnosť ako pravdepodobnosť, že vytiahneme bielu guľku pri jedinom ťahu.)

Nech $M_2$ je množina tých dvojíc, v ktorých na druhom mieste je modrá guľka, t. j.

$$M_2 = \{(b_1, m_1), \ldots, (b_7, m_1), (m_2, m_1), \ldots, (m_9, m_1), \ldots, (b_1, m_9), \ldots, (b_7, m_9), (m_1, m_9), \ldots, (m_8, m_9)\}.$$

Množina $M_2$ pozostáva z 15.9 prvkov. Preto

$$P(M_2) = \frac{15.9}{16.15} = \frac{9}{16}.$$

Naproti tomu

$$B_1 \cap M_2 = \{(b_1, m_1), \ldots, (b_7, m_1), (b_1, m_2), \ldots, \ldots, (b_7, m_2), \ldots, (b_1, m_9), \ldots, (b_7, m_9)\}.$$

Počet prvkov množiny $B_1 \cap M_2$ je 7.9. Preto

$$P(B_1 \cap M_2) = \frac{7.9}{16.15} \neq \frac{7}{16} \cdot \frac{9}{16} = P(B_1)\, P(M_2).$$

Teda udalosti $B_1$ a $M_2$ nie sú nezávislé.

## Cvičenia

**3.8.** Zistite, či sú nezávislé udalosti $A$ — na kocke padne stena s párnym počtom bodiek, $B$ — stena s piatimi alebo šiestimi bodkami.

**3.9.** Zistite, či sú nezávislé udalosti $A$ — na kocke padne stena s párnym počtom bodiek, $C$ — stena s nepárnym počtom bodiek.

**3.10.** Dokážte, že $\emptyset$ a $A$ sú nezávislé pre každú udalosť $A \subset \Omega$.

**3.11.** Dokážte, že $A$ a $\Omega$ sú nezávislé pre každú udalosť $A \subset \Omega$.

**3.12.** Dokážte: Ak $A$, $B$ sú disjunktné udalosti, tak $A$, $B$ sú nezávislé práve vtedy, keď aspoň jedna z udalostí $A$, $B$ má nulovú pravdepodobnosť.

**3.13.** Z ôsmich tlmočníkov ovládajú $R$ alebo $A$ siedmi, len $R$ šiesti, $A$ štyria. Sú udalosti $R$, $A$ nezávislé?

**3.14.** Dokážte: Ak $A$, $B$ sú nezávislé udalosti, tak sú nezávislé aj $A'$, $B'$.

**3.15.** Dokážte: Ak $A$, $B$ sú nezávislé udalosti, tak sú nezávislé aj $A'$ a $B$.

Pojem nezávislosti má, pravda, svoj intuitívny obsah a nie je vždy nevyhnutné pristupovať k formalizácii. Úlohou matematika je pritom nájsť primeraný matematický popis danej reálnej situácie.

**Príklad 3.7.** Predpokladajme, že na terč strieľajú dvaja strelci. Pravdepodobnosť toho, že prvý zasiahne cieľ je 0,8, u druhého je táto pravdepodobnosť 0,9. Aká je pravdepodobnosť toho, že obaja strelci trafia cieľ, ak predpokladáme, že sa navzájom neovplyvňujú.

*Riešenie.* Označme znakmi $A$ resp. $B$ udalosti spočívajúce v tom, že prvý resp. druhý strelec trafí cieľ, teda $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}9$. Podľa podmienky úlohy sú $A$, $B$ nezávislé, teda

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = 0{,}8 \,.\, 0{,}9 = 0{,}72\,.$$

Predošlú úvahu sme mohli ešte takto interpretovať: Predpokladajme, že obaja strelci vystrelia 100 krát, teda $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{99}, \omega_{100}\}$, kde každé $\omega_i$ je dvojica výstrelov. $A$ pozostáva z tých dvojíc $\omega_i$, v ktorých trafil cieľ prvý strelec, $B$ z tých dvojíc $\omega_i$, v ktorých trafil cieľ druhý strelec. Rovnosť $P(A) = 0{,}8$ môžeme chápať tak, že množina $A$ má 80 prvkov. Pretože $B$ nastáva z každých 10 pokusov približne 9krát (nezávisle na $A$), spomedzi uvažovaných 80 prvkov (množiny $A$) nastane $8 \,.\, 9 = 72$-krát. To znamená, že spomedzi 80 prvkov množiny $A$ 72 patrí aj do $B$, teda

$$P(A \cap B) = \frac{72}{100} = \frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} = P(A)\,P(B).$$

**Príklad 3.8.** Urobme tie isté predpoklady ako v predchádzajúcom príklade. Aká je pravdepodobnosť toho, že aspoň jeden z nich trafí cieľ?

