O pravdepodobnosti

2. kapitola. Geometrická pravdepodobnosť

In: Beloslav Riečan (author); Zdena Riečanová (author): O pravdepodobnosti. (Slovak). Praha: Mladá fronta, 1976. pp. 27–30.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403852

2. kapitola

GEOMETRICKÁ PRAVDEPODOBNOSŤ

Čo je to vlastne pravdepodobnosť? Aké sú jej vlastnosti? V kapitole I. sme odpovedali na prvú otázku formálne, a to tak, že sme sa obmedzili len na určitý druh problémov: množina možných výsledkov je konečná.

Ale aj v tomto jednoduchom prípade sme videli, že pravdepodobnosť P je vlastne zobrazenie

$$E \longmapsto P(E),$$

ktoré každej množine E určitého typu (také množiny nazveme merateľnými — v danom prípade to boli ľubovoľné podmnožiny danej konečnej množiny) priraďuje reálne číslo $P(E)$, pričom platí napr. toto:

$P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$;

$P(E) \geqq 0$ pre všetky merateľné množiny E;

$P(E) + P(F) = P(E \cup F) + P(E \cap F)$ pre všetky merateľné množiny E, F.

Aby sme sa v tomto pohľade na vec utvrdili, uvedieme niekoľko jednoduchých a okrem toho veľmi populárnych príkladov iného druhu.

Nech Ω je nejaká rovinná množina, $A \subset \Omega$, pričom vieme vypočítať obsah množín A i Ω. (Nebudeme precizovať, čo to znamená „vieme vypočítať obsah"; pôjde obvykle o množiny ako pravouholník, kruh, jeho časti a pod.) Množiny, ktorých „obsah vieme vypočítať" nazveme opäť merateľnými. Aká je pravdepodobnosť, že nejaký bod, ktorý padne do Ω padne aj do A?

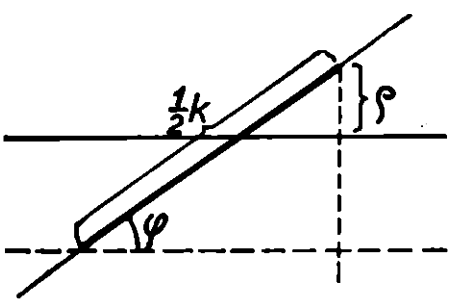
A, Ω bývajú nekonečné množiny. Preto nie je možné definovať pravdepodobnosť pomocou počtu prvkov. Zdá sa byť však prirodzeným definovať pravdepodobnosť udalosti A ako podiel plošných obsahov

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

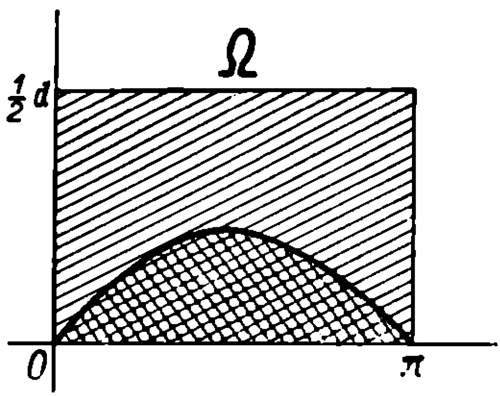
kde $m(A)$ resp. $m(\Omega)$ je obsah množiny A resp. Ω. Odhliadnuc od toho, že sme nedefinovali podrobne všetky pojmy, opäť priraďujeme každej „merateľnej" množine E číslo $P(E)$ a zobrazenie $E \longmapsto P(E)$ má opäť vyššie uvedené vlastnosti.

Príklad 2.1. (Buffonova ihla). V rovine je daný nekonečný systém navzájom rovnobežných priamok vo vzdialenosti d. Na túto rovinu hádžeme ihlu dĺžky $k(k < d)$. Aká je pravdepodobnosť toho, že ihla pretne niektorú z rovnobežiek?

Riešenie. Priraďme každej polohe ihly dve súradnice: vzdialenosť ϱ jej stredu od najbližšej z priamok a uhol



Obr. 4



Obr. 5

φ ihly s daným systémom priamok (ktorý vhodne orientujeme); $0 \leqq \varrho \leqq d/2$, $0 \leqq \varphi < \pi$. Ihla pretne najbližšie položenú priamku, ak $\frac{k}{2} \sin \varphi \geqq \varrho$.

Všetkým možným polohám ihly odpovedá pravouholník $\Omega = \langle 0, \pi) \times \langle 0, \frac{d}{2} \rangle$. Polohám ihly, v ktorých ihla pretne niektorú z priamok odpovedá množina A tých bodov (φ, ϱ), pre ktoré je $0 \leqq \varrho \leqq \frac{k}{2} \sin \varphi$. Množina A je ohraničená sinusoidou $\varrho = \frac{k}{2} \sin \varphi$ a priamkou $\varrho = 0$. Pravdepodobnosť, že ihla v nejakej polohe (φ, ϱ) pretne niektorú z priamok, t. j. pravdepodobnosť, že odpovedajúci bod (φ, ϱ) padne do množiny A je pomer plošných obsahov

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Číslo $m(\Omega)$ je obsah obdĺžnika, $m(\Omega) = \frac{d}{2} \pi$. Na druhej strane

$$m(A) = \int_0^\pi \frac{k}{2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{k}{2} \,.\, 2 = k\,.$$

Preto

$$P(A) = \frac{2k}{\pi d}.$$

Cvičenia

2.1. Hádžeme mincu na stôl, na ktorom je štvorcová sieť (priemer mince je 3/4 strany štvorce). Aká je pravdepodobnosť toho, že minca bude celá obsiahnutá v niektorom štvroci ?

2.2. Na danej kružnici umiestnime náhodne a nezávisle na sebe dva body A, B. Aká je pravdepodobnosť toho, že dĺžka úsečky AB nebude väčšia než polomer tej kružnice?

2.3. Duelanti sa majú stretnúť na súboj v náhodne vybraný čas medzi piatou a šiestou hodinou ráno. Ten, ktorý príde prvý čaká na protivníka len 5 minút, potom odchádza. Aká je pravdepodobnosť toho, že sa súboj uskutoční?