4. kapitola. Lineárne programovanle - zbraň v rukách ekonóma

4. kapitola

LINEÁRNE PROGRAMOVANIE — ZBRAŇ V RUKÁCH EKONÓMA

4.1. Základné pojmy a úlohy

Ak $c, c_1, \ldots, c_n$ sú konštanty (u nás budú vždy reálne) a $x_1, \ldots, x_n$ sú nezávisle premenné, voláme funkciu

$$L(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c$$

lineárnou funkciou (n premenných).

Vzťah

$$L(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

sa volá lineárna rovnica. Ak v tejto rovnici nahradíme znamienko $=$ hociktorým zo znamienok $>$, $<$, $\geqq$, $\leqq$, dostaneme lineárnu nerovnicu. Prvé dva prípady („ostré" nerovnosti) nebudeme uvažovať, v praxi sa temer nevyskytujú.

Lineárne rovnice a nerovnice sa volajú lineárne podmienky.

Všeobecná úloha lineárneho programovania sa dá formulovať takto:

Nájsť maximum lineárnej funkcie na množine, určenej lineárnymi podmienkami.

Čo je to isté, ako:

Nájsť maximum funkcie $L(x_1, \ldots, x_n)$ za predpokladu, že sa splnia podmienky

$$
\begin{aligned}
&L_1(x_1, \ldots, x_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L_{m_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0,\\
&L_{m_1+1}(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&L_{m_1+m_2}(x_1, \ldots, x_n) \geqq 0.
\end{aligned}
$$

Poznamenávame, že keby išlo o hľadanie minima funkcie $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + c$, bolo by to to isté, ako hľadanie maxima funkcie $(-c_1)\,x_1 + (-c_2)\,x_2 + \ldots + (-c_n)\,x_n - c$, ktorá je tiež lineárna. Podobne pri opačnej nerovnici ($\leqq$) stačí previesť všetky členy na jej druhú stranu.

Možno sa pozastaviť nad slovom „programovanie" v názve tejto matematickej disciplíny, pretože tu znamená isto niečo celkom iné, ako programovanie na samočinných počítačoch. Dochádza tu k nežiadúcemu javu, že dva rôzne pojmy sa označujú tým istým názvom (homonymum). Je to dôsledok historického vývoja, pretože vznik lineárneho programovania aj začiatok využívania počítačov spadajú približne do toho istého obdobia.

4.2. Úloha o skladbe výroby

Táto úloha je typickou aplikáciou lineárneho programovania. Stretávame sa s ňou vtedy, keď podnik vyrába viac druhov výrobkov, pričom niektoré z nich vyrába na tých istých strojoch, prípadne z tej istej suroviny. Slovo „surovina" tu chápeme o niečo všeobecnejšie, ako zvyčajne. Za surovinu považujeme napríklad aj elektrický prúd, aj výrobnú kapacitu stroja, proste všetko, čo nám obmedzuje rozsah výroby.

4.2.1. Všeobecná formulácia úlohy. Nech n je počet druhov výrobkov, pri výrobe ktorých sa používa m

druhov surovín. Nech sú disponibilné množstvá surovín $b_1, \ldots, b_m$ a nech na výrobu jednotkového množstva j-teho druhu výrobkov je potrebné množstvo a_{ij} i-tej suroviny. Nech jednotkové množstvo j-teho výrobku prinesie podniku zisk c_j finančných jednotiek. Hľadané množstvá vyrábaných výrobkov si označme $x_1, \ldots, x_n$. Úlohou je nájsť maximum cieľovej funkcie

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \tag{0}$$

za predpokladu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leqq b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \geqq b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0. \tag{2}$$

Predpoklad (1) žiada, aby sa nespotrebovalo viac suroviny, než je disponibilná zásoba. Predpoklad (2) zas nevraví nič iné, než aby sa výrobky vyrábali a neničili.

4.2.2. **Príklad.** I keď zadanie tohto príkladu vyvolá možno úsmev, jeho inštruktívna hodnota je nesporná. Majme dielňu na výrobu krompáčov a lopát. Keby dielňa vyrábala celý deň len lopaty, vyrobila by ich 55, keby len krompáče, tak by ich vyrobila 110. Ďalej je známe, že plechu dostane denne dielňa maximálne na 40 lopát a železa maximálne na 70 krompáčov. Dreva na násady dostane maximálne na 80 kusov denne. Napokon predpokladajme, že s odbytom týchto výrobkov niet ťažkostí a že jeden krompáč prinesie zisk 3 Kčs a jedna lopata 4 Kčs. Otázka, je, koľko krompáčov a koľko lopát treba vyrobiť, aby sa dosiahol maximálny zisk.

Označme počet vyrobených krompáčov x a lopát y. Zisk, ktorý prinesú, je

$$z = 3x + 4y \tag{0a}$$

a tuto funkciu treba teda maximalizovať.

Čísla x, y musia spĺňať tieto podmienky:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{110} + \frac{y}{55} &\leqq 1 \Leftrightarrow x + 2y \leqq 110, \\ x &\leqq 70, \\ y &\leqq 40, \\ x + y &\leqq 80, \end{aligned}\right. \tag{1a}$$

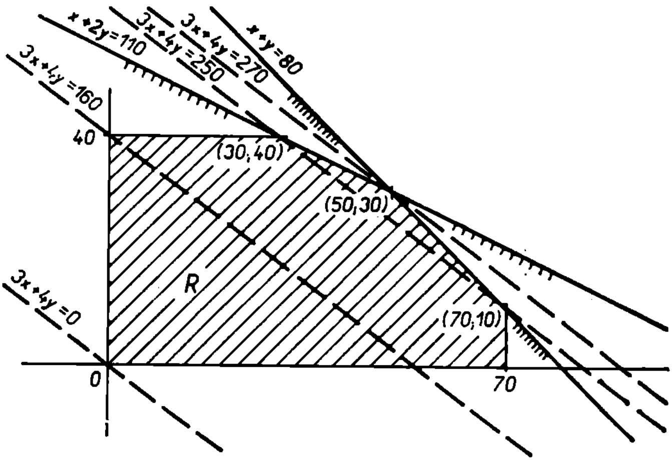
$$\left\{\begin{aligned} x &\geqq 0, \\ y &\geqq 0. \end{aligned}\right. \tag{2a}$$

Prvá nerovnica vyplýva z toho, že na výrobu jedného krompáča treba $1/110$ dňa, teda na x krompáčov $x/110$ dňa. Podobne na y lopát $y/55$ dňa, čo spolu nesmie prevýšiť jeden deň.

Množina bodov roviny (x, y), ktoré vyhovujú lineárnej nerovnici, je polrovina, ohraničená priamkou, ktorej rovnicu dostaneme, keď v nerovnici nahradíme znamienko nerovnosti rovnítkom.

Spoločná časť všetkých šiestich polrovín, určených nerovnicami (1a) je na obr. 32 vyšrafovaná a označená R. Z tejto množiny prípustných riešení treba vybrať taký bod (x, y), v ktorom funkcia $3x + 4y$ nadobúda svoje maximum.

Uvážme množinu priamok s rovnicami $3x + 4y = c$, kde c je ľubovoľné číslo. Niektoré z nich sme si vyznačili na obr. 32 čiarkovane. V každom bode (x, y) takejto priamky nadobúda funkcia $3x + 4y$ hodnotu c. Táto hodnota je teda tým väčšia, čím je priamka ďalej od počiatku a maximálnu hodnotu dostane na priamke, ktorá ako posledná má ešte s množinou prípustných riešení R spoločný bod. Na obr. 32 je to priamka $3x + 4y = 270$, ktorá má s R spoločný bod $x = 50$, $y = 30$. To znamená, že optimálne riešenie je vyrábať denne 50 krompáčov a 30 lopát. Toto riešenie prinesie potom zisk 270 Kčs denne.