*Riešenie.* Máme vypočítať $P(A \cup B)$. Podľa vzťahu 2) z kapitoly 1. platí

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) = \\ &= 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 . 0{,}9 = 0{,}98 . \end{aligned}$$

Iný spôsob riešenia. Keďže $A$, $B$ sú nezávislé udalosti, nezávislými sú aj udalosti $A'$, $B'$ (cvičenie 3.14) spočívajúce v tom, že prvý resp. druhý strelec netrafí cieľ. Pretože $(A \cup B)' = A' \cap B'$, máme

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= 1 - P((A \cup B)') = \\ &= 1 - P(A' \cap B') = 1 - P(A')\,P(B') = \\ &= 1 - 0{,}2 . 0{,}1 = 0{,}98 . \end{aligned}$$

Alebo ešte iný spôsob. $A \cup B = (A \cap B) \cup$ $\cup\, (A \cap B') \cup (A' \cap B)$, pričom $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$ sa navzájom vylučujú, teda

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap B') + P(A' \cap B).$$

Ak sú ale $A$, $B$ nezávislé, tak sú nezávislé aj $A$, $B'$ resp. $A'$, $B$ (cvičenie 3.15), teda

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A)\,P(B) + P(A)\,P(B') + P(A')\,P(B) = \\ &= 0{,}8 . 0{,}9 + 0{,}8 . 0{,}1 + 0{,}2 . 0{,}9 = 0{,}98 . \end{aligned}$$

## Cvičenia

**3.16.** V trojčlennej porote sú dvaja členovia seriózni a prijímajú správne rozhodnutie s pravdepodobnosťou $p$. Tretí člen poroty sa rozhoduje tak, že vyhodí mincu a hlasuje podľa toho, čo mu spadne. Porota prijíma rozhodnutie, za ktoré hlasujú aspoň dvaja jej členovia. Aká je pravdepodobnosť toho, že sa porota rozhodne správne?

**3.17.** Otec chce povzbudiť syna v tenisovom tréningu a sľubuje mu odmenu, ak vyhrá dva po sebe nasledujúce zápasy z troch podľa schémy otec, tréner, otec, resp. tréner, otec, tréner. Ktorú z týchto alternatív si má syn vybrať, ak otec hrá horšie ako tréner?

**3.18.** Koľko ľudí sa musíte opýtať na dátum narodenia, aby ste medzi nimi našli človeka s vašim dátumom narodenia, a to s pravdepodobnosťou väčšou než 1/2?

**Príklad 3.9.** Dvaja páni $X$ a $Y$ strieľajú proti sebe pri súboji. Pravdepodobnosť toho, že $X$ trafí je 0,6, pravdepodobnosť toho, že $Y$ trafí je 0,8. Pán $X$ strieľa prvý, pretože $Y$ ho vyzval na súboj. Strieľajú striedavo až po prvý zásah. Aká je pravdepodobnosť toho, že $X$ nebude trafený?

*Riešenie.* Označme udalosť, ktorej pravdepodobnosť hľadáme znakom $A$. Potom

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots,$$

pričom $A_1$ nastane, ak $X$ zasiahne $Y$ pri svojom prvom výstrele, $A_2$ nastane, ak $X$ ani $Y$ netrafia na prvýkrát, ale $X$ zasiahne $Y$ pri druhom výstrele, $A_3$ nastane, ak $X$ prvýkrát zasiahne $Y$ až pri treťom výstrele atď. Je zrejmé, že udalosti $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... sa navzájom vylučujú, teda

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$$

Podľa predpokladu $P(A_1) = 0{,}6 . A_2$ nastane, ak súčasne $X$ netrafí $Y$, (pravdepodobnosť čoho je 0,4), potom $Y$ netrafí $X$ (pravdepodobnosť čoho je 0,2), na čo $X$ trafí $Y$ (pravdepodobnosť toho je 0,6), teda (vzhľadom na nezávislosť)

$$P(A_2) = 0{,}4 . 0{,}2 . 0{,}6 .$$

Podobne

$$P(A_3) = 0{,}4 . 0{,}2 . 0{,}4 . 0{,}2 . 0{,}6 = (0{,}4 . 0{,}2)^2 . 0{,}6 ,$$

$$P(A_4) = (0{,}4 . 0{,}2)^3 . 0{,}6 \text{ atď.},$$

teda

$$P(A) = 0{,}6(1 + 0{,}4 . 0{,}2 + (0{,}4 . 0{,}2)^2 + \\ + (0{,}4 . 0{,}2)^3 + \ldots) = \\ = 0{,}6(1 + 0{,}08 + 0{,}08^2 + 0{,}08^3 + 0{,}08^4 + \ldots).$$

V zátvorke je geometrický rad s kvocientom 0,08 a prvým členom 1. Preto (pozri Doplnok II)

$$P(A) = \frac{0{,}6}{1 - 0{,}08} = 0{,}65 .$$

### Cvičenie

**3.19.** Aká je pravdepodobnosť, že $X$ obíde nasucho, ak prvý začne strieľať $Y$?

**Príklad 3.10.** Od akého strelca si môže dovoliť pán $X$ dať sa vyzvať na súboj (t. j. $X$ strieľa prvý), ak chce, aby pravdepodobnosť jeho úspechu bola väčšia ako 0,9?

*Riešenie.* Nech $p$ je pravdepodobnosť zásahu u pána $Y$. Položme $q = 1 - p$. Potom

$$P(A) = 0{,}6 + 0{,}4 . q . 0{,}6 + 0{,}4 . q . 0{,}4 . q . 0{,}6 + \ldots =$$

$$= 0{,}6(1 + q.0{,}4 + (q.0{,}4)^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{0{,}6}{1 - q.0{,}4}.$$

Žiadame, aby $P(A) > 0{,}9$. Riešením nerovnice

$$\frac{0{,}6}{1 - q.0{,}4} > 0{,}9$$

dostaneme, že

$$q > \frac{0{,}3}{0{,}36} = 0{,}8\overline{3}\ldots,$$

teda stačí, aby $1 - p = q > 0{,}84$, t. j. $p < 0{,}26$. $X$ má nádej na úspech väčšiu ako 90 %, ak jeho súper triafa s pravdepodobnosťou menšou ako 0,26.

### Cvičenia

**3.20.** Predpokladajme, že $X$ si nemôže vybrať súpera, ale že má dosť času vopred trénovať a zlepšiť svoje strelecké schopnosti. Na aký stupeň dokonalosti sa musí dostať (opäť strieľa prvý), ak chce aby pravdepodobnosť úspechu bola väčšia ako 0,9?

**3.21.** Aké strelecké schopnosti má mať pán $Z$, aby pri súboji proti pánovi $Y$ (ktorého pravdepodobnosť zásahu je 0,8), pri ktorom $Z$ strieľa prvý, mal $Z$ nádej na úspech väčšiu ako 0,5?

**Príklad 3.11.** Aké strelecké schopnosti musí mať pán $Z$, aby si mohol dovoliť uraziť sa a teda vyzvať pána $Y$ na súboj (v tom prípade $Y$ strieľa prvý), ak pravdepodobnosť úspechu má byť väčšia než 0,5 resp. 0,9?

*Riešenie.* Nech $p$ je pravdepodobnosť toho, že $Z$ zasiahne cieľ. Pravdepodobnosť úspechu pána $Z$ je

$$0{,}2.p + 0{,}2(1 - p)\,0{,}2p + \ldots =$$

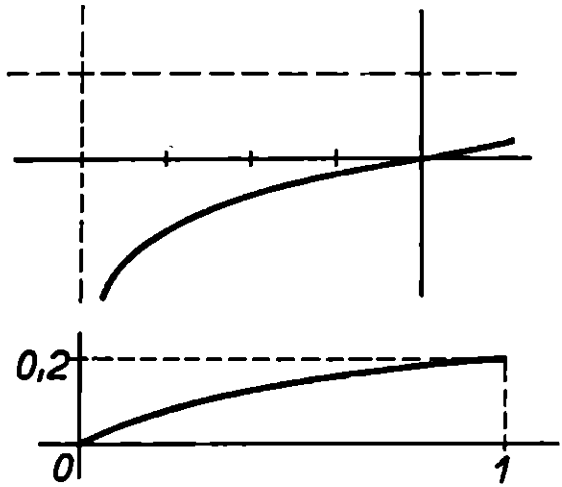
$$= 0{,}2p(1 + 0{,}2(1 - p) + (0{,}2(1 - p))^2 + \ldots) =$$

$$= \frac{0{,}2p}{1 - 0{,}2(1 - p)}.$$

Máme nájsť také $p$, aby

$$\frac{0{,}2p}{1 - 0{,}2(1 - p)} > 0{,}5\,.$$

Riešením tejto nerovnice dostaneme $p > 4$. Vidíme teda, že také $p$ neexistuje, pretože $p \leqq 1$. To sa dalo očakávať, pretože nádej na úspech pána $Y$ je aspoň 0,8 ($Y$ strieľa prvý), teda nádej pána $Z$ je nanajvýš 0,2.