Obr. 32

Grafická metóda riešenia, ktorú sme použili v tomto prípade, je vhodná len na úlohy s dvoma premennými, i keď šikovný deskriptivár by si mohol trúfnuť i na trojrozmernú úlohu. Pre viac, ako tri premenné je jej použitie prakticky vylúčené. Bolo preto treba vypracovať inú metódu.

4.3. Simplexová metóda

Simplexová metóda na riešenie všeobecnej úlohy lineárneho programovania má v tejto teórii asi také významné postavenie, ako Ford-Fulkersonov algoritmus v teórii dopravných sietí.

Simplexová metóda využíva pri riešení všeobecnej úlohy lineárneho programovania niektoré vlastnosti množiny riešení, ktoré sa dali vycítiť aj v našom predošlom dvojrozmernom prípade.

Podobne, ako v dvojrozmernom priestore, ktorého prvky sú body (x, y), aj v n-rozmernom priestore, ktorého prvky sú body $(x_1, \ldots, x_n)$, platí, že na jednoznačné určenie bodu treba n navzájom nezávislých lineárnych rovníc

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_n + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered}$$

Rovnice voláme lineárne nezávislé, ak žiadnu z nich nemožno dostať ako lineárnu kombináciu ostatných, tj. že žiadnu z nich nedostaneme, ak každú zo zvyšných rovníc vynásobíme nejakým číslom a sčítame ich. Tak napríklad rovnice $x + y + z = 1$; $x - 2y + 2z = 5$; $3x - 3y + 5z = 11$ sú lineárne závislé, pretože tretia je súčet prvej a dvojnásobku druhej.

Podobne, ako v dvojrozmernom prípade, sa dá dokázať, že ak na množine *prípustných* riešení, určených nerovnicami (1) a (2), existuje maximum lineárnej funkcie

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

tak ho táto funkcia nadobudne v jednom z bodov, ktoré dostaneme, ak n nezávislých nerovníc zpomedzi (1) a (2) zmeníme na rovnice.

Simplexová metóda postupuje tak, že

1. Zvolí jeden z takých bodov

2. Rozhodne či tento bod je prípustným (oporným) riešením. Ak áno, prejde ku 3., ak nie, zistí, či je možné voľbou susedného bodu dostať sa bližšie k množine prípustných riešení. Ak áno zvolí ten bod a vykoná znovu krok 2. Ak nie znamená to potom, že množina oporných riešení je prázdna a úloha je sporná.

3. Rozhodne, či oporné (prípustné) riešenie je už optimálne (tj. či maximalizuje cieľovú lineárnu funkciu). Ak áno, je postup skončený. Ak nie, zistí, či sa možno prechodom do susedného bodu dostať bližšie k optimu. Ak áno, zvolí ten bod a znovu vykoná krok 3. Ak nie, znamená to, že cieľová funkcie nemá na množine prípustných riešení maximum, čiže je neohraničená.

Poznamenávame, že ak máme bod, určený tak, že zpomedzi nerovníc (1) a (2) vyberieme n a zameníme rovnicami, za susedný k nemu považujeme bod, ktorý dostaneme vynechaním jednej z určujúcich rovníc a jej nahradením inou (ktorá bola predtým nerovnicou).

Pri pohľade na simplexovú metódu vidíme, že sa vlastne skladá z rozhodovaní a prechodov k susedným bodom. Určenie pravidiel rozhodovania je pomerne jednoduché, ale prechody k susedným bodom treba vykonávať tak, aby boli prehľadné, jednoduché a nespotrebovali príliš veľa operácií. O tom, ako na to, nám povie následujúci odsek.

4.3.1. Modifikovaná Jordanova eliminácia. Násobme nerovnice (1) číslom (—1), odčítajme od nich po rade čísla $-b_1, \ldots, -b_m$ a označíme ľavé strany týchto nerovníc po rade $y_1, \ldots, y_m$. Dostaneme

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = -a_{11}x_1 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1 \geqq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = -a_{m1}x_1 - \ldots - a_{mn}x_n + b_m \geqq 0 \end{cases}$$

a doplníme k nim

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 \geqq 0 \\ \ldots \\ x_n \geqq 0 \end{cases}$$

Máme teda $m + n$ nezáporných premenných $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$.

	$-x_1$ . . . . $-x_j$ . . . . $-x_n$	1
y_1	a_{11} . . . . a_{1j} . . . . a_{1n}	b_1
y_i	a_{i1} . . . . a_{ij} . . . . a_{in}	b_i
y_m	a_{m1} . . . . a_{mj} . . . . a_{mn}	b_m

Tab. 6

Vzťahy (3) môžeme formálne zapísať v tvare tabuľky 6. Túto tabuľku treba rozumieť tak, že hodnoty, napísané v riadku vľavo od prvej zvislej čiary, sa rovnajú lineárnej kombinácii hodnôt, uvedených nad tabuľkou, pričom koeficienty sú v príslušnom riadku tabuľky. Teda napríklad

$$(4)\quad y_i = -a_{i1}x_1 - \ldots - a_{ij}x_j - \ldots - a_{in}x_n + b_i .$$

Predpokladajme, že číslo $a_{ij} \neq 0$. Potom ním môžeme vydeliť rovnosť (4) a vyjadriť z nej x_j:

$$(5)\qquad x_j = -\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 - \ldots - \frac{a_{i,j-1}}{a_{ij}}x_{j-1} - \frac{1}{a_{ij}}y_i - \\ - \frac{a_{i,i+1}}{a_{ij}}x_{i+1} - \ldots - \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n + \frac{b_i}{a_{ij}} .$$

Po dosadení (5) do všetkých rovníc, okrem j-tej, a po nahradení j-tej rovnice rovnicou (5) dostaneme v (3)

$$
(6)\quad
\begin{cases}
y_1 = -\left(a_{11} - \dfrac{a_{i1}a_{1j}}{a_{ij}}\right)x_1 - \ldots - \dfrac{a_{1j}}{a_{ij}}\,y_i - \ldots - \\
-\left(a_{1n}\ \dfrac{a_{in}a_{1j}}{a_{ij}}\right)x_n + \left(b_1 - \dfrac{b_i a_{1j}}{a_{ij}}\right), \\
\cdot\ \cdot \\
x_j = -\dfrac{a_{i1}}{a_{ij}}\,x_1 - \ldots - \dfrac{1}{a_{ij}}\,y_i - \ldots - \dfrac{a_{in}}{a_{ij}}\,x_n + \dfrac{b_i}{a_{ij}}, \\
\cdot\ \cdot \\
y_m = -\left(a_{m1} - \dfrac{a_{i1}a_{mj}}{a_{ij}}\right)x_1 - \ldots + \dfrac{a_{mj}}{a_{ij}}\,y_i - \ldots - \\
-\left(a_{mn} - \dfrac{a_{in}a_{mj}}{a_{ij}}\right)x_n + \left(b_m - \dfrac{b_i a_{mj}}{a_{ij}}\right)
\end{cases}
$$

a (samozrejme)

$$
(7)\qquad x_1 \geqq 0, \ldots, y_i \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,\ y_1 \geqq 0, \ldots, \\
x_j \geqq 0,\ \ldots, y_m \geqq 0.
$$

Podobne ako vzťahy (3), môžeme i (6) zapísať do tabuľky (tab. 7).

Pre priamy prechod od tab. 6 ku tab. 7 platia teda tieto pravidlá:

1. Ak chceme navzájom zameniť premenné y_i a x_j, musí byť $a_{ij} \neq 0$. Tento prvok nazveme riešiaci prvok; podobne riadok a stĺpec, u ktorých sa tento prvok nachádza, voláme riešiace a orámujeme ich čiarkovane.