Obr. 6

Pozrime sa na graf funkcie $y = \dfrac{0{,}2p}{1 - 0{,}2(1 - p)} =$ $= \dfrac{p}{p + 4}$. Zaujímajú nás hodnoty $p \in \langle 0{,}1 \rangle$. V tomto intervale uvažovaná funkcia rastie. Preto $P(A) \leqq$ $\leqq \dfrac{1}{1 + 4} \leqq 0{,}2$. Najväčšiu šancu má $Z$, ak strieľa so 100 % istotou, a v tom prípade má nádej na úspech 0,2.

## Cvičenie

**3.22.** Na akého pána $U$ si môže dovoliť uraziť sa pán $X$($U$ potom strieľa prvý), aby jeho nádej na úspech bola väčšia ako 0,5 resp. 0,9? Pán $X$ triafa cieľ s pravdepodobnosťou 0,6.

**Príklad 3.12.** Majme teraz troch pánov $A$, $B$, $C$, ktorí majú vzájomný súboj podľa tohto pravidla: začína strieľať $A$, môže si vybrať $B$ alebo $C$. V prípade, že prvýkrát vystrelil na $B$, strieľa potom $B$ na $C$, $C$ na $A$ atď. Prirodzene, ak je niektorý z účastníkov vyradený strieľa nasledujúci podľa uvedeného poradia. Ak ale po prvýkrát vystrelil $A$ na $C$, potom strieľa $C$ na $B$, $B$ na $A$ atď.

Na ktorého protivníka má $A$ začať strieľať, aby jeho nádej na úspech bola väčšia, ak pravdepodonobsť zásahu je 0,7 u $A$, 1 u $B$ a 0,4 u $C$.

*Riešenie.* 1. Predpokladajme, že $A$ začal strielať na $B$. Sú dve možnosti:

$\alpha$) $A$ netrafí $B$, $B$ trafí $C$, $A$ trafí $B$ a je po súboji. Pravdepodobnosť tejto udalosti je $0{,}3 \,.\, 1 \,.\, 0{,}7 = 0{,}21$.

$\beta$) $A$ trafí na prvý raz $B$, načo nasleduje súboj medzi $C$ a $A$. Pravdepodobnosť, že $A$ v ňom zvíťazí je

$$0{,}7(0{,}6 \,.\, 0{,}7 + 0{,}6 \,.\, 0{,}3 \,.\, 0{,}6 \,.\, 0{,}7 + 0{,}6 \,.\, (0{,}3 \,.\, 0{,}6)^2 \,.\, 0{,}7 +$$

$$+ \ldots) = 0{,}6 \,.\, 0{,}7^2 \frac{1}{1 - 0{,}18} = 0{,}358 \,.$$

Teda pravdepodobnosť úspechu $A$ v prípade, že zahájil streľbu na $B$ je

$$0{,}21 + 0{,}358 = 0{,}568 \,.$$

2. Predpokladajme, že $A$ začal strieiať na $C$. V tomto prípade má $A$ (nenulovú) nádej na úspech len vtedy, keď $C$ zastrelí $B$ a $A$ vyhrá v nastávajúcom súboji medzi $C$ a $A$. Pravdepodobnosť toho je

$$0{,}3\,.\,0{,}4(0{,}7 + 0{,}3\,.\,0{,}6\,.\,0{,}7 + (0{,}3\,.\,0{,}6)^2\,.\,0{,}7 + \ldots) =$$

$$= \frac{0{,}3\,.\,0{,}4\,.\,0{,}7}{1 - 0{,}3\,.\,0{,}6} = 0{,}102\,.$$

•

Vidíme, že $A$ má väčšiu nádej na úspech, ak začne strieľať na $B$.

Ešte väčšiu nádej na úspech bude mať $A$, ak sa bude tváriť, že strieľa na $B$, ale vystrelí do vzduchu. Potom $B$ zastrelí $C$ a $A$ triafa $B$ s pravdepodobnosťou $0{,}7 >$ $> 0{,}568$.