2. Nahradíme riešiaci prvok jeho obrátenou hodnotou.

3. S výnimkou riešiaceho prvku nahradíme každý prvok riešiaceho riadku ním samým, podeleným riešiacim prvkom.

4. S výnimkou riešiaceho prvku nahradíme každý prvok riešiaceho stĺpca ním samým, podeleným riešiacim prvkom s opačným znamienkom.

5. Pri nahradzovaní prvku a_{pr} mimo riešiaci riadok a stĺpec použijeme ešte tri prvky, ktoré spolu s ním tvoria obdĺžnik, a síce tieto:

	$-x_1$	$-y_i$	$-x_n$	1
y_1	$\left(a_{11} - \dfrac{a_{i1}a_{1j}}{a_{ij}}\right), \ldots$	$-\dfrac{a_{1j}}{a_{ij}}; \ldots$	$\left(a_{1n} - \dfrac{a_{in}a_{1j}}{a_{ij}}\right)$	$b_1 - \dfrac{b_i a_{1j}}{a_{ij}}$
x_j	$\dfrac{a_{i1}}{a_{ij}}, \ldots$	$\dfrac{1}{a_{ij}}; \ldots$	$\dfrac{a_{in}}{a_{ij}}$	$\dfrac{b_i}{a_{ij}}$
y_m	$\left(a_{m1} - \dfrac{a_{i1}a_{mj}}{a_{ij}}\right), \ldots$	$-\dfrac{a_{mj}}{a_{ij}}; \ldots$	$\left(a_{mn} - \dfrac{a_{in}a_{mj}}{a_{ij}}\right)$	$b_m - \dfrac{b_i a_{mj}}{a_{ij}}$

Tab. 7

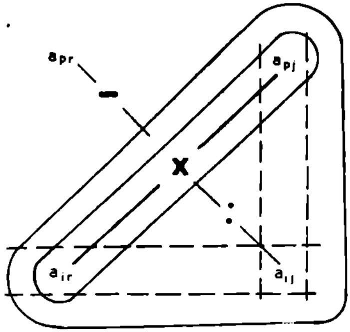
a_{pj} — prvok v riešiacom stĺpci a v tom istom riadku ako nahradzovaný

a_{ir} — prvok v riešiacom riadku a v tom istom stĺpci, ako nahradzovaný

a_{ij} — riešiaci prvok.

Vytvoríme súčin $a_{ir}a_{pj}$ prvkov v druhej uhlopriečke než je riešiaci prvok, tento súčin podelíme riešiacim prvkom a výsledok odčítame od nahradzovaného prvku.

Schématicky:



Prechod od tab. 6 ku tab. 7 sa volá modifikovaná Jordanova eliminácia.

Hoci modifikovanú Jordanovu elimináciu využijeme najmä pri simplexovej metóde, možno ju použiť aj na iné ciele. Majme napríklad systém štyroch rovníc o štyroch neznámych

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 11 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 1 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Tieto rovnice môžeme prepísať do tabuľky

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
0	—3	—2	5	—1	11
0	1	—1	—2	—2	2
0	1	—2	—1	1	—1
0	—2	—1	—1	—1	—1

Zvoľme si za riešiaci prvok $a_{21} = 1$ a zameňme druhú nulu za x_1:

	0	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	1
0	3	—5	—1	—7	17
x_1	1	—1	—2	—2	2
0	—1	—1	1	3	—3
0	2	—3	—5	—5	3

prvý stĺpec môžeme vynechať, pretože násobením nulou dostaneme len nulu. Podobne zameníme x_3 za tretíu nulu:

	$-x_2$	$-x_4$	1
0	—6	—4	14
x_1	—3	4	— 4
x_3	—1	3	— 3
0	—8	10	—12

x_4 za poslednú nulu:

	$-x_2$	1
0	—9,2	9,2
x_1	0,2	0,8
x_3	1,4	0,6
x_4	—0,8	—1,2

a napokon x_2 za prvú nulu

	1
x_2	—1
x_1	1
x_3	2
x_4	—2

Teda riešenie je $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. Záverom treba poznamenať, že modifikovaná Jordanova eliminácia je len málo odlišná od obyčajnej Jordanovej eliminácie. Jediný rozdiel je v tom, že pri prechode premennej zhora na bok sa mení znamienko a vďaka tomu sú opačné znamienka v riešiacom riadku a stĺpci.

	$-x_1$	$\ldots$	$-x_j$	$\ldots$	$-x_n$	1
y_1	a_{11}	$\ldots$	a_{1j}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
y_i	a_{i1}	$\ldots$	a_{ij}	$\ldots$	a_{in}	b_i
y_m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mj}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
z	$-c_1$	$\ldots$	$-c_j$	$\ldots$	$-c_n$	0

Tab. 8

4.3.2. Simplexová tabuľka. Podmienku (3), ako aj cieľovú funkciu (0) zapíšeme do tabuľky 8. Táto tabuľka nám nielen ukáže závislosť premenných $y_1, \ldots, y_m$ a z na $x_1, \ldots, x_n$. Súčasne vyjadrí tých n nerovnice spomedzi nerovníc (2) a (3), tj. spomedzi nerovníc

$$(7) \qquad x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0\,, \quad y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0\,,$$

ktoré sa menia na rovnice pri určovaní riešenia (= bodu v n-rozmernom priestore). Vždy to budú tie, ktorých premenné sú nadpísané nad tabuľkou (teda na začiatku $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$). Za tohto predpokladu budú hodnoty v poslednom stĺpci vyjadrovať hodnoty zvyšných premenných $y_1, \ldots, y_m, z$.

4.3.3. Vyhľadanie prípustného riešenia. Simplexová tabuľka 8 nám vyjadruje riešenie

$$(8)\qquad x_1 = 0, \ldots, x_n = 0, \; y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m,$$

pri ktorom cieľová funkcia nadobúda hodnotu $z = 0$. Toto riešenie je prípustným riešením práve vtedy, keď vyhovuje nerovniciam (7), tj. keď $b_1 \geqq 0, \ldots, b_m \geqq 0$. Ak toto platí, máme už prípustné riešenie a prejdeme k hľadaniu optimálneho riešenia, ktoré si opíšeme neskôr. Ak je niektoré $b_i < 0$, nie je riešenie (8) prípustné a pokusíme sa prechodom k susednému bodu dosiahnúť prípustné riešenie, alebo sa k nemu aspoň priblížiť.

Predpokladáme pritom, že žiadne číslo z $b_1, \ldots, b_m$ sa nerovná nule. Ak niektoré $b_k = 0$, volá sa tento prípad degenerovaný a treba ho riešiť niektorou špeciálnou metódou; jednou z nich je ten fígeľ, že namiesto $b_k = 0$ položí sa $b_k = \varepsilon > 0$. ε je tu číslo o niekoľko rádov menšie, ako čísla $b_1, \ldots, b_n$ a teda toto malé posunutie nemôže ovlivniť výsledok riešenia; tejto metóde sa hovorí ε-nová metóda na odstránenie degenerácie.

Vráťme sa teda k predpokladu, že $b_i < 0$ a žiadne z čísel $b_1, \ldots, b_m$ nie je nulové. Pripomeňme si, že za susedný bod (ktorý určuje susedné riešenie) považujeme ten, v ktorom jednu z rovností (8) vynecháme a nahradíme inou, ktorá bola predtým nerovnosťou.

To ale znamená, že jedna z premenných nad tabuľkou sa zamení s niektorou z premenných vľavo od tabuľky (samozrejmé okrem z), čiže nevykoná sa nič iné, ako modifikovaná Jordanova eliminácia. Treba len určiť, ktorú zámenu vykonať, tj. ktorý prvok zvoliť za riešiaci.

4.3.3.1. Voľba riešiaceho stĺpca. Ak $b_i < 0$, zvolíme za riešiaci stĺpec ten, ktorý má s i-tým riadkom spoločný záporný prvok. Ak je takých stĺpcov viac, volíme ktorýkoľvek. Prípad, že by taký stĺpec neexistoval si rozoberieme neskôr.