Keby sa $A$ tváril, že strieľa na $C$, ale vystrelil by do vzduchu, mal by $A$ nádej, že $C$ zastrelí $B$ a $A$ vyhrá súboj s $C$ takúto:

$$0{,}4(0{,}7 + 0{,}3\,.\,0{,}6\,.\,0{,}7 + (0{,}3\,.\,0{,}6)^2\,.\,0{,}7 + \ldots) =$$

$$= \frac{0{,}4\,.\,0{,}7}{1 - 0{,}3\,.\,0{,}6} = 0{,}34\,.$$

## Cvičenia

**3.23.** Akú má nádej $A$, ak začína strieľať $C$ (neovladajúci základy pravdepodobnosti)? Pravdepodobnosť, že $C$ začne strielať na $A$ je taká istá ako pravdepodobnosť, že $C$ začne strieľať na $B$, t. j. 1/2!

**3.24.** Akú má nádej $A$, ak začne strieľať $B$?

**3.25.** Čo má robiť $A$, ak strieľa prvý a chce zachrániť $C$ (trebárs na svoj úkor)?

V predchádzajúcich príkladoch sme mlčky pracovali aj s viac ako dvoma nezávislými udalosťami. Udalosti $A_1, \ldots, A_n$ sa nazývajú nezávislé, ak

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \ldots P(A_{j_k})$$

pre všetky konečné postupnosti $j_1, \ldots, j_k$, kde $1 \leqq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leqq n$, $2 \leqq k \leqq n$. Teda 3 udalosti $A_1, A_2, A_3$ sú nezávislé ($n = 3$), ak

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) P(A_3)$$

(tu je $k = 2$) a navyše ($k = 3$)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3) .$$

Zaujímavé je uvedomiť si v tejto súvislosti, že napr. v uvedenom prípade ($n = 3$) k nezávislosti $A_1$, $A_2$, $A_3$ nestačí ani podmienka $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$ ani nezávislosť každých dvoch z udalostí $A_1$, $A_2$, $A_3$.

**Príklad 3.13.** V triede je 24 žiakov. Z nich vie 6 plávať, lyžovať sa aj korčuľovať sa, 6 vie len plávať (a nevie sa lyžovať ani korčuľovať), 6 sa vie len lyžovať a 6 len korčuľovať. Nech $A_1$ je udalosť spočívajúca v tom, že náhodne vybratý žiak vie plávať, $A_2$ spočíva v tom, že sa vie lyžovať a $A_3$ v tom, že sa vie korčuľovať. Dokážte, že $A_1$, $A_2$ resp. $A_1$, $A_3$, resp. $A_2$, $A_3$ sú nezávislé, ale $A_1$, $A_2$, $A_3$ nie sú nezávislé.

*Riešenie.* Množina $A_1$ pozostáva z tých žiakov, ktorí ovládajú všetky 3 uvedené športy a navyše zo šiestich špecialistov — plavcov, teda má 12 prvkov, $P(A_1) = 12/24 = 1/2$. Podobne $P(A_2) = P(A_3) = 1/2$. Ďalej

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

je množina pozostávajúca zo šiestich univerzálnych športovcov. Preto

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)\, P(A_2)\,.$$

Podobne sa dokáže nezávislosť $A_1$ a $A_3$ resp. $A_2$ a $A_3$. Naproti tomu

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)\, P(A_2) P(A_3)\,.$$

## Cvičenia

**3.26.** Hádžeme dvoma kockami. Nech $A_1$ je udalosť spočívajúca v tom, že na prvej kocke padne stena s nepárnym počtom bodiek, $A_2$ spočíva v tom, že na druhej kocke padne stena s párnym počtom bodiek. Konečne nech $A_3$ spočíva v tom, že súčet bodiek na oboch kockách je nepárny. Dokážte, že $A_1$, $A_2$ resp. $A_1$, $A_3$ resp. $A_2$, $A_3$ sú nezávislé, ale $A_1$, $A_2$, $A_3$ nie sú nezávislé.

**3.27.** Nech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = P(\{\omega_3\}) = 1/4$, $P(\{\omega_4\}) = 1/12$, $P(\{\omega_5\}) = 1/6$. Položme ďalej $A = \{\omega_1, \omega_4, \omega_5\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$, $C = \{\omega_3, \omega_4\}$. Dokážte, že $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$, ale nie všetky dvojice $A$, $B$, $C$ sú nezávislé.