4.3.3.2. Voľba riešiaceho riadku. Ak už máme zvolený j-tý stĺpec za riešiaci, všímame si v každom riadku podiel člena v poslednom a riešiacom stĺpci. Za riešiaci riadok vezmeme k-ty, ak b_k/a_{kj} je najmenší spomedzi tých spomínaných podielov, ktoré sú kladné, a pritom aj $b_k > 0$. Ak takého niet, vezmeme za riešiaci ten prvok, pre ktorý je $b_k < 0$ $a_{kj} < 0$, ale b_k/a_{kj} najväčšie.

Po vykonaní modifikovanej Jordanovej eliminácie s riešiacim prvkom a_{kj} dostaneme v poslednom stĺpci v k-tom riadku číslo $b_k/a_{kj} > 0$ a pre $r \neq k$ v r-tom riadku číslo

$$b_r - \frac{b_k a_{rj}}{a_{kj}}$$

Ak $a_{kj} < 0$, $b_k < 0$ (a teda všetky $b_r < 0$) tak

$$b_r - \frac{b_k a_{rj}}{a_{hj}} = -a_{rj}\left(\frac{b_k}{a_{kj}} - \frac{b_r}{a_{rj}}\right) \geq 0$$

pretože $\dfrac{b_k}{a_{kj}}$ bolo najväčšie možné.

Ak $a_{kj} > 0$, $b_k > 0$, uvážme dva prípady

a) $b_r > 0$; vtedy

$$b_r - \frac{b_k a_{rj}}{a_{kj}} \begin{cases} \geqq b_r > 0 & \text{ak} \quad a_{rj} < 0 \\ = a_{rj}\left(\dfrac{b_r}{b_{rj}} - \dfrac{b_k}{a_{kj}}\right) \geqq 0 & \text{ak} \quad a_{rj} > 0. \end{cases}$$

b) $b_r < 0$; vtedy pri $a_{rj} < 0$ (čo isto platí pre $r = i$)

$$b_r - \frac{b_k a_{rj}}{a_{kj}} > b_r .$$

Vidíme, že po vykonaní eliminácie zostane nezáporné číslo všade tam, kde bolo $b_r > 0$. Naopak, počet záporných absolútnych členov buď poklesne, alebo ak zostane, vybraný i-tý absolútny člen sa zväčší a po konečnom počte krokoy sa nutne stane nezáporným. Po konečnom počte krokov sa teda napokon dostaneme k tabuľke, kde všetky $b_r > 0$ (prípadnú nulu odstránime ε-metódou) a takto postupne odstránime všetky záporné čísla z posledného stĺpca. Tým dostaneme prípustné riešenie, ktoré vyjadríme tak, že premenné nad tabuľkou položíme rovné nule a premenné vľavo položíme rovné číslam z posledného stĺpca.

Zostáva nám objasniť prípad, keď pri kroku 4.3.3.1 dôjdeme k riadku, napríklad i-temu, v ktorom $b_i < 0$, ale $a_{i1} \geqq 0, \ldots, a_{in} \geqq 0$. To však znamená, že pre $x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$ platí

$$y_i = -a_{i1}x_1 - \ldots - a_{in}x_n + b_i < 0$$

čo je v spore s predpokladom $y_i \geqq 0$. Úloha je teda sporná, nemá riešenie a nemusíme ju ďalej riešiť. Býva to zväčša svedectvom chyby pri jej formulácii.

4.3.4. Prechod k optimálnemu riešeniu. Podľa toho, čo sme si povedali, za optimálne považujeme to riešenie, pri ktorom cieľová funkcia nadobúda maximum. Bude to prípustné riešenie, pre ktoré v pravom dolnom rohu tabuľky máme najväčšie číslo. Lenže, ako poznáme, že niektoré iné riešenie nebude mať túto hodnotu ešte väčšiu?

	$-\eta_1$	$\ldots$	$-\eta_j$	$\ldots$	η_n	1
η_{n+1}	α_{11}	$\ldots$	α_{1j}	$\ldots$	α_{1n}	β_1
η_{n+i}	α_{i1}	$\ldots$	α_{ij}	$\ldots$	α_{in}	β_i
η_{n+m}	α_{m1}	$\ldots$	α_{mj}	$\ldots$	α_{mn}	β_m
z	γ_1	$\ldots$	γ_j	$\ldots$	γ_n	δ

Tab. 9

Predpokladajme, že sme už dospeli k tabuľke 9, v ktorej $\beta_1 > 0, \ldots, \beta_m > 0$ a teda riešenie

$$\eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0, \eta_{n+1} = \beta_1, \ldots, \eta_{n+m} = \beta_m$$

je prípustné. O tom, či je aj optimálne, rozhodne posledný riadok:

ak $\gamma_1 \geqq 0, \ldots, \gamma_n \geqq 0$ je riešenie optimálne, pretože

$$z = -\gamma_1\eta_1 - \ldots - \gamma_n\eta_n + \delta \leqq \delta$$

pričom rovnosť nastane pre $\eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0$.

Ak je naopak niektorý člen záporný, napríklad $\gamma_j < 0$, tak zrejme $-\gamma_j\eta_j > 0$, $\eta_j > 0$ nám dá vyššiu hodnotu z ako $\eta_j = 0$ a teda riešenie nie je optimálne.

V tomto prípade volíme j-ty stĺpec ako riešiaci a riešiaci k-ty riadok volíme podľa pravidla 4.3.3.2.

Tak isto, ako v 4.3.3, aj tu všetky prvky posledného stĺpca (prípadne okrem δ) zostanú nezáporné, riešenie teda zostane oporné a namiesto člena δ budeme mať (pretože $\gamma_j < 0$, $(b_k/a_k) > 0$)

$$\delta - \frac{b_k\gamma_j}{a_{kj}} > \delta$$

čiže hodnota cieľovej funkcie vzrastie, priblížime sa k optimu.

Po konečnom počte krokov buď dosiahneme optimum, alebo prídeme k situácii, že $\gamma_j < 0$, ale v celom zvyšnom j-tom stĺpci niet kladného prvku. To však znamená, že pre všetky i vo výraze

$$\eta_i = -\alpha_{i1}\eta_1 - \ldots - \alpha_{ij}\eta_j - \ldots - \alpha_{in}\eta_n + \beta_n$$

je aj člen $-\alpha_{ij}\eta_j$, ktorý je nezáporný pre všetky η_j a teda $\eta_j > 0$ môže byť ľubovoľné veľké a i tak splní všetky ohraničenia. Keďže aj výraz pre z obsahuje člen $-\gamma_j\eta_j > 0$, môže jeho hodnota vzrastať nad všetky medze, funkcia z je tak na množine prípustných riešení neohraničená a teda jej maximum neexistuje.

I toto zvyčajne znamená, že pri zostavovaní úlohy došlo k chybe.

4.3.5. Príklad s krompáčmi a lopatami. Pre premenné x a y z tohto príkladu platia ohraničenia

$$\begin{aligned} y_1 &= -x - 2y + 110 \geq 0, \\ y_2 &= -x - y + 80 \geq 0, \\ y_3 &= -x + 70 \geq 0, \\ y_4 &= - y + 40 \geq 0, \end{aligned}$$

$$x \geqq 0\,, \quad y \geqq 0$$

pri ktorých treba maximalizovať cieľovú funkciu

$$z = 3x + 4y.$$

Tabuľka 10 predstavuje simplexovú tabuľku pre túto úlohu. Vidíme, že $x = 0$, $y = 0$ je prípustné, ale nie optimálne riešenie. Za riešiaci stĺpec si vezmeme napríklad prvý stĺpec (ale mohli by sme aj druhý). Riešiaci riadok je potom tretí ($70/1 < 80/1 < 110/1$) a modifikovanou

	$-x$	$-y$	1
y_1	1	2	110
y_2	1	1	80
y_3	1	0	70
y_4	0	1	40
z	-3	-4	0

Tab. 10

	$-y_3$	$-y$	1
y_1	-1	2	40
y_2	-1	1	10
x	1	0	70
y_4	0	1	40
z	3	-4	210

Tab. 11

	$-y_3$	$-y_2$	1
y_1	1	-2	20
y	-1	1	10
x	1	0	70
y_4	1	-1	30
z	-1	4	250

Tab. 12

	$-y_1$	$-y_2$	1
y_3	1	-2	20
y	1	-1	30
x	-1	2	50
y_4	-1	1	10
z	1	2	270

Tab. 13

Jordanovou elimináciou prejdeme k tabuľke 11, ktorá predstavuje prípustné riešenie $x = 70$, $y = 0$ s hodnotou $z = 210$. Ďalšími elimináciami sa cez tabuľku 12 dostaneme k tabuľke 13, ktorá má už všetky prvky v poslednom riadku kladné a teda riešenie $x = 50$, $y = 30$, pri ktorom $z = 270$ je optimálne.

4.3.6. Príklad. Nájsť maximum funkcie $z = x + 2y$ na množine, určenej podmienkami:

$$\begin{aligned} y_1 &= x + y - 10 \geqq 0, \\ y_2 &= -x + y + 1 \geqq 0, \\ y_3 &= - y + 8 \geqq 0, \end{aligned}$$

$$x \geqq 0\,, \quad y \geqq 0.$$

	$-x$	$-y$	1
y_1	-1	-1	-10
y_2	1	-1	1
y_3	0	1	8
z	-1	-2	0

Tab. 14

	$-y_2$	$-y$	1
y_1	1	-2	-9
x	1	-1	1
y_3	0	1	8
z	1	-3	1

Tab. 15

	$-y_2$	$-y_3$	1
y_1	1	2	7
x	1	1	9
y	0	1	8
z	1	3	25

Tab. 16

Tab. 14 je simplexovou tabuľkou pre tieto rovnice. Príslušné riešenie nie je ani prípustné, pretože medzi absolútnymi členmi je -10. Po dvoch elimináciach dostaneme tab. 16, ktorej zodpovedajúce riešenie $x = 9$, $y = 8$ je už nielen prípustné, ale aj optimálne. Cieľová funkcia pri ňom nadobúda hodnotu $z = 25$.

4.3.7. Príklad o rezných plánoch. Predpokladajme, že v továrni, kde sa vyrábajú dvere do bytov v novostavbách sa vyrábajú rámy (zárubne) týchto dverí z tyčí s profilom U, ktoré sú dlhé 6,5 m. Takýchto tyčí je k dispozícii 100. Treba určiť, ako tyče rezať, keď na rám jedných dverí sú potrebné dva kusy dlhé 2 m, a jeden kus dlhý 0,9 m pričom chceme dosiahnuť, aby sa zo spomínaných 100 tyčí vyrobilo čo najviac rámov (a teda odpad bol minimálny).

Jednu tyč môžeme rozrezať týmito spôsobmi:

1. na 3 kusy po 2 m, 0 kusov po 0,9 m a zvyšok 0,5 m,
2. na 2 kusy po 2 m, 2 kusov po 0,9 m a zvyšok 0,7 m,
3. na 1 kus po 2 m, 5 kusov po 0,9 m a zvyšok 0 m,
4. na 0 kusy po 2 m, 7 kusov po 0,9 m a zvyšok 0,2 m.

Rezný plán musí určiť čísla

x_1 — počet tyčí, ktoré sa budú rezať 1. spôsobom,
x_2 — počet tyčí, ktoré sa budú rezať 2. spôsobom,
x_3 — počet tyčí, ktoré sa budú rezať 3. spôsobom,
x_4 — počet tyčí, ktoré sa budú rezať 4. spôsobom.

Pre neznáme x_1, x_2, x_3, x_4 musí platiť

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 100$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0$$

x_1, x_2, x_3, x_4 sú celé čísla.

Tieto podmienky nestačia na plné určenie dovolenej množiny riešení a chýba nám aj cieľová funkcia.

Pri hľadaní cieľovej funkcie by sme mali vychádzať z toho, že našou snahou je dosiahnuť, aby sa z narezaných kusov dalo vyrobiť maximálne množstvo rámov. Lenže počet vyrobiteľných rámov nie je možné vyjadriť, ako lineárnu funkciu premenných x_1, x_2, x_3, x_4. Túto ťažkosť prekonáme istým šikovným obratom, ktorý sa v rôznych obmenách veľmi často používa pri aplikáciách lineárneho programovania.

Označme y počet rámov, ktoré môžeme z narezaných tyčí zhotoviť. Na tento počet rámov budeme potrebovať $2y$ kusov 2 m dlhých a y kusov 0,9 m dlhých. Pritom

x_1 tyčí, porezaných 1. spôsobom dá $3x_1$ ks 2 m a 0 ks 0,9 m,
x_2 tyčí, porezaných 2. spôsobom dá $2x_2$ ks 2 m a $2x_2$ ks 0,9 m,
x_3 tyčí, porezaných 3. spôsobom dá x_3 ks 2 m a $5x_3$ ks 0,9 m,
x_4 tyčí, porezaných 4. spôsobom dá 0 ks 2 m a $7x_4$ ks 0,9 m.

Teda musí platiť

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &\geqq 2y, \\ 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 &\geqq y. \end{aligned}$$

Tieto a predchádzajúce nerovnice môžeme upraviť na tvar nasledovných podmienok

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 2y \geqq 0, \\ y_2 &= 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 - y \geqq 0, \\ y_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 100 \geqq 0, \end{aligned}$$

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0,$$

pri ktorých treba maximalizovať cieľovú funkciu $z = y$.

Túto úlohu máme zapísanú v tab. 17. Vidíme, že riešenie $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = y = 0$ je prípustné, ale nie optimálne. Ďalej vidíme že ide o degenerovaný prípad, pretože absolútne členy v 1. a 2. riadku sú nulové. Tu by sme mohli použiť ε-novú metódu na odstránenie degenerácie. V tab. 17 však nastala tá šťastná okolnosť, že napr.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-y$	1
y_1	-3	-2	-1	0	2	0
y_2	0	-2	-5	-7	1	0
y_3	1	1	1	1	0	100
z	0	0	0	0	-1	0

Tab. 17

v 2. stĺpci je v 1. aj 2. riadku záporné číslo. Ak v tomto prípade zvolíme druhý stĺpec za riešiaci, môžeme riešiaci riadok v súlade s 4.3.3.1 voliť tak, ako keby namiesto núl na konci 1. a 2. riadku boli malé kladné čísla ε, bez toho, že by sme ich tam museli písať. Riešiacim prvkom je potom $a_{32} = 1$ a elimináciou dostaneme tab. 18.

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	$-x_4$	$-y$	1
y_1	-1	2	1	2	2	200
y_2	2	2	-3	-5	1	200
x_2	1	1	1	1	0	100
z	0	0	0	0	-1	0

Tab. 18

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	$-x_4$	$-y_1$	1
y	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	100
y_2	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{7}{2}$	-6	$-\frac{1}{2}$	100
x_2	1	1	1	1	0	100
z	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	100

Tab. 19

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_3$	$-x_4$	$-y_1$	1
y	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	120
x_1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{1}{5}$	40
x_2	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{17}{5}$	$\frac{1}{5}$	60
z	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	120

Tab. 20

Ďalšími elimináciami, ktoré sú našími pravidlami jednoznačne určené, prejdeme k tabuľkám 19 a 20. O prechode k tab. 21 však treba povedať viac.

	$-y_2$	$-y_3$	$-x_2$	$-x_4$	$-y_1$	1
y						125
x_1						75
x_3						25
z	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	125

Tab. 21

V poslednom riadku sú dve záporné čísla $\gamma_3 = \gamma_4 = -1/5$ v 3. a 4. stĺpci. Keby sme si hociktorý z nich zvolili za riešiaci, pravidlo 4.3.3.1 nám určí za riešiaci tretí riadok. Máme teda dve možnosti voľby riešiaceho prvku: $a_{33} = 12/5$, alebo $a_{34} = 17/5$. Keby sme však boli zvolili druhú možnosť, dostali by sme v poslednom riad ku a 3. stĺpci číslo

$$-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{17}=-\frac{1}{5}+\frac{12}{85}<0$$

a teda riešenie by nebolo optimálne (kým pri prvej možnosti sme už optimum dosiahli).

Ďalej si všímame, že tabuľku 21 sme začali vypĺňať od posledného riadku a stĺpca. Keď totiž zistíme, že prvý až predposledný prvok posledného riadku sú nezáporné, je jasné, že sme dosiahli optimálne riešenie, ďalšie eliminácie už nebudú potrebné a netreba teda vypĺňať ani vnútro tabuľky.

Optimálnym riešením je $x_1 = 75$, $x_2 = 0$, $x_3 = 25$, $x_4 = 0$, $y = 125$. To znamená, že treba rozrezať 75 tyčí prvým a 25 tyčí tretím spôsobom. Dostaneme tak $75.3 + 25 = 250$ kusov dĺžky 2 m a $25.5 = 125$ kusov dĺžky 0,9 m. Tieto práve stačia na zhotovenie 125 rámov, čo je maximálny dosiahnuteľný počet.

Treba ešte poznamenať, že sme mali šťastie, že riešenie vyšlo celočíselné (vždy to tak nemusí byť!). Inak by sme museli hľadať riešenie odhadom v blízkosti neceločíselného optimálneho riešenia, pretože žiadnu z metód na riešenie celočíselnej úlohy sme nepreberali.

Mnohí čitatelia by mohli tiež namietať, že prvá nerovnica medzi našimi podmienkami by sa mohla nahradiť rovnicou. Majú pravdu a výsledné riešenie by muselo vyjsť rovnaké. Išlo by o tzv. zmiešanú úlohu s rovnicami a nerovnicami. Pri zostavovaní tabuľky pre ňu by sme pre žiadnu rovnicu nenapísali vľavo od tabuľky premennú, ale nulu. Potom by sme prvými elimináciami tieto nuly zľava eliminovali a vynechali každý stĺpec, nad ktorý sa elimináciou dostane nula. Tým by sa tabuľka vlastne zúžila, čo by najmä pri „ručnom" spracovaní bola výhoda.

4.4. Dopravný problém

Majme, podobne, ako v kap. III, m dodávateľov toho istého tovaru, ktorí ponúkajú množstvá $a_1, \ldots, a_m$; ďalej n spotrebiteľov, ktorí tohto tovaru požadujú $b_1, \ldots, b_n$. Zvyčajne sa predpokladá, že

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b$$

hoci metódou, ktorú si ukážeme, možno riešiť aj úlohu v ktorej sa tento predpoklad nesplní.

Ďalej predpokladajme (na rozdiel od kap. III), že niet kapacitných obmedzení. To znamená, že pri ľubovoľných i, j možno ľubovoľné množstvo tovaru (pokiaľ ho má dodávateľ k dispozícii a odberateľ ho požaduje) dopraviť od i-tého dodávateľa j-temu spotrebiteľovi. Predpokladajme tiež, že preprava jednotkového množstva tovaru na tomto smere stojí c_{ij} Kčs. Treba určiť množstvá x_{ij} tovaru, ktoré sa dopravia od i-tého dodávateľa j-temu spotrebiteľovi ($i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$) tak, aby sa prepravilo celé požadované množstvo b a dopravné náklady boli minimálne.

Toto je formulácia klasického dopravného problému, ktorý patrí do lineárneho programovania, pretože pri ňom treba minimalizovať lineárnu cieľovú funkciu

$$z = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} c_{ij} x_{ij}$$

za predpokladov

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n).$$

Riešiť túto úlohu simplexovou metódou by však bolo dosť zdĺhavé. Už napríklad pri štyroch dodávateľoch a piatich spotrebiteľoch by sme mali 9 rovníc pre 20 neznámych.

Vzhľadom na túto skutočnosť vypracovali matematici iné metódy, ktoré sú určené špeciálne pre túto úlohu a vedú k cieľu oveľa rýchlejšie, ako metóda simplexová. My si preberieme jednu z nich, metódu sovietskeho profesora A. L. Lurje.

Vychádzame pri nej z tabuľky 22, keď má táto najmenej toľko stĺpcov, ako riadkov. Ak nemá, tak vychádzame z preklopenej tabuľky 23. Pre metódu je proste výhodnejšie, keď má tabuľka viac stĺpcov, ako riadkov. Pretože tabuľka 23 sa od tabuľky 22 formálne vôbec nelíši, stačí, keď si riešenie popíšeme iba pre prvú z nich.

Odberateľ / Dodávateľ	1 . . . . n	ponuka
1	c_{11} . . . . c_{1n}	a_1
.	. .	.
.	. .	.
.	. .	.
m	c_{m1} . . . . c_{mn}	a_m
požiadavka	b_1 . . . . b_n	b / spolu

Tab. 22

Dodávateľ / Odberateľ	1 . . . . m	požiadavka
1	c_{11} . . . . c_{m1}	b_1
.	. .	.
.	. .	.
.	. .	.
m	c_{1n} . . . . c_{mn}	b_n
ponuka	a_1 . . . . a_m	b / spolu

Tab. 23

Metóda sa zakladá na nasledujúcej vete:

Veta. Ak $x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}$ je optimálne riešenie dopravného problému z tabuľky 22, zostane optimálnym aj pre dopravný problém, ktorý zodpovedá tabuľke, ktorá vznikne z tabuľky 22 tak, že k prvkom niektorého riadku vovnútri tabuľky pripočítame číslo d.

Dôkaz si vykonáme pre k-ty riadok. Po pripočítaní v ňom budeme mať prvky $\bar{c}_{k1} = c_{k1} + d, \ldots, \bar{c}_{kn} = c_{kn} + d$. V ostatných riadkoch budeme mať prvky $\bar{c}_{ij} = c_{ij}$. Hodnota cenovej funkcie, ak v tejto novej úlohe si zvolíme pôvodné riešenie, bude

$$\bar{z} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \bar{c}_{ij} x_{ij} = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} c_{ij} x_{ij} + d \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = z + d a_k .$$

Pretože hodnota da_k nezávisí od voľby riešenia x_{ij}, hodnota $\bar{z}$ bude minimálna práve vtedy, kedy z, čiže optimálne riešenie pre jednu úlohu je takým i pre druhú a veta je dokázaná.

Postup algoritmu je takýto:

1. Pre každé j si vyhľadáme minimálny prvok μ_j v j-tom stĺpci tabuľky čísel c_{ij}.

2. Zakrúžkujeme si minimálne prvky v stĺpcoch. Pritom ak je v jednom stĺpci viac (rovnakých) minimálnych prvkov, zakrúžkujeme si každý z nich.

3. Vyhľadáme pseudooptimálne riešenie x_{ij}, ktoré má tieto vlastnosti:

I. $x_{ij} > 0 \Rightarrow c_{ij}$ je zakrúžkované (t. j. odberateľ odoberá len od dodávateľov, od ktorých sú dopravné náklady minimálne).

II. Súčet všetkého dodaného množstva

$$t = \sum_{i,j} x_{ij}$$

je maximálny možný.

Pri úlohách malého rozsahu vyhľadáme pseudooptimálne riešenie priamo odhadom, pri väčších postupujeme pomocou grafu z obrázku 22, v ktorom hrany z p do u budú konštruované podľa nezmenených zásad a v prostrednej časti spojíme hranou i-teho dodávateľa s j-tym spotrebiteľom, ak c_{ij} sme zakrúžkovali pri kroku 2. Tejto hrane pridelíme potom nekonečnú kapacitu (alebo rovnajúcu sa a_i). Maximálny tok v takejto sieti nám určí pseudooptimálne riešenie.

4. Ak $t = b$, je pseudooptimálne riešenie aj optimálne (vozíme len cez najlacnejšie cesty) a sme hotoví. Ak nie, znamená to, že sa nám nepodarilo previezť všetko množstvo tovaru a prejdeme ku kroku 5.

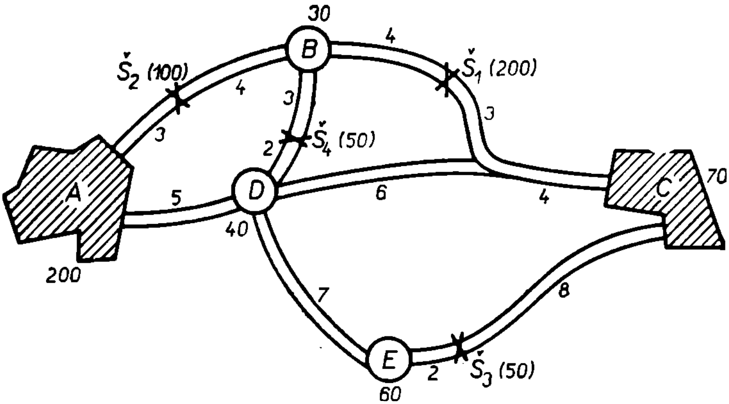
5. (teraz využijeme tvrdenie našej vety, zmeníme maticu $\|c_{ij}\|$ pripočítaním vhodného čísla d ku vhodným riadkom tak, aby sme dostali výhodnejšie položené zakrúžkované prvky). Ak pre niektorého dodávateľa platí, že existuje také $\varepsilon > 0$, že pri zvýšení jeho ponuky z a_k na $a_k + \varepsilon$, bolo by možné zvoliť taký pseudooptimálny plán, že by sme namiesto t mali $t + \varepsilon$ (t. j. mali by sme kam dodať i o niečo zvýšené ponúkané množstvo od k-teho dodávateľa), voláme k-ty riadok nedostatkovým. Riadky, ktoré nie sú nedostatkové, voláme dostatkové. Ku každému nedostatkovému riadku potom pripočítame istú hodnotu d, ktorú si určíme v kroku 6. Dostatkové riadky ponecháme bez zmeny (alebo, čo je to isté, necháme bez zmeny nedostatkové riadky a od dostatkových hodnotu d odčítame).

6. Pre všetky j vyhľadáme v j-tom stĺpci prvok δ_j, minimálny zpomedzi prvkov j-teho stĺpca, ktoré sa nachádzajú v dostatkových riadkoch. Ďalej vypočítame $d_j = \delta_j - \mu_j$. Napokon vezmeme všetky kladné čísla d_i a definujeme opravu d ako najmenšie z nich, t. j.

$$d = \min \{d_j : d_j > 0\}$$

S číslom d, ktoré sme si takto určili, vykonáme úpravy matice $\|c_{ij}\|$, ktoré sme opísali v kroku 5. S novo upravenou maticou sa zasa vrátime ku kroku 1.

Dá sa dokázať (dôkaz vynecháme, možno ho nájsť napríklad v [5]), že po konečnom počte úprav dospejeme k tomu, že pseudooptimálny plán bude už optimálny.



Obr. 33

4.4.1. Príklad. Na obr. 33 je cestná sieť, na ktorej sú mestá A, C a dediny B, D, E, v ktorých stavebný podnik stavia rôzne objekty. Na ich výstavbu potrebuje štrkopiesok, a to v denných množstvách v tonách podľa čísel, ktoré sme pripísali k jednotlivým obciam. Štrkopiesok dodávajú štrkoviská $Š_1$ — $Š_4$ v denných množstvách, ktoré sú v zátvorkách (taktiež v tonách). Čísla pri cestných úsekoch znamenajú ich dĺžky. Treba určiť, koľko štrku z ktorého štrkoviska na ktorú stavbu treba voziť, tak, aby celkový počet tonokilometrov bol minimálny.

Pokúsme sa najprv určiť rozvozný plán odhadom (bolo by vhodné, aby sa každý čitateľ pokúsil aj sám). Zvoľme napríklad

z $Š_2$ 100 t do A
z $Š_4$ 50 t do A
z $Š_1$ 50 t do A, 30 t do B, 70 t do C, 40 t do D a 10 t do E
z $Š_3$ 50 t do E.

Úhrnom sa pri týchto prepravách dosiahne nasledovný počet tonokilometrov:

$$3.100 + 7.50 + 11.50 + 4.30 + 7.70 + 9.40 + 16.10 + 2.50 = 300 + 350 + 550 + 120 + 490 + 360 + 160 + 100 = 2430 \text{ tkm}.$$

Prikročme teraz k určeniu optimálneho rozvozného plánu metódou Lurje.

Odberateľ / Dodávateľ	A	B	C	D	E	ponuka
$Š_1$	11	4	$(7)^{70}$	9	16	200 dost.
$Š_2$	$(3)^{100}$	4	15	8	15	100 ned.
$Š_3$	14	14	8	9	$(2)^{50}$	50 ned.
$Š_4$	7	$(3)^{30}$	12	$(2)^{20}$	9	50 ned.
pož.	200	30	70	40	60	400
d_j	8	1	0	7	14	sp

Tab. 24

Zapíšeme si úlohu do tab. 24. Vyznačme krúžkom*) minimálne prvky μ_j v stĺpcoch a určme si maximálny možný rozvozný plán cez zakrúžkované smery (pseudooptimálne riešenie). Rozvážané množstvá si pripíšeme ku krúžkom vpravo hore. Vidíme, že $Š_1$ je dostatkový dodávateľ (ponúka 200, rozvezie len 70), kým zvyšné riadky sú nedostatkové, pretože keby mal $Š_2$ 101 namiesto 100, alebo $Š_3$ 51 namiesto 50, alebo $Š_4$ 51 namiesto 50, mali by ich kam dodať v rámci pseudooptimálneho riešenia cez zakrúžkované trasy.

Čísla δ_j sú teda všetky prvkami prvého riadku. Rozdiely d_j máme pod tabuľkou a vidíme, že $d = 1$, čo odčítame od 1. riadku. Dostaneme tab. 25, v ktorej pseudooptimálne riešenie znamená rozvoz o 20 väčší, ako v tab. 24. Nedostatkovými sú 2. a 3. riadok. Čísla δ_j vyznačíme štvorcovým orámovaním, vypočítame d_j a z nich $d = 4$, čo pripočítame k 2. a 3. riadku. Dostaneme tab. 26, kde je rozvozný plán opäť väčší, už 300. Zvyčajným spôsobom určíme $d = 3$, čo odčítame od 1. riadku. Dostaneme tab. 27, v ktorej celkové rozvezené množstvo, 390, je už len o 10 menšie, než je treba. Opakovaným použitím krokov 1 až 6 zistíme $d = 3$, čo pripočítame k 3. riadku. Dostaneme tab. 28, v ktorej už pseudooptimálny plán rozmiesťuje všetok šterkopiesok, je to teda riešenie optimálne. Určuje nám, aby išlo

z $Š_1$ 100 t do A, 30 t do B a 70 t do C
z $Š_2$ 100 t do A
z $Š_3$ 50 t do E
z $Š_4$ 40 t do D a 10 t do E

*) Z technických dôvodov nebolo možné dodržať v tab. 24 až 32 označenie uvedené v texte. V tab. sú vysadené miesto krúžku guľaté zátvorky a miesto štvorčeka hranaté zátvorky.

Ak chceme zistiť úhrnné tonokilometre, musíme ich vypočítať z východiskovej tab. 24 (prechody k ďalším tabuľkám zachovávali optimálne riešenie, ale nie jeho cenu!):

Odberateľ / Dodávateľ	A	B	C	D	E	ponuka
$Š_1$	10	$[(3)]^{30}$	$[(6)]^{70}$	8	15	200 d
$Š_2$	$(3)^{100}$	4	15	8	15	100 n
$Š_3$	14	14	8	9	$(2)^{50}$	50 n
$Š_4$	[7]	(3)	12	$[(2^{40})]$	[9]	50 d
pož.	200	30	70	40	60	400
d_j	4	0	0	0	7	sp

Tab. 25

Odberateľ / Dodávateľ	A	B	C	D	E	ponuka
$Š_1$	10	$(3)^{30}$	$(6)^{70}$	8	15	200 d
$Š_2$	$(7)^{100}$	8	19	12	19	100 n
$Š_3$	18	18	12	13	$(6)^{50}$	50 n
$Š_4$	$(7)^{10}$	(3)	12	$(2)^{40}$	9	50 n
pož.	200	30	70	40	60	400
d_j	3	0	0	6	9	sp

Tab. 26

$$11.100 + 4.30 + 7.70 + 3.100 + 2.50 + 2.40 + 9.10 = 1100 + 120 + 490 + 300 + 100 + 80 + 90 = 2280 \text{ tkm}$$

čím sme oproti riešeniu, ktoré sme získali odhadom, získali 150 tonokilometrov denne, čo je približne 6 %.

Dodávateľ \ Odberateľ	A	B	C	D	E	ponuka
$Š_1$	$[(7)]^{90}$	$[(0)]^{30}$	$[(3)]^{70}$	5	12	200 d
$Š_2$	$(7)^{100}$	9	19	12	19	100 d
$Š_3$	18	18	12	13	$(6)^{50}$	50 n
$Š_4$	$(7)^{10}$	3	12	$[(2)]^{40}$	[9]	50 d
pož.	200	30	70	40	60	400 / sp
d_j	0	0	0	0	3	

Tab. 27

Dodávateľ \ Odberateľ	A	B	C	D	E	ponuka
$Š_1$	$(7)^{100}$	$(0)^{30}$	$(3)^{70}$	5	12	200
$Š_2$	$(7)^{100}$	9	19	12	19	100
$Š_3$	21	21	15	16	$(9)^{50}$	50
$Š_4$	(7)	3	12	$(2)^{40}$	$(9)^{10}$	50
pož.	200	30	70	40	60	400 / sp

Tab. 28

4.4.2. Priraďovací problém. V kap. III sme sa stretli s úlohou priraďovania pracovných miest pracovníkom. Vhodnosť priradenia miesta pracovníkovi sme hodnotili len „dvojstupňovo": vhodné — nevhodné.

Mohli by sme však použiť aj jemnejšie hodnotenie a priradiť každej dvojici pracovník — miesto nezáporné číselné ohodnotenie jeho vhodnosti, a to systémom záporných bodov, t. j. nula by znamenala najvhodnejšie priradenie a čím väčšie číslo, tým horšie. Celkové riešenie by sme potom považovali za optimálne, ak by súčet ohodnotení vybraných dvojíc bol minimálny. Problém vyhľadania tohto optimálneho riešenia je špeciálnym prípadom priraďovacieho problému, ktorého všeobecná formulácia je nasledovná:

Nech $\{D_1, \ldots, D_n\}$ a $\{O_1, \ldots, O_n\}$ sú dve rovnako početné množiny. Nech $\|c_{ij}\|$ je štvorcová matica s n riadkami a stĺpcami, ktorej všetky prvky sú nezáporné čísla. Treba určiť dvojice $(D_1, O_{j_1}), \ldots, (D_n, O_{j_n})$ tak, aby $(j_1, \ldots, j_n)$ bola permutácia čísel $(1, \ldots, n)$ a aby súčet

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_{ij_i}$$

bol minimálny.

Ľahko sa presvedčíme, že priraďovací problém je špeciálnym prípadom dopravného problému, v ktorom máme dodávateľov $D_1, \ldots, D_n$, pričom každý dodáva jednotku „produkcie" a odberateľov $O_1, \ldots, O_n$, z ktorých každý odoberá zasa jednotku produkcie. Ďalej máme cenovú maticu $\|c_{ij}\|$. Treba zvoliť čísla $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i, j = 1, \ldots, n$ tak, aby súčet

$$z = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

bol minimálny, za predpokladu

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	
D_1	$(1)^1$	2	3	(2)	(1)	(0)	n
D_2	4	7	7	6	6	5	d
D_3	[2]	$[(1)]^1$	[(2)]	4	4	[3]	d
D_4	6	6	4	4	7	5	d
D_5	4	4	$(2)^1$	[3]	4	5	d
D_6	3	2	4	4	[2]	5	d
d_j	1	0	0	1	1	3	$d = 1$

Tab. 29

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	
D_1	(2)	3	4	(3)	(2)	$(1)^1$	n
D_2	4	7	7	6	6	5	d
D_3	(2)	(1)	$(2)^1$	4	4	3	n
D_4	6	6	4	4	7	5	d
D_5	4	4	(2)	$(3)^1$	4	5	n
D_6	[3]	[2]	[4]	[4]	$[(2)]^1$	[5]	d
d_j	1	1	2	1	0	4	$d = 1$

Tab. 30

Uvážme napríklad úlohu z tab. 29. Tu sa môžu čitatelia pokúsiť odhadnúť riešenie sami, prv, než ho nájdeme Lurjeho metódou.

Postupným prechodom až k tab. 32 dospejeme k optimálnemu priradeniu (D_1, O_6), (D_2, O_1), (D_3, O_2), (D_4, O_4), (D_5, O_3), (D_6, O_5), ktorého cena, podľa tabuľky 29, je $0 + 4 + 1 + 4 + 2 + 2 = 13$.

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	
D_1	(3)	4	5	(4)	3	$(2)^1$	n
D_2	[4]	7	7	6	6	5	d
D_3	$(3)^1$	(2)	(3)	5	5	4	n
D_4	6	6	4	$(4)^1$	7	[5]	d
D_5	5	[5]	$[(3)]^1$	[(4)]	[5]	6	d
D_6	(3)	(2)	4	(4)	$(2)^1$	5	n
d_j	1	3	0	0	3	3	$d = 1$

Tab. 31

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
D_1	(4)	5	6	5	4	$(3)^1$
D_2	$(4)^1$	7	7	6	6	5
D_3	(4)	$(3)^1$	4	6	6	5
D_4	6	6	4	$(4)^1$	7	5
D_5	5	5	$(3)^1$	(4)	5	6
D_6	(4)	(3)	5	5	$(3)^1$	6

Tab. 32

Cvičenia

1. Zistite, ktoré z úloh teórie grafov možno sformulovať ako úlohy lineárneho programovania.

2. Cestovné na električke je 1 Kčs, pokuta za cestovanie bez lístka 50 Kčs, náklady na skontrolovanie jedného cestujúceho revízorom sú 0,10 Kčs. Určete grafickou metódou optimálny pomer x počtu kontrolovaných cestujúcich ku všetkým cestujúcim! (Návod: označte po rade $f_1(x)$, $f_2(x)$ strednú hodnotu zisku dopravného podniku na jedného platiaceho, resp. neplatiaceho cestujúceho. Treba nájsť také x, pre ktoré je min $[f_1(x), f_2(x)]$ najväčšie. Riešenie je $x = 0{,}0197$, čiže kontrolovať treba 1,97 % cestujúcich